

8

Variables aléatoires à densité



Les capacités attendues : « Justifier le fait qu'une variable aléatoire admet une densité ; calculer une espérance et une variance ; appliquer le produit de convolution »

1 Densités de probabilité

1.1 Définitions et première propriétés

Définition

Définition 1.1.

On appelle **densité de probabilité** une fonction f est définie sur \mathbb{R} , **positive**, dont l'intégrale généralisée sur \mathbb{R} :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \text{ converge et vaut } 1$$

☞ **Remarque 1.1.** Cette définition suppose que f est **continue** sur \mathbb{R} , sauf éventuellement en un nombre fini de points, ce qu'il faudra vérifier au cours du raisonnement.

Définition

Définition 1.2.

On dit qu'une variable aléatoire réelle X est à densité s'il existe une densité f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Une telle fonction, qui n'est pas unique, est appelée une **densité** de X .

On admettra que si f est une densité, alors il existe une variable aléatoire X dont f est une densité.

☞ **Remarque 1.2.** : Dans ce contexte, donner la loi d'une variable aléatoire X , c'est justifier que X admet une densité et en donner une.

☞ **Remarque 1.3.** : On note que cette définition est compatible avec les propriétés connues des fonctions de répartition, à savoir que ce sont des fonctions croissantes sur \mathbb{R} vérifiant $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

Propriété

prop.1.1.

F_X est dérivable en tout point de continuité x de f et $F'_X(x) = f(x)$

Propriété

prop.1.2.

X admet une densité si et seulement si sa fonction de répartition F_X est **continue sur** \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points (les points de discontinuité de f ...).

Propriété

prop.1.3.

Soit X une variable aléatoire de densité f et de fonction de répartition F_X . Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. Alors :

$$\textcircled{1} \mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f(t)dt$$

$$\textcircled{2} \mathbb{P}(X = a) = 0$$

$$\textcircled{3} \mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$\textcircled{4} \mathbb{P}(X > a) = \mathbb{P}(X \geq a) = \int_a^{+\infty} f(t)dt = 1 - F_X(a)$$

$$\textcircled{5} \mathbb{P}(X < b) = \mathbb{P}(X \leq b) = \int_{-\infty}^b f(t)dt = F_X(b)$$

Exemple

Exemple 1.1

Soit f_1 définie sur \mathbb{R} par $f_1(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f_1 est une densité et déterminer la fonction de répartition de X_1 dont f_1 est une densité.

Exemple

Exemple 1.2

Soit f_2 définie sur \mathbb{R} par $f_2(x) = \begin{cases} e^x/2 & \text{si } x \leq 0 \\ -x + 1 & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f_2 est une densité et déterminer la fonction de répartition de X_2 dont f_2 est une densité.

Méthode

Déterminer une densité à partir de sa fonction de répartition :

Si X est une variable aléatoire à densité dont on connaît sa fonction de répartition F_X , on obtient une densité de X en dérivant F_X en tout point où elle est dérivable et en la prolongeant par des valeurs positives (le plus souvent 0) en toutes les autres valeurs. Soit :

$$f(x) = \begin{cases} F'_X(x) & \text{si } F(x) \text{ est dérivable en } x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriété

prop.1.4.

Soit X variable aléatoire de densité f et soit I un intervalle \mathbb{R} . Alors

$X(\Omega) \subset I \Leftrightarrow f$ est nulle en dehors de I , sauf peut-être en un nombre fini de points.

1.2 Composition - loi du minimum et du maximum de plusieurs variables aléatoires

1.2.1 loi de $u(X)$

Dans l'ensemble des exemples qui suivent X est une variable aléatoire de densité f et on demande la loi de $Y = u(X)$ où u est une fonction à valeurs dans \mathbb{R} définie sur $X(\Omega)$.

Exemple

Exemple 1.3

u est l'application constante égale à c . Loi de $Y = u(X)$?

Exemple

Exemple 1.4

$u : t \mapsto at + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Loi de $Y = u(X) = aX + b$?

Exemple

Exemple 1.4

$u : t \mapsto t^2$. Loi de $Y = u(X) = X^2$?

Méthode

Obtenir la loi de $u(X)$

Soit X une variable aléatoire de densité f et $Y = u(X)$ où u est définie sur $X(\Omega)$.

