7 Integrales généralisées

Les objectifs : « Les intégrales généralisées sont introduites ici pour définir les variables aléatoires à densité. En dehors de questions probabilistes, les intégrales généralisées ne doivent être utilisées que de manière exceptionnelle et en lien avec des démarches de modélisation. »

1 Intégrales généralisées.

1.1 Intégrale généralisée d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert

Définition

Définition 1.1.

Soit f fonction continue sur $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$

f admet une primitive F définie sur $[a, b[$ par : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Si il existe un réel l tel que $\lim_{x \to b} F(x) = l$ alors on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge et vaut l. Elle sera notée $\int_a^b f(t)dt$.

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Exemples

Exemples 1.1

Préciser la nature (convergence ou divergence) des intégrales suivantes :

$$\text{(i) } I_1 = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad \text{(ii) } I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} \quad \text{(iii) } I_3 = \int_0^1 \frac{dt}{t^2-1}$$

Définition

Définition 1.2.

Soit f fonction continue sur $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$

Soit G définie sur $]a, b]$ par : $G(x) = \int_x^b f(t)dt$.

Si il existe un réel l tel que $\lim_{x \to a} G(x) = l$ alors on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ converge et vaut l. Elle sera notée $\int_a^b f(t)dt$.

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Exemples

Exemples 1.2

Préciser la nature (convergence ou divergence) des intégrales suivantes :

$$(i)\ I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad (ii)\ I_2 = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{t^2+1} \quad (iii)\ I_3 = \int_{-1}^0 \frac{dt}{t^2-1}$$

Propriété

prop.1.1. Intégrales faussement impropres

Si f est continue sur $[a,b[$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ et prolongeable par continuité en b, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

De même, si f est continue sur $]a,b]$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ et prolongeable par continuité en a, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Exemples

Exemples 1.3

Préciser la nature de $I = \int_0^{1/2} \frac{t-1}{\ln t}dt$ et $J = \int_{1/2}^1 \frac{t-1}{\ln t}dt$

Propriété

prop.1.2. Relation de Chasles

Si f est continue sur $[a,b[$, avec $-\infty < a < b \leq +\infty$, alors :

$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge} \Leftrightarrow \int_c^b f(t)dt \text{ converge, } \forall c \in [a,b[$$

On a alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Remarque : Ce résultat reste vrai si f est continue sur $]a,b]$, avec $-\infty \leq a < b < +\infty$

1.2 Exemples de référence

On supposera $a, b \in \mathbb{R}_+^* / b < a$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

① $I = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt$

② $I = \int_0^1 \ln t dt$

③ $\forall b > 0$, $\int_0^b \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$

④ $\forall b > a$, $\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$

⑤ $\forall a > 0$, $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$

1.3 Intégrales plusieurs fois impropres

Définition

Définition 1.3

Soit f fonction continue sur $]a,b[$ où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. S'il existe $c \in]a,b[$ tel que les intégrales généralisées $I_1 = \int_a^c f(t)dt$ et $I_2 = \int_c^b f(t)dt$ convergent, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ converge et on pose :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Il suffit qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que I_1 ou I_2 diverge pour que l'intégrale diverge.

Exemples

Exemples 1.4

Préciser la nature des intégrales suivantes :

(i) $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ *(ii)* $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1}$ *(iii)* $I_3 = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2-1}$ *(iv)* $I_4 = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}dt$ *(v)* $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+^*)$

Définition

Définition 1.4

Soit f fonction continue sur $]a,b[$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ sauf en un nombre fini de points $c_1, \cdots, c_n$ tels que :

$$a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n < c_{n+1} = b$$

Si, pour tout $k \in [\![0,b]\!]$, l'intégrale généralisée $\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t)dt$ converge, on dite que $\int_a^b f(t)dt$ converge. Dans ce cas :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(t)dt$$

Propriété

prop.1.3. Structure d'espace vectoriel

Soit I un intervalle ouvert ou semi-ouvert de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions continues de I à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont l'intégrale sur I converge est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et l'application $\varphi : f \longmapsto \int_I f(t)dt$ est une forme linéaire sur ce sous-espace vectoriel.

Si $\int_I (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dt$ converge, **ne pas conclure** que $\int_I f(t)dt$ et $\int_I g(t)dt$ convergent.

