algebre

24 novembre 2022

Fiches d'échauffement

Fiches d'échauffement

6. Réduction d'endomorphismes
   - matrices diagonalisables
   - Recherche de valeurs propres
   - projections

Table des matières

Système 1

Soit (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y + z & = 1 \\ x - y + 2z & = 2 \\ 3x + y - z & = 0 \\ x + y + z & = 5 \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution.
2. (S) n'a pas de solution.
3. (S) a exactement deux solutions.
4. (S) a une infinité de solutions.

Système 1

Soit (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y + z & = 1 \\ x - y + 2z & = 2 \\ 3x + y - z & = 0 \\ x + y + z & = 5 \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution. **Faux**
2. (S) n'a pas de solution.
3. (S) a exactement deux solutions.
4. (S) a une infinité de solutions.

Système 1

Soit (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y + z & = 1 \\ x - y + 2z & = 2 \\ 3x + y - z & = 0 \\ x + y + z & = 5 \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution. **Faux**
2. (S) n'a pas de solution.
3. (S) a exactement deux solutions.
4. (S) a une infinité de solutions.**Faux**

Système 1

Soit (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y + z & = 1 \\ x - y + 2z & = 2 \\ 3x + y - z & = 0 \\ x + y + z & = 5 \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution. **Faux**
2. (S) n'a pas de solution.
3. (S) a exactement deux solutions. **Faux**
4. (S) a une infinité de solutions.**Faux**

Système 1

Soit (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y + z & = 1 \\ x - y + 2z & = 2 \\ 3x + y - z & = 0 \\ x + y + z & = 5 \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution. **Faux**
2. (S) n'a pas de solution. **Vrai**
3. (S) a exactement deux solutions. **Faux**
4. (S) a une infinité de solutions.**Faux**

Système 2

Soit (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y + z & = 1 \\ x - y + 2z & = 2 \\ 3x + y - z & = 0 \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution.
2. (S) n'a pas de solution.
3. (S) a exactement deux solutions.
4. (S) a une infinité de solutions.

Système 2

Soit (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y + z & = 1 \\ x - y + 2z & = 2 \\ 3x + y - z & = 0 \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution.
2. (S) n'a pas de solution.
3. (S) a exactement deux solutions.
4. (S) a une infinité de solutions. **Faux**

Système 2

Soit (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y + z & = 1 \\ x - y + 2z & = 2 \\ 3x + y - z & = 0 \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution.
2. (S) n'a pas de solution.
3. (S) a exactement deux solutions. **Faux**
4. (S) a une infinité de solutions. **Faux**

Système 2

Soit (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y + z & = 1 \\ x - y + 2z & = 2 \\ 3x + y - z & = 0 \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution.
2. (S) n'a pas de solution. **Faux**
3. (S) a exactement deux solutions. **Faux**
4. (S) a une infinité de solutions. **Faux**

Système 2

Soit (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y + z &= 1 \\ x - y + 2z &= 2 \\ 3x + y - z &= 0 \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution. **Vrai**
2. (S) n'a pas de solution. **Faux**
3. (S) a exactement deux solutions. **Faux**
4. (S) a une infinité de solutions. **Faux**

Système 3

Soit (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y + z & = 1 \\ x - y + 2z & = 2 \\ 3x + y - z & = 0 \\ 108x + 108y + 108z & = 70 \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution.
2. (S) n'a pas de solution.
3. (S) a exactement deux solutions.
4. (S) a une infinité de solutions.

Système 3

Soit (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y + z & = 1 \\ x - y + 2z & = 2 \\ 3x + y - z & = 0 \\ 108x + 108y + 108z & = 70 \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution. **Faux**
2. (S) n'a pas de solution.
3. (S) a exactement deux solutions. **Faux**
4. (S) a une infinité de solutions.**Faux**

Système 3

Soit (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} 2x + y + z & = 1 \\ x - y + 2z & = 2 \\ 3x + y - z & = 0 \\ 108x + 108y + 108z & = 70 \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution. **Faux**
2. (S) n'a pas de solution. **Vrai**
3. (S) a exactement deux solutions. **Faux**
4. (S) a une infinité de solutions.**Faux**

Système 4

Soient k un réel et (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + kz & = 2 \\ 3x + 4y + 2z & = k \\ 2x + 3y - z & = 1 \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution.
2. (S) n'a pas de solution si $k = 3$.
3. (S) a une unique solution si $k = 3$.
4. (S) a une unique solution si $k \neq 3$.

Système 4

Soient k un réel et (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + kz & = 2 \\ 3x + 4y + 2z & = k \\ 2x + 3y - z & = 1 \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution. **Faux**
2. (S) n'a pas de solution si $k = 3$. **Faux**
3. (S) a une unique solution si $k = 3$. **Faux**
4. (S) a une unique solution si $k \neq 3$.