Pour déterminer la loi de $u(X)$:

- On donne $Y(\Omega) = u(X(\Omega))$.
- On exprime $F_Y : \forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(u(X) \leq x)$
- On détermine $I_x \subset \mathbb{R}$ tel que $F_Y(x) = \mathbb{P}(X \in I_x)$ et on exprime F_Y en fonction de F_X .
On obtient alors une densité de Y par dérivation de F_Y (et donc de $F_X \dots$).
On pourra vérifier que la fonction F_Y obtenue est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sauf éventuellement en un nombre de points, ce qui assurera que Y est bien une variable aléatoire à densité.

1.2.2 loi du minimum et du maximum de deux ou n var indépendantes

Méthode

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires **indépendantes** de fonctions de répartition respectives F_{X_1} et F_{X_2} .

① Soit $Y = \max(X_1, X_2)$. On détermine $Y(\Omega)$ et sa fonction de répartition F_Y en écrivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \mathbb{P}(\max(X_1, X_2) \leq x) = \mathbb{P}((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x)) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leq x) = F_{X_1}(x) \cdot F_{X_2}(x)$$

② Soit $Z = \min(X_1, X_2)$. On détermine $Z(\Omega)$ et sa fonction de répartition F_Z en écrivant : $\forall x \in \mathbb{R}$,


$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbb{P}(\min(X_1, X_2) \leq x) = 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, X_2) \geq x) = 1 - \mathbb{P}((X_1 \geq x) \cap (X_2 \geq x)) \\ &= 1 - (1 - \mathbb{P}(X_1 \leq x)) \cdot (1 - \mathbb{P}(X_2 \leq x)) = 1 - (1 - F_{X_1}(x)) \cdot (1 - F_{X_2}(x)) \end{aligned}$$

✍ **Remarque** : Y et Z sont des variables à densité, leur fonction de répartition étant continue sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Exemple

Exemple 1.5

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de fonction de répartition $F : x \mapsto (1 - e^{-\lambda x})\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ (on dira qu'elles suivent la loi exponentielle de paramètre λ). Déterminer la loi de $Y = \min(X_1, X_2)$

 **Remarque** : Cette démarche se généralise à la recherche de la loi du minimum et du maximum de n variables aléatoires indépendantes.

Exemple

Exemple 1.6

Soit $\{X_1, \dots, X_n\}$ une famille de variables aléatoires indépendantes de densité commune $f : x \mapsto \frac{1}{a}\mathbf{1}_{[0,a]}$. Déterminer les lois de $U = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ et de $V = \min\{X_1, \dots, X_n\}$.

1.3 Espérance

Définition

Définition 1.3. Espérance

Soit X une variable aléatoire de densité f . Si $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge absolument, on dit que X admet une **espérance mathématique** ou **espérance** égale au réel

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$$



Dans ce cas particulier, l'**absolue convergence est équivalente à la convergence** puisque $t \mapsto tf(t)$ est négative sur \mathbb{R}_- . On pourra donc se contenter de montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ converge.

Exemples

Exemples 1.7

Vérifier dans chaque cas que les fonctions f définies sur \mathbb{R} sont des densités de probabilité. On considérera les variables aléatoires de densité f et on étudiera l'existence d'une espérance qu'on explicitera en cas de convergence.

① $f : x \mapsto 6x(1-x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$

② $f : x \mapsto \frac{2}{t^3}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$

③ $f : x \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$

Propriété

prop. 1.5. Linéarité de l'espérance

Soient X une variable aléatoire réelle admettant une densité f et une espérance $\mathbb{E}(X)$, et (a, b) un couple de réels. Alors $Y = aX + b$ admet une espérance vérifiant

$$\mathbb{E}(Y) = a\mathbb{E}(X) + b$$

Propriété

prop. 1.6.

Soit X variable aléatoire à densité admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$. Alors $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est une variable aléatoire à densité d'espérance nulle appelée **variable aléatoire centrée associée à X** .

Propriété

prop. 1.7

Soit X est une variable aléatoire à densité, à valeurs dans \mathbb{R}_+ , possédant une espérance. Alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$.

Théorèmes

Théorème de transfert

Soit X variable aléatoire de densité f et soit u une fonction continue de I dans \mathbb{R} sauf peut-être en un nombre fini de points, telle que $X(\Omega) \subset I$.

Si $Y = u(X)$ est une variable aléatoire à densité, alors :

$$\mathbb{E}(Y) \text{ existe si et seulement si } \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)f(t)dt \text{ converge absolument}$$

$$\text{Sous cette condition, } \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(u(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)f(t)dt$$

Exemple

Exemple 1.8

On considère à nouveau la variable aléatoire de densité $f : x \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2 + 1}$. Que peut-on dire de $\mathbb{E}(\sin(X))$?

