Devoir maison : Calcul matriciel

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On définit l'application Tr qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe la somme de ses éléments diagonaux :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,i} \text{ où les } M_{i,j} \text{ sont les coefficients de } M$$

① Écrire une fonction `trace` qui prend en argument une matrice (donnée par exemple sous forme de liste de listes) et qui renvoie sa trace.

② Montrer que l'application Tr est une application linéaire.

③ Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{R}$ et en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

④ On se place dans cette question dans le cas où $n = 2$.

a) Donner une base du noyau de Tr.

b) Soit I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de la forme xI_2, avec $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

c) Soit $\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices C de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que, pour toute matrice B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a : $CB = BC$.
Montrer que $\mathcal{C}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.

On revient désormais au cas général.

⑤ Montrer que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on : $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Pour tous entiers $1 \leq i,j \leq n$, on définit la matrice $E^{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par ses coefficients $E^{i,j}_{i,j} = 1$ et $E^{i,j}_{k,l} = 0$ si $k \neq i$ ou $l \neq j$.

⑥ Expliquer pourquoi la famille $\left(E^{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

⑦ Pour tous entiers $1 \leq i,j,k,l \leq n$ tels que $j \neq k$, montrer que $E^{i,j}E^{j,k} = E^{i,k}$ et $E^{i,j}E^{k,l} = 0$.

⑧ Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application linéaire vérifiant $f(AB) = f(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $f(E^{i,j}) = 0$ si $i \neq j$ et que $f(E^{i,i})$ ne dépend pas de i.

b) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(A) = x\mathrm{Tr}(A)$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

⑨ A-t-on $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(ACB)$ pour toutes matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?