Système 4

Soient k un réel et (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + kz & = 2 \\ 3x + 4y + 2z & = k \\ 2x + 3y - z & = 1 \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution. **Faux**
2. (S) n'a pas de solution si $k = 3$. **Faux**
3. (S) a une unique solution si $k = 3$. **Faux**
4. (S) a une unique solution si $k \neq 3$. **Vrai**

Système 5

Soient k un réel et (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} x + 2y + kz & = 1 \\ 2x + ky + 8z & = 3 \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution.
2. (S) n'a pas de solution si $k = 4$.
3. (S) a une unique solution si $k = 3$.
4. (S) a une unique solution si $k \neq 3$.

Système 5

Soient k un réel et (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} x + 2y + kz & = 1 \\ 2x + ky + 8z & = 3 \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution. **Faux**
2. (S) n'a pas de solution si $k = 4$.
3. (S) a une unique solution si $k = 3$. **Faux**
4. (S) a une unique solution si $k \neq 3$. **Faux**

Système 5

Soient k un réel et (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} x + 2y + kz & = 1 \\ 2x + ky + 8z & = 3 \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution. **Faux**
2. (S) n'a pas de solution si $k = 4$. **Vrai**
3. (S) a une unique solution si $k = 3$. **Faux**
4. (S) a une unique solution si $k \neq 3$. **Faux**

Système 6

Soient k un réel et (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} kx + y + z & = 0 \\ x + ky + z & = 0 \\ x + y + kz & = 0 \end{cases}$$

1. (S) n'admet pas d'unique solution.
2. L'ensemble des solutions de (S) est un plan si $k = -2$.
3. (S) a une infinité de solutions si $k = 1$.
4. (S) a une unique solution si $k \neq 3$.

Système 6

Soient k un réel et (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} kx + y + z & = 0 \\ x + ky + z & = 0 \\ x + y + kz & = 0 \end{cases}$$

1. (S) n'admet pas d'unique solution. **Faux**
2. L'ensemble des solutions de (S) est un plan si $k = -2$.
3. (S) a une infinité de solutions si $k = 1$. **Vrai**
4. (S) a une unique solution si $k \neq 3$. **Faux**

Système 7

Soient a, b et c trois réels et (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} x - 2y + 2z & = a \\ x + 3y - 3z & = b \\ 2x + y - z & = c \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution.
2. L'ensemble des solutions de (S) est une droite si $c = b + a$.
3. (S) a une infinité de solutions si $c \neq b + a$.
4. (S) a trois solutions.

Système 7

Soient a, b et c trois réels et (S) le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(S) \quad \begin{cases} x - 2y + 2z & = a \\ x + 3y - 3z & = b \\ 2x + y - z & = c \end{cases}$$

1. (S) a une unique solution. **Faux**
2. L'ensemble des solutions de (S) est une droite si $c = b + a$. **Vrai**
3. (S) a une infinité de solutions si $c \neq b + a$. **Faux**
4. (S) a trois solutions. **Faux**

Table des matières

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour chaque matrice, donner son rang, dire si elles sont inversibles et si oui, déterminer son inverse.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_1) =$; A_1 inversible : ; $A_1^{-1} =$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_2) =$; A_2 inversible : ; $A_2^{-1} =$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_3) =$; A_3 inversible :
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_4) =$; A_4 inversible :
5. $A_5 = A_2 - I =$; $\mathrm{rg}(A_5) =$; A_2 inv : ;

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour chaque matrice, donner son rang, dire si elles sont inversibles et si oui, déterminer son inverse.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : ; $A_1^{-1} =$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_2) =$; A_2 inversible : ; $A_2^{-1} =$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_3) =$; A_3 inversible :
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_4) =$; A_4 inversible :
5. $A_5 = A_2 - I =$; $\mathrm{rg}(A_5) =$; A_2 inv : ;

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour chaque matrice, donner son rang, dire si elles sont inversibles et si oui, déterminer son inverse.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : **OUI** ; $A_1^{-1} =$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_2) =$; A_2 inversible : ; $A_2^{-1} =$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_3) =$; A_3 inversible :
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_4) =$; A_4 inversible :
5. $A_5 = A_2 - I =$; $\mathrm{rg}(A_5) =$; A_2 inv : ;

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour chaque matrice, donner son rang, dire si elles sont inversibles et si oui, déterminer son inverse.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : **OUI** ; $A_1^{-1} = A_1$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_2) =$; A_2 inversible : ; $A_2^{-1} =$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_3) =$; A_3 inversible :
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_4) =$; A_4 inversible :
5. $A_5 = A_2 - I =$; $\mathrm{rg}(A_5) =$; A_2 inv : ;

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour chaque matrice, donner son rang, dire si elles sont inversibles et si oui, déterminer son inverse.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : **OUI** ; $A_1^{-1} = A_1$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_2) = 2$; A_2 inversible : ; $A_2^{-1} =$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_3) =$; A_3 inversible :
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_4) =$; A_4 inversible :
5. $A_5 = A_2 - I =$; $\mathrm{rg}(A_5) =$; A_2 inv : ;

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour chaque matrice, donner son rang, dire si elles sont inversibles et si oui, déterminer son inverse.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : **OUI** ; $A_1^{-1} = A_1$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_2) = 2$; A_2 inversible : **OUI** ; $A_2^{-1} =$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_3) =$; A_3 inversible :
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_4) =$; A_4 inversible :
5. $A_5 = A_2 - I =$; $\mathrm{rg}(A_5) =$; A_2 inv : ;

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour chaque matrice, donner son rang, dire si elles sont inversibles et si oui, déterminer son inverse.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : **OUI** ; $A_1^{-1} = A_1$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_2) = 2$; A_2 inversible : **OUI** ; $A_2^{-1} = A_2$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_3) =$; A_3 inversible :
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_4) =$; A_4 inversible :
5. $A_5 = A_2 - I =$; $\mathrm{rg}(A_5) =$; A_2 inv : ;

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour chaque matrice, donner son rang, dire si elles sont inversibles et si oui, déterminer son inverse.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : **OUI** ; $A_1^{-1} = A_1$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_2) = 2$; A_2 inversible : **OUI** ; $A_2^{-1} = A_2$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_3) = 1$; A_3 inversible :
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_4) =$; A_4 inversible :
5. $A_5 = A_2 - I =$; $\mathrm{rg}(A_5) =$; A_2 inv : ;

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour chaque matrice, donner son rang, dire si elles sont inversibles et si oui, déterminer son inverse.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : **OUI** ; $A_1^{-1} = A_1$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_2) = 2$; A_2 inversible : **OUI** ; $A_2^{-1} = A_2$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_3) = 1$; A_3 inversible : **NON**
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_4) =$; A_4 inversible :
5. $A_5 = A_2 - I =$; $\mathrm{rg}(A_5) =$; A_2 inv : ;

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour chaque matrice, donner son rang, dire si elles sont inversibles et si oui, déterminer son inverse.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : **OUI** ; $A_1^{-1} = A_1$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_2) = 2$; A_2 inversible : **OUI** ; $A_2^{-1} = A_2$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_3) = 1$; A_3 inversible : **NON**
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_4) = 1$; A_4 inversible :
5. $A_5 = A_2 - I =$; $\mathrm{rg}(A_5) =$; A_2 inv : ;

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour chaque matrice, donner son rang, dire si elles sont inversibles et si oui, déterminer son inverse.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : **OUI** ; $A_1^{-1} = A_1$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_2) = 2$; A_2 inversible : **OUI** ; $A_2^{-1} = A_2$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_3) = 1$; A_3 inversible : **NON**
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_4) = 1$; A_4 inversible : **NON**
5. $A_5 = A_2 - I =$; $\mathrm{rg}(A_5) =$; A_2 inv : ;

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour chaque matrice, donner son rang, dire si elles sont inversibles et si oui, déterminer son inverse.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : **OUI** ; $A_1^{-1} = A_1$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_2) = 2$; A_2 inversible : **OUI** ; $A_2^{-1} = A_2$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_3) = 1$; A_3 inversible : **NON**
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_4) = 1$; A_4 inversible : **NON**
5. $A_5 = A_2 - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_5) =$; A_2 inv : ;

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour chaque matrice, donner son rang, dire si elles sont inversibles et si oui, déterminer son inverse.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : **OUI** ; $A_1^{-1} = A_1$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_2) = 2$; A_2 inversible : **OUI** ; $A_2^{-1} = A_2$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_3) = 1$; A_3 inversible : **NON**
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_4) = 1$; A_4 inversible : **NON**
5. $A_5 = A_2 - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_5) = 1$; A_2 inv : ;

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour chaque matrice, donner son rang, dire si elles sont inversibles et si oui, déterminer son inverse.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : **OUI** ; $A_1^{-1} = A_1$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_2) = 2$; A_2 inversible : **OUI** ; $A_2^{-1} = A_2$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_3) = 1$; A_3 inversible : **NON**
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_4) = 1$; A_4 inversible : **NON**
5. $A_5 = A_2 - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{rg}(A_5) = 1$; A_2 inv : **NON** ;

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ - Suite

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. $\mathrm{rg}(A_1) =$; A_1 inversible : ;
2. Que dire du système (S_1) $A_1X = 0$:
3. $A_1^{-1} =$

   Solution de $A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$:
4. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
   $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. f est-elle injective ?

   .

   f est-elle surjective ?

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ - Suite

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : ;
2. Que dire du système (S_1) $A_1X = 0$:
3. $A_1^{-1} =$

   Solution de $A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$:
4. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
   $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. f est-elle injective ?

   .

   f est-elle surjective ?

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ - Suite

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : **OUI** ;
2. Que dire du système (S_1) $A_1X = 0$:
3. $A_1^{-1} =$

   Solution de $A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$:
4. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
   $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. f est-elle injective ?

   .

   f est-elle surjective ?

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ - Suite

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : **OUI** ;
2. Que dire du système (S_1) $A_1X = 0$: C'est un système de Cramer. Son unique solution est $X = 0$
3. $A_1^{-1} =$

   Solution de $A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$:
4. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
   $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. f est-elle injective ?

   .

   f est-elle surjective ?

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ - Suite

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : **OUI** ;
2. Que dire du système (S_1) $A_1X = 0$: C'est un système de Cramer. Son unique solution est $X = 0$
3. $A_1^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

   Solution de $A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$:
4. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
   $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. f est-elle injective ?

   .

   f est-elle surjective ?

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ - Suite

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. $\text{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : **OUI** ;
2. Que dire du système (S_1) $A_1X = 0$: C'est un système de Cramer. Son unique solution est $X = 0$
3. $A_1^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ On pouvait noter $A^2 = 2Id$

   Solution de $A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$:
4. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
   $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. f est-elle injective ?

   .

   f est-elle surjective ?

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ - Suite

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : **OUI** ;
2. Que dire du système (S_1) $A_1 X = 0$: C'est un système de Cramer. Son unique solution est $X = 0$
3. $A_1^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ On pouvait noter $A^2 = 2Id$

   Solution de $A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$: $X = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
4. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = (x + y, x - y)$. $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. f est-elle injective ?

   .

   f est-elle surjective ?

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ - Suite

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : **OUI** ;
2. Que dire du système (S_1) $A_1 X = 0$: C'est un système de Cramer. Son unique solution est $X = 0$
3. $A_1^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ On pouvait noter $A^2 = 2Id$

   Solution de $A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$: $X = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
4. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = (x+y, x-y)$.
   $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. f est-elle injective ?OUI, car $\mathrm{Ker} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / A_1 \cdot^t \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
   f est-elle surjective ?

Inversibilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ - Suite

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. $\mathrm{rg}(A_1) = 2$; A_1 inversible : **OUI** ;
2. Que dire du système (S_1) $A_1X = 0$: C'est un système de Cramer. Son unique solution est $X = 0$
3. $A_1^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ On pouvait noter $A^2 = 2Id$
   Solution de $A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$: $X = A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
4. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = (x + y, x - y)$.
   $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. f est-elle injective ?OUI, car $\mathrm{Ker} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / A_1 \cdot^t \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
   f est-elle surjective ?OUI, A inversible ou F. du rang

Inversibilité

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est l'inverse de A.
2. A^2 est $-4I_3 - 5A$.
3. $\dfrac{1}{4}(A + 5I_3)$ est l'inverse de A.
4. A n'est pas inversible.

Inversibilité

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est l'inverse de A. **Faux**
2. A^2 est $-4I_3 - 5A$. **Vrai**
3. $\dfrac{1}{4}(A + 5I_3)$ est l'inverse de A. **Faux**
4. A n'est pas inversible. **Faux**

Inversibilité

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A^3 est nulle.
2. A^2 est nulle.
3. A est inversible.
4. A^2 est inversible.

Inversibilité

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A^3 est nulle. **Vrai**
2. A^2 est nulle. **Faux**
3. A est inversible. **Faux**
4. A^2 est inversible. **Faux**

Inversibilité

Soient A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, P la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et D la matrice $P^{-1}AP$.

1. D n'est pas définie.
2. A^2 est nulle.
3. D est une matrice diagonale.
4. D est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Inversibilité

Soient A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, P la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et D la matrice $P^{-1}AP$.

1. D n'est pas définie. **Faux**
2. A^2 est nulle. **Faux**
3. D est une matrice diagonale. **Vrai**
4. D est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **Faux**

Inversibilité

Soient k un réel et A la matrice $\begin{pmatrix} k-1 & 2 & 2 \\ 2 & k-1 & 2 \\ 2 & 2 & k-1 \end{pmatrix}$.

1. A est inversible.
2. A^2 est nulle.
3. A est inversible si et seulement si k vaut 3 ou -3.
4. A n'est pas inversible si et seulement si k vaut 3 ou -3.

Inversibilité

Soient k un réel et A la matrice $\begin{pmatrix} k-1 & 2 & 2 \\ 2 & k-1 & 2 \\ 2 & 2 & k-1 \end{pmatrix}$.

1. A est inversible. **Faux**
2. A^2 est nulle. **Faux**
3. A est inversible si et seulement si k vaut 3 ou -3. **Faux**
4. A n'est pas inversible si et seulement si k vaut 3 ou -3. **Vrai**

produit matriciel

Formule

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{R})$ alors :

$$A \times B = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \text{ avec } c_{i,j} =$$

Application : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonale, dont les termes sont distincts deux à deux. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / X^2 = A$.

1. Montrer que $AX = XA$:
2. En déduire que X est diagonale :

produit matriciel

Formule

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{R})$ alors :

$$A \times B = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \text{ avec } c_{i,j} = \sum_{k=0}^{r} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

Application : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonale, dont les termes sont distincts deux à deux. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / X^2 = A$.

1. Montrer que $AX = XA$:
2. En déduire que X est diagonale :

produit matriciel

Formule

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{R})$ alors :

$$A \times B = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \text{ avec } c_{i,j} = \sum_{k=0}^{r} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

Application : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonale, dont les termes sont distincts deux à deux. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / X^2 = A$.

1. Montrer que $AX = XA$: $AX = X^2X = X^3 = XX^2 = XA$
2. En déduire que X est diagonale :

produit matriciel

Formule

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{R})$ alors :

$$A \times B = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \text{ avec } c_{i,j} = \sum_{k=0}^{r} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

Application : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonale, dont les termes sont distincts deux à deux. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / X^2 = A$.

1. Montrer que $AX = XA$: $AX = X^2X = X^3 = XX^2 = XA$
2. En déduire que X est diagonale :
   $$\forall i \neq j, c_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} a_{i,k}x_{k,j} = a_{i,i}x_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} x_{i,k}a_{k,j} = x_{i,j}a_{j,j}$$
   D'où $x_{i,j}(a_{i,i} - a_{j,j}) = 0 \Rightarrow x_{i,j} = 0$ car $a_{i,i} \neq a_{j,j}$

Produit matriciel (suite)

Soit $\overrightarrow{u} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{v} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
On note $X = \mathcal{M}_{Ba}(u)$ et $Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)$ où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Que vaut ${}^tX \cdot Y$?
2. Que vaut ${}^tX \cdot X$?
3. Que vaut $X \cdot {}^tY$?

Produit matriciel (suite)

Soit $\overrightarrow{u} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{v} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
On note $X = \mathcal{M}_{Ba}(u)$ et $Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)$ où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Que vaut ${}^tX \cdot Y$?

$$ {}^tX \cdot Y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} $$

2. Que vaut ${}^tX \cdot X$?

3. Que vaut $X \cdot {}^tY$?

Produit matriciel (suite)

Soit $\overrightarrow{u} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{v} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
On note $X = \mathcal{M}_{Ba}(u)$ et $Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)$ où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Que vaut ${}^tX \cdot Y$?
$$ {}^tX \cdot Y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} $$
2. Que vaut ${}^tX \cdot X$?
$$ {}^tX \cdot X = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \|u\|^2 $$
3. Que vaut $X \cdot {}^tY$?

Produit matriciel (suite)

Soit $\overrightarrow{u} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{v} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
On note $X = \mathcal{M}_{Ba}(u)$ et $Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)$ où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Que vaut ${}^tX \cdot Y$?
$$ {}^tX \cdot Y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} $$
2. Que vaut ${}^tX \cdot X$?
$$ {}^tX \cdot X = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \|u\|^2 $$
3. Que vaut $X \cdot {}^tY$?
$$ X \cdot {}^tY = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & \dots & x_2 y_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_n y_1 & \dots & x_n y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,; $$

Produit matriciel (suite)

Soit $\overrightarrow{u} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{v} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.
On note $X = \mathcal{M}_{Ba}(u)$ et $Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)$ où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Que vaut ${}^tX \cdot Y$?

$$ {}^tX \cdot Y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} $$

2. Que vaut ${}^tX \cdot X$?

$$ {}^tX \cdot X = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \|u\|^2 $$

3. Que vaut $X \cdot {}^tY$?

$$ X \cdot {}^tY = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & \dots & x_2 y_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ x_n y_1 & \dots & x_n y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \; ; \quad \text{Son rang vaut ?} $$

Produit matriciel (suite)

Soit $\overrightarrow{u} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\overrightarrow{v} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
On note $X = \mathcal{M}_{Ba}(u)$ et $Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)$ où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. Que vaut ${}^tX \cdot Y$?

$$ {}^tX \cdot Y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} $$

2. Que vaut ${}^tX \cdot X$?

$$ {}^tX \cdot X = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \|u\|^2 $$

3. Que vaut $X \cdot {}^tY$?

$$ X \cdot {}^tY = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \ldots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & \ldots & x_2 y_n \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ x_n y_1 & \ldots & x_n y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,; \quad \text{Son rang vaut ? } \mathbf{1} $$

Produit matriciel

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{et} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 9 \\ 0 & 2 \\ 4 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. A est inversible.
2. AB n'existe pas.
3. BA n'existe pas
4. AB est $\begin{pmatrix} 19 & 22 & 17 \end{pmatrix}$.

Produit matriciel

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{et} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 9 \\ 0 & 2 \\ 4 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. A est inversible. **Faux**
2. AB n'existe pas. **Faux**
3. BA n'existe pas **Vrai**
4. AB est $\begin{pmatrix} 19 & 22 & 17 \end{pmatrix}$. **Faux**

Table des matières

Les erreurs à éviter (Vrai/Faux)

1. Il existe des e.v. ne contenant que deux vecteurs ?
2. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{C}$-e.v. ? un $\mathbb{R}$-e.v. ?
3. $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E ?
4. Le ssev engendré par un système de vecteurs de rang r est de dimension r ?
5. Tout système de vecteurs qui engendre un e.v. E de dimension finie n comporte exactement n vecteurs ?

Les erreurs à éviter (Vrai/Faux)

1. Il existe des e.v. ne contenant que deux vecteurs ? **FAUX**
2. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{C}$-e.v. ? un $\mathbb{R}$-e.v. ?
3. $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E ?
4. Le ssev engendré par un système de vecteurs de rang r est de dimension r ?
5. Tout système de vecteurs qui engendre un e.v. E de dimension finie n comporte exactement n vecteurs ?

Les erreurs à éviter (Vrai/Faux)

1. Il existe des e.v. ne contenant que deux vecteurs ? **FAUX**
2. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{C}$-e.v. ? **FAUX** un $\mathbb{R}$-e.v. ?
3. $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E ?
4. Le ssev engendré par un système de vecteurs de rang r est de dimension r ?
5. Tout système de vecteurs qui engendre un e.v. E de dimension finie n comporte exactement n vecteurs ?

Les erreurs à éviter (Vrai/Faux)

1. Il existe des e.v. ne contenant que deux vecteurs ? **FAUX**
2. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{C}$-e.v. ? **FAUX** un $\mathbb{R}$-e.v. ? **VRAI**
3. $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E ?
4. Le ssev engendré par un système de vecteurs de rang r est de dimension r ?
5. Tout système de vecteurs qui engendre un e.v. E de dimension finie n comporte exactement n vecteurs ?

Les erreurs à éviter (Vrai/Faux)

1. Il existe des e.v. ne contenant que deux vecteurs ? **FAUX**
2. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{C}$-e.v. ? **FAUX** un $\mathbb{R}$-e.v. ? **VRAI**
3. $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E ? **VRAI**
4. Le ssev engendré par un système de vecteurs de rang r est de dimension r ?
5. Tout système de vecteurs qui engendre un e.v. E de dimension finie n comporte exactement n vecteurs ?

Les erreurs à éviter (Vrai/Faux)

1. Il existe des e.v. ne contenant que deux vecteurs ? **FAUX**
2. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{C}$-e.v. ? **FAUX** un $\mathbb{R}$-e.v. ? **VRAI**
3. $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E ? **VRAI**
4. Le ssev engendré par un système de vecteurs de rang r est de dimension r ? **VRAI**
5. Tout système de vecteurs qui engendre un e.v. E de dimension finie n comporte exactement n vecteurs ?

Les erreurs à éviter (Vrai/Faux)

1. Il existe des e.v. ne contenant que deux vecteurs ? **FAUX**
2. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{C}$-e.v. ? **FAUX** un $\mathbb{R}$-e.v. ? **VRAI**
3. $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E ? **VRAI**
4. Le ssev engendré par un système de vecteurs de rang r est de dimension r ? **VRAI**
5. Tout système de vecteurs qui engendre un e.v. E de dimension finie n comporte exactement n vecteurs ? **FAUX**

Les erreurs à éviter (Vrai/Faux) - suite

- Si u, v et w sont non colinéaires deux à deux, alors $\{u, v, w\}$ forment une famille libre ?
- Si F et G sont deux ssev d'un ev E, alors $F \cap G$, $F \cup G$ sont des ssev de E ?

Les erreurs à éviter (Vrai/Faux) - suite

- Si u, v et w sont non colinéaires deux à deux, alors $\{u, v, w\}$ forment une famille libre ? **FAUX**
- Si F et G sont deux ssev d'un ev E, alors $F \cap G$, $F \cup G$ sont des ssev de E ?

Les erreurs à éviter (Vrai/Faux) - suite

- Si u, v et w sont non colinéaires deux à deux, alors $\{u, v, w\}$ forment une famille libre ? **FAUX**
- Si F et G sont deux ssev d'un ev E, alors $F \cap G$, $F \cup G$ sont des ssev de E ? **VRAI, FAUX**

Espaces vectoriels

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{u} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v} = (1, 2, 1)$ deux vecteurs de E.
Soit $\overrightarrow{x} = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de E.

- $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une famille libre ?
- Donner une condition sur a, b et c pour que $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$:
- Application : Soit $A = (1, 0, 1)$. Equation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ défini par A et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Espaces vectoriels

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{u} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v} = (1, 2, 1)$ deux vecteurs de E.
Soit $\overrightarrow{x} = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de E.

- $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une famille libre ? **Oui**, car vecteurs non colinaires
- Donner une condition sur a, b et c pour que $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$:
- Application : Soit $A = (1, 0, 1)$. Equation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ défini par A et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Espaces vectoriels

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{u} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v} = (1, 2, 1)$ deux vecteurs de E.
Soit $\overrightarrow{x} = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de E.

- $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une famille libre ? **Oui**, car vecteurs non colinaires
- Donner une condition sur a, b et c pour que $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$:
- Application : Soit $A = (1, 0, 1)$. Equation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ défini par A et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Espaces vectoriels

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$ et $\overrightarrow{v} = (1,2,1)$ deux vecteurs de E.
Soit $\overrightarrow{x} = (a,b,c)$ un vecteur quelconque de E.

- $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une famille libre ? **Oui**, car vecteurs non colinaires
- Donner une condition sur a, b et c pour que $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\} &\Leftrightarrow \mathrm{rg}\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\} = 2 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & 2 & b\\ 0 & 1 & c\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & 1 & b-a\\ 0 & 1 & c\end{pmatrix} = 2 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & 1 & b-a\\ 0 & 0 & c-b+a\end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow a-b+c=0\end{aligned}$$

- Application : Soit $A = (1,0,1)$. Equation cartésienne du plan

Espaces vectoriels

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{u} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v} = (1, 2, 1)$ deux vecteurs de E.
Soit $\overrightarrow{x} = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de E.

- $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une famille libre ? **Oui**, car vecteurs non colinaires
- Donner une condition sur a, b et c pour que $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$:$a - b + c = 0$
- Application : Soit $A = (1, 0, 1)$. Equation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ défini par A et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Espaces vectoriels

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$ et $\overrightarrow{v} = (1,2,1)$ deux vecteurs de E.
Soit $\overrightarrow{x} = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de E.

- $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une famille libre ? **Oui**, car vecteurs non colinaires
- Donner une condition sur a, b et c pour que $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$:$a - b + c = 0$
- Application : Soit $A = (1,0,1)$. Equation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ défini par A et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Espaces vectoriels

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{u} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v} = (1, 2, 1)$ deux vecteurs de E.
Soit $\overrightarrow{x} = (a, b, c)$ un vecteur quelconque de E.

- $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ est une famille libre ? **Oui**, car vecteurs non colinaires
- Donner une condition sur a, b et c pour que $\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$:$a - b + c = 0$
- Application : Soit $A = (1, 0, 1)$. Equation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ défini par A et les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
  $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$
  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{x} = (x - 1, y, z - 1)$. D'où :
  $M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow (x - 1) - y + (z - 1) = 0 \Leftrightarrow z - y + z - 2 = 0$

Table des matières

Exploitation du rang : détermination de $\mathrm{Im} f$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\mathrm{rg}(f) =$
- Donner une base de l'image :
- Donner une équation cartésienne de $\mathrm{Im} f$:

Exploitation du rang : détermination de $\mathrm{Im} f$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\mathrm{rg}(f) = 2$ car $C_1 + C_2 = 2C_3$.
- Donner une base de l'image :
- Donner une équation cartésienne de $\mathrm{Im} f$:

Exploitation du rang : détermination de $\mathrm{Im} f$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\mathrm{rg}(f) = 2$ car $C_1 + C_2 = 2C_3$.
- Donner une base de l'image : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(-1,1,0),(0,1,1)\}$
- Donner une équation cartésienne de $\mathrm{Im} f$:

Exploitation du rang : détermination de $\mathrm{Im} f$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\mathrm{rg}(f) = 2$ car $C_1 + C_2 = 2C_3$.
- Donner une base de l'image : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(-1,1,0),(0,1,1)\}$
- Donner une équation cartésienne de $\mathrm{Im} f$:

  $$(x,y,z) \in \mathrm{Im} f \Leftrightarrow \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} = 2$$

Exploitation du rang : détermination de $\mathrm{Im} f$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\mathrm{rg}(f) = 2$ car $C_1 + C_2 = 2C_3$.
- Donner une base de l'image : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(-1,1,0),(0,1,1)\}$
- Donner une équation cartésienne de $\mathrm{Im} f$:

$$(x,y,z) \in \mathrm{Im} f \Leftrightarrow \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} = 2$$

Exploitation du rang : détermination de $\mathrm{Im} f$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\mathrm{rg}(f) = 2$ car $C_1 + C_2 = 2C_3$.
- Donner une base de l'image : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(-1,1,0),(0,1,1)\}$
- Donner une équation cartésienne de $\mathrm{Im} f$:

$$(x,y,z) \in \mathrm{Im} f \Leftrightarrow \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & x+y-z \end{pmatrix} = 2$$

Exploitation du rang : détermination de $\mathrm{Im} f$

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $\mathrm{rg}(f) = 2$ car $C_1 + C_2 = 2C_3$.
- Donner une base de l'image : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(-1,1,0),(0,1,1)\}$
- Donner une équation cartésienne de $\mathrm{Im} f$:

$(x,y,z) \in \mathrm{Im} f \Leftrightarrow \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow$

$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & x+y-z \end{pmatrix} = 2$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y-z=0\}}$

Rang, noyau et image

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ et dire si la juxtaposition de leurs bases est une base de $\mathbb{R}^2$.

- $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

- $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Rang, noyau et image

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ et dire si la juxtaposition de leurs bases est une base de $\mathbb{R}^2$.

- $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\mathrm{rg} A_1 = 1 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 1 = \dim(\mathrm{Ker} f)$
- $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Rang, noyau et image

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ et dire si la juxtaposition de leurs bases est une base de $\mathbb{R}^2$.

- $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\mathrm{rg} A_1 = 1 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 1 = \dim(\mathrm{Ker} f)$
  $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{(2, -1)\}$ car $2C_1 - C_2 = 0$.
  $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(1, 2)\}$;
- $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Rang, noyau et image

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ et dire si la juxtaposition de leurs bases est une base de $\mathbb{R}^2$.

- $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\mathrm{rg} A_1 = 1 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 1 = \dim(\mathrm{Ker} f)$
  $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{(2, -1)\}$ car $2C_1 - C_2 = 0$.
  $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(1, 2)\}$;La juxtaposition des bases est une base de $\mathbb{R}^2$
- $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Rang, noyau et image

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ et dire si la juxtaposition de leurs bases est une base de $\mathbb{R}^2$.

- $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\mathrm{rg} A_1 = 1 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 1 = \dim(\mathrm{Ker} f)$
  $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{(2, -1)\}$ car $2C_1 - C_2 = 0$.
  $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(1, 2)\}$;La juxtaposition des bases est une base de $\mathbb{R}^2$
- $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{rg} A_1 = 1 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 1 = \dim(\mathrm{Ker} f)$.

Rang, noyau et image

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ et dire si la juxtaposition de leurs bases est une base de $\mathbb{R}^2$.

- $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\mathrm{rg} A_1 = 1 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 1 = \dim(\mathrm{Ker} f)$
  $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{(2, -1)\}$ car $2C_1 - C_2 = 0$.
  $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(1, 2)\}$;La juxtaposition des bases est une base de $\mathbb{R}^2$
- $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{rg} A_1 = 1 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 1 = \dim(\mathrm{Ker} f)$.
  $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{e_2\}$ car $C_2 = 0$.
  $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(0, 1)\} = \mathrm{Vect}\{e_2\}$;

Rang, noyau et image

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ et dire si la juxtaposition de leurs bases est une base de $\mathbb{R}^2$.

- $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\mathrm{rg} A_1 = 1 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 1 = \dim(\mathrm{Ker} f)$
  $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{(2, -1)\}$ car $2C_1 - C_2 = 0$.
  $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(1, 2)\}$;La juxtaposition des bases est une base de $\mathbb{R}^2$
- $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\mathrm{rg} A_1 = 1 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 1 = \dim(\mathrm{Ker} f)$.
  $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{e_2\}$ car $C_2 = 0$.
  $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(0, 1)\} = \mathrm{Vect}\{e_2\}$;
  $e_2 \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$. La juxtaposition des bases n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

Rang, noyau et image (suite)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$. Leur juxtaposition est une base de $\mathbb{R}^3$?

- $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Rang, noyau et image