Propriété

prop. 1.8. Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire de densité f , à valeurs positives ($X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$) et admettant une espérance. Alors :

$$\forall \lambda > 0, \mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$$

1.4 Moments - Variance - écart-type

Définition

Définition 1.4. Moments d'ordre r

Soit X une variable aléatoire de densité f et $r \in \mathbb{N}^*$. On appelle, sous réserve de convergence absolue de l'intégrale, **moment d'ordre r de X** le réel $m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t) dt$.

✎ **Remarque** : Le moment d'ordre 0 vaut 1 et le moment d'ordre 1 vaut $\mathbb{E}(X)$.

Propriété

prop. 1.9.

Soit X une variable aléatoire de densité f et $r \in \mathbb{N}^*$. Alors :

X admet un moment d'ordre $r \Leftrightarrow X^r$ admet une espérance.

Exemple

Exemple 1.9

Soit X variable aléatoire de densité $f : x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Montrer que $m_{2r+1} = 0$ et $m_{2r} = (2r)!$, $\forall r \in \mathbb{N}$

Définition

Définition 1.5. Moments centrés d'ordre r

Soit X une variable aléatoire de densité f admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On dit que X admet un **moment centré d'ordre r** si $m_r(X - \mathbb{E}(X))$ existe et on le note $\mu_r(X)$.

Autrement dit, si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^r f(t) dt$ converge absolument, alors le **moment centré d'ordre r de X** existe et vaut le réel

$$\mu_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mathbb{E}(X))^r f(t) dt$$

Le moment centré d'ordre 2 est appelé **variance de X** et se note $\mathbb{V}(X) = \mu_2(X)$.
Sa racine carrée $\sqrt{\mathbb{V}(X)}$ est appelée **écart-type de X** et se note $\sigma(X)$.

Propriété

prop. 1.10. Formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire réelle de densité f . La variable X admet une variance si, et seulement si, X admet un moment d'ordre 2 et en cas d'existence, on a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

Exemples

Exemples 1.10

On considère les variables aléatoires de densité f . Étudier l'existence d'une variance dans chacun des cas suivants :

① $f : x \mapsto 6x(1-x)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$

② $f : x \mapsto \frac{2}{t^3}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t)$

Exemples

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une variance. Alors :

- ◆ Si elle existe, la variance de X est positive.
- ◆ $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$

✎ **Remarque** : Si X est une variable aléatoire de support fini (c'est-à-dire : $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2 / X(\Omega) = [a, b]$) alors X admet des moments et des moments centrés de tous les ordres.

Définition

définition 1.6. variables aléatoires centrées et réduites

- ◆ Une variable aléatoire X admettant une variance est dite **réduite** si $\mathbb{V}(X) = 1$.
- ◆ Soit X une variable aléatoire admettant une variance. On appelle **variable centrée réduite associée à X** la variable notée X^* et définie par

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

Propriété

Soit X^* variable centrée réduite associée à X . Alors :

$$\mathbb{E}(X^*) = 0 \text{ et } \mathbb{V}(X^*) = 1$$

2 Lois usuelles

2.1 Loi uniforme

Définition

définition 2.1. Loi uniforme

Soit X variable aléatoire réelle et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

On dit que X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$$

En particulier, $X(\Omega) = [a, b]$. On note $X \leftrightarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$

☞ **Remarque** : La loi uniforme sur $[a, b]$ modélise le choix au hasard d'un réel entre a et b ; la fonction Python de « nombre au hasard » `random()` issue de la bibliothèque `random` permet de simuler la loi uniforme. Elle est fondamentale car à l'origine des simulations aussi bien des variables discrètes que des variables à densité.

Exemples

Exemples 2.1

On choisit au hasard un réel compris entre 0 et 1. Quelle est la probabilité que le carré de ce réel soit supérieur à $1/4$?

Théorèmes

Théorème 2.1. Fonction de répartition de la loi uniforme

La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$ est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Exemples

Exemples 2.2

Si $U \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$ montrer que $X = (b-a)U + a \hookrightarrow \mathcal{U}_{]a,b[}$

Exemples

Exemples 2.3

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une fonction de répartition strictement croissante sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, bijection de I sur $]0, 1[$. Déterminer la loi de $Y = F_X^{-1}(U)$ où $U \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$.

Propriété

Proposition 2.1. Espérance et variance de la loi uniforme

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, alors X admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2.2 Loi exponentielle

Définition

définition 2.2. Loi exponentielle

Soit X variable aléatoire réelle.