Exemple

Exemple 1.5

$I = \int_0^1 \frac{e^t-1}{t}dt$ *converge alors que* $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ *et* $\int_0^1 \frac{e^t}{t}dt$ *divergent.*

2 Le cas particulier des fonctions positives.

Propriété

prop.2.1

Soit f fonction continue et **positive** *sur I, intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$.*

① *Le cas « droit » : soient a et b tels que : $-\infty < a < b \leq +\infty$ et $I = [a, b[$. Alors :*

$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge si et seulement si } F : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt \text{ est majorée sur } I$$

② *Le cas « gauche » : soient a et b tels que : $-\infty \leq a < b < +\infty$ et $I =]a, b]$. Alors :*

$$\int_a^b f(t)dt \text{ converge si et seulement si } G : x \longmapsto \int_x^b f(t)dt \text{ est majorée sur } I$$

Théorèmes

Théor. 2.1. Convergence par comparaison pour deux fonctions positives

Soit f et g deux fonctions **continues** *et* **positives** *sur I, intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ telles que :*

$$\forall t \in I, 0 \leq f(t) \leq g(t)$$

Que l'on ait $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$ ou $I =]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$, alors :

$$\text{Si } \int_a^b g(t)dt \text{ converge, alors } \int_a^b f(t)dt \text{ converge}$$

✐**Remarque 2.1 :** Par contraposition, sous les mêmes hypothèses : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Exemples

Exemples 2.1

Préciser la nature des intégrales suivantes :

$$\text{(i) } I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)} \quad \text{(ii) } I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2}dt \quad \text{(iii) } I_3 = \int_0^1 \frac{e^t dt}{t}$$

✐**Remarque 2.2 :** Si f est négative sur $[a, b[$ ou $]a, b]$, on appliquera ce théorème à $(-f)$.

Exemple

Exemple 2.2

Étudier la nature de $I_1 = \int_0^1 \dfrac{\ln t}{1-t}dt$

Théorèmes

Théor. 2.2. Convergence pour deux fonctions positives équivalentes

Si f et g sont deux fonctions continues et positives sur $I = [a, b[$, intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ telles que $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$, alors les intégrales généralisées en b : $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont de même nature.

Exemple

Exemple 2.3

Déterminer la nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) dt$

Exemple

Exemple 2.4

Soit $f : t \longmapsto t^3 e^{-t} \cdot 1_{\mathbb{R}_+}(t)$. Montrer la convergence de $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ après avoir étudié $\underset{x \to +\infty}{lim} t^2 f(t)$

Définition

Intégrales absolument convergentes

Soit I un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b (éléments de $\mathbb{R}$ ou de $\overline{\mathbb{R}}$) avec $a < b$ et soit f fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ `converge absolument` si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

Propriété

prop 2.2. Intégrales absolument convergentes

Si I est une intégrale absolument convergente, alors I est une intégrale convergente.

Exemple

exemple 2.5

Étudier la nature de $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$

3 Intégrations par parties et changement de variable.

3.1 Intégrations par parties

Propriété

prop 3.1. Intégrations par partie pour intégrales généralisées

Soit f une fonction continue sur $I = [a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$ et soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On suppose que la fonction $u \cdot v$ admet une limite en b par valeurs inférieures. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt \text{ et } \int_a^b u(t)v'(t)dt \text{ sont de même nature}$$

Si l'une d'elle converge, alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t) = \lim_{x\to b} u(x)v(x) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Évidemment, l'argument s'applique aussi bien à une fonction f continue sur $I =]a, b]$ si $u \cdot v$ admet une limite en a par valeurs supérieures ou même $I =]a, b[$ si $u \cdot v$ admet simultanément une limite en a par valeurs supérieures et en b par valeurs inférieures.

Exemple

exemples 3.1

Montrer la convergence et calculer la valeur de $I_1 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$

Déterminer la nature de $I_2 = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt$

3.2 Changement de variable

Propriété

prop 3.2. changement de variable pour les intégrales généralisées

Si la fonction « changement de variable » φ est de classe $\mathcal{C}^1$, **strictement monotone** *sur un intervalle d'extrémités a et b ayant des limites $\alpha = \lim_{t\to a} \varphi(t)$ et $\beta = \lim_{t\to b} \varphi(t)$ et si f est continue sur l'intervalle d'extrémités α et β, alors les intégrales $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ convergent ou divergent simultanément. En cas de convergence, on obtient :*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Exemple

exemple 3.2

Montrer la convergence et calculer la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}}$ *en posant* $x = \sqrt{t}$

Cas particulier important :

① Si f est une fonction paire, continue sur $]-a,a[$ telle que $\int_0^a f(t)dt$ converge, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$

② Si f est une fonction impaire, continue sur $]-a,a[$ telle que $\int_0^a f(t)dt$ converge, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$

Exemple

exemple 2.6

Soit $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\pi(t^2+1)}$. *Déterminer la nature et la valeur de* $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ *et de* $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$

Propriété

Prop. 3.3 - Intégrale de Gauss

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$ *converge et vaut* $\sqrt{2\pi}$