9 Valeurs propres, vecteurs propres

Les objectifs : « Diagonaliser une matrice ; calculer les puissances d'une matrice diagonalisable (avec ou sans moyens de calculs) ».

✐ Dans l'ensemble du chapitre, $\mathbb{K}$ désignera aussi bien $\mathbb{R}$ que $\mathbb{C}$.

1 Éléments propres

1.1 Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition — *Définition 1.1 : valeurs propres - vecteurs propres*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

① *On dit que le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une* `valeur propre` *de f si, et seulement si :*

$$\exists u \in E, u \neq 0 / f(u) = \lambda u$$

On dira que u est un `vecteur propre` *de f associé à la valeur propre λ.*

② *On dit que u est un* `vecteur propre` *de f si, et seulement si :*

$$u \in E, u \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K} / f(u) = \lambda u$$

Notation : L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle le `spectre` de f et se note $\mathrm{Sp}(f)$.

Propriété — *prop.1.1. Sous-espace vectoriel propre*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de valeur propre λ.
L'ensemble formé des vecteurs propres associés à la v.p. λ **et** *du vecteur nul 0_E est un sous-espace vectoriel de E.*
On l'appelle le `sous-espace vectoriel propre` *associé à λ et on le note E_λ.*

$$E_\lambda = \{u \in E / f(u) = \lambda u\}$$

Remarque 1 : $\dim E_\lambda = \dim E - \mathrm{rg}(f - \lambda id_E)$.

Remarque 2 : Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, alors : $\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Rightarrow E_\lambda \subset \mathrm{Im} f$.

Propriété — *prop.1.2. Caractérisation des valeurs propres*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où $\dim E$ finie.

$$\begin{array}{rcll}
(1)\ \lambda \in Sp(f) & \Leftrightarrow & E_\lambda \neq \{0_E\} & (2) \\
 & \Leftrightarrow & \dim E_\lambda \geq 1 & (3) \\
 & \Leftrightarrow & f - \lambda id_E \text{ non injective} & (4) \\
 & \Leftrightarrow & f - \lambda id_E \text{ non bijective} & (5)
\end{array}$$

Cas particulier : $0 \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow f$ non injective $\Leftrightarrow f$ non bijective. Dans ce cas $\boxed{E_0 = \mathrm{Ker} f}$
En conséquence, f injectif si, et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$

Exemple

Exemple 1.1

Déterminer le spectre et les sous-espaces vectoriels propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$f : (x, y) \longmapsto \frac{1}{2}(x + y, x + y)$$

Exemple

Exemple 1.2

Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme f de E, espace vectoriel de dimension n, tel que sa matrice dans une base de E ne comporte que des 1.

Propriété

prop.1.3.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, bijectif. Alors :

$$\lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in Sp(f^{-1}) \text{ et } E_\lambda(f) = E_{1/\lambda}(f^{-1})$$

Propriété

prop.1.4.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\lambda \in Sp(f) \Rightarrow \lambda^n \in Sp(f^n) \text{ et } E_\lambda(f) \subset E_{\lambda^n}(f^n)$$

1.2 Valeurs propres, vecteurs propres, ss-espaces propres d'une matrice carrée

Définition

Définition 1.2 : valeurs propres - vecteurs propres d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

① *On dit que le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une* `valeur propre` *de A si, et seulement si :*

$$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), X \neq 0 / AX = \lambda X$$

On dira que X est un `vecteur propre` *de A associé à la valeur propre λ.*

② *On dit que X est un* `vecteur propre` *de A si, et seulement si :*

$$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), X \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K} / AX = \lambda X$$

Notation : L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le `spectre` de A et se note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Propriété

prop.1.5. Sous-espace vectoriel propre

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de valeur propre λ.
L'ensemble formé des vecteurs propres associés à la valeur propre λ **et** *du vecteur nul 0_E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On l'appelle le* `sous-espace vectoriel propre` *associé à λ et on le note $E_\lambda(A)$.*

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})/AX = \lambda X\}$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Il est possible d'interpréter A comme matrice d'un endomorphisme E de $\mathbb{K}^n$. Dès lors, il y a coïncidence entre les éléments propres de A et ceux de l'endomorphisme qu'elle représente.

Propriété

prop.1.6. Caractérisation des valeurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll}
(1)\ \lambda \in Sp(f) & \Leftrightarrow & (A - \lambda I)X = 0 \text{ admet au moins une solution non nulle} & (2)\\
& \Leftrightarrow & A - \lambda I \text{ est non inversible} & (3)\\
& \Leftrightarrow & rg(A - \lambda I) < n & (4)
\end{array}$$

Propriété

prop.1.6.

Si A est une matrice triangulaire, alors ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.

Exemple

Exemple 1.3

Déterminer les éléments propres des deux endomorphismes suivants :

① $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)/f(x,y,z) = (x + 5y + 6z, 2y + 4z, 2z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

② $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])/g(P) = P + XP'$, $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$

Propriété

prop.1.7.

Si A et B sont semblables, alors elles ont mêmes valeurs propres.

Attention : La réciproque est fausse.

Propriété

prop.1.8.

A et ${}^tA$ ont même valeurs propres et $\forall \lambda \in Sp(A) = Sp({}^tA)$, $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda({}^tA))$

2 Diagonalisation

2.1 Famille finie de vecteur propres.

Propriété *prop.2.1.*

Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Exemple *Exemple 2.1*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $\{f_k, k \in [\![0, n]\!]\}$ est une famille libre de $E = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ avec $f_k : x \longmapsto e^{kx}$

Propriété *prop.2.2.*

Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Conséquence : Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée d'ordre n admet au plus n valeurs propres distinctes et la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n.

⚠ *On prendra garde à l'ensemble $\mathbb{K}$ des scalaires* : Selon qu'on travaille sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, les spectres peuvent être distincts. On retiendra que si le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $\mathrm{Sp}(A) \neq \emptyset$.

Propriété *prop.2.3.*

On suppose ici que le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont réels. Alors :

$$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in Sp(A) \text{ et } X \in E_\lambda(A) \Leftrightarrow \overline{X} \in E_{\bar{\lambda}}(A)$$

2.2 Endomorphisme diagonalisable - matrice diagonalisable

✐ Dans la suite, on supposera que E est un espace vectoriel de dimension finie égale à n.

Définition *Définition 2.1 : Endomorphisme diagonalisable*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f et dite `diagonalisable` si, et seulement si, il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Propriété *prop.2.4.*

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f et `diagonalisable` si, et seulement si, il existe une base $\mathcal{B}'$ formée de vecteurs propres de f.

Définition

Définition 2.2 : Matrice diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A et dite `diagonalisable` *si, et seulement si, il existe une une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et une matrice diagonale $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :*

$$A = PDP^{-1}$$

Remarque : Cette définition est cohérente avec la définition 2.1 si on interprète A comme la matrice d'un endomorphisme f de E.

Exemple

Exemple 2.2

Dire dans chacun des cas suivants si la matrice A est diagonalisable :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On retiendra que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$, alors :

A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si, et seulement si, $A = \lambda I_n$.

Propriété

prop.2.5. Une condition **nécessaire et suffisante** *de diagonalisation*

Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.

Propriété

prop.2.5. Une condition **suffisante** *de diagonalisation*

Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Méthode

Calcul de puissances

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Alors A est semblable à une matrice D diagonale et il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$$