On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}$$

En particulier, $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

Théorèmes

Théorème 2.2. Fonction de répartition de la loi exponentielle

La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ est définie par :

$$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x})\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

Propriété

Proposition 2.2. Espérance et variance de la loi exponentielle

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ alors X admet une espérance et une variance et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Propriété

Proposition 2.3. Moments de la loi exponentielle

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ alors X admet des moments de tous les ordres et

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r) = \frac{r!}{\lambda^r}$$

Propriété

Proposition 2.4. « Amnésie » de la loi exponentielle

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ alors :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}_+, \mathbb{P}_{(X \geq s)}(X \geq s + t) = \mathbb{P}(X \geq t)$$

☞ **Remarque de modélisation** : La loi exponentielle de paramètre λ peut être simulée à partir d'une simulation de la loi uniforme. On montrera dans un premier temps que la restriction de F_X à \mathbb{R}_+^* est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, 1[$ puis on démontrera que si $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1[)$ alors $F_X^{-1}(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre λ .

2.3 Loi normale

☞ **Rappel** : On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$

Définition

définition 2.3. Loi normale

Soit X variable aléatoire réelle et soient deux réels $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que X suit la loi normale de paramètres m et σ^2 si elle admet pour densité la fonction $\varphi_{m,\sigma}$ définie par :

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

En particulier, $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Remarque : On vérifiera que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{m,\sigma}(x) dx$ converge et vaut 1 à l'aide du changement de variable : $u = \frac{x-m}{\sigma}$.

Notations : On note $\phi_{m,\sigma}$ la fonction de répartition de $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Activité

Etudier les fonctions $\varphi_{m,\sigma}$ et $\phi_{m,\sigma}$ puis tracer leur représentation graphique.

Théorèmes

Théorème 2.3.

Soit X une variable aléatoire réelle à densité. Alors :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Leftrightarrow Y = \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Notations : On notera par la suite $\phi = \phi_{0,1}$ et $\varphi = \varphi_{0,1}$, fonctions définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \text{ et } \phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$$

Remarque : On obtient les valeurs de la fonction de répartition ϕ et de sa réciproque (dite fonction des quantiles et notée $\alpha \mapsto u_\alpha$) au moyen d'une calculatrice ou d'une bibliothèque associée à un langage de programmation.

En Python, on utilisera la bibliothèque `scipy.stats` au sein de laquelle on trouvera la fonction `norm` qui dispose de plusieurs méthodes permettant d'obtenir les valeurs de la densité de probabilité φ , de la fonction de répartition ϕ mais aussi de la fonction des quantiles.

En pratique :

```
from scipy.stats import norm
```

puis :

- `norm.pdf()` pour *Probability Density Function*
- `norm.cdf()` pour *Cumulative Density Function*
- `norm.ppf()` pour *Percent point function (inverse of cdf - percentiles)*.

Propriété

Proposition 2.5. Loi normale centrée réduite

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Alors :

- ① $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$
- ② $\forall x \in \mathbb{R}, \phi(-x) = 1 - \phi(x)$
- ③ $\forall x \in \mathbb{R}_+, \mathbb{P}(|X| \leq x) = 2\phi(x) - 1$ et $\mathbb{P}(|X| \geq x) = 2(1 - \phi(x))$

Propriété

Proposition 2.6

Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $\mathbb{E}(X) = m$ et $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$

Propriété

Proposition 2.7.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. Alors :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma) \Leftrightarrow Y = aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}(am + b, |a|\sigma)$$

3 Somme de v.a.d. indépendantes

3.1 Loi de la somme de deux variables indépendantes

Théorèmes

Théorème 3.1. Loi d'une somme de 2 var indépendantes

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de densités respectives f et g . Alors $S = X + Y$ est une variable aléatoire réelle de densité h définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx$$

h ainsi définie est appelée **le produit de convolution** de f et de g

Exemples

Exemples 3.1

Déterminer la loi de $S = X + Y$ lorsque X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes deux la même loi :

- ① uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$
- ② exponentielle de paramètre λ

3.2 Somme de deux variables aléatoires normales indépendantes

Théorèmes

Théorème 3.2. Somme de deux lois normales centrées indépendantes

On suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ sont deux variables aléatoires indépendantes. Alors :

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Théorèmes

Théorème 3.3. Somme de deux lois normales indépendantes

On suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ sont deux variables aléatoires indépendantes. Alors :

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Théorèmes

Généralisation au cas de n lois normales indépendantes

On suppose que $\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$ est un ensemble de n variables gaussiennes indépendantes de paramètres respectifs m_i et σ_i^2 . Alors :

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(m, S^2) \text{ ou } m = \sum_{i=1}^n m_i \text{ et } S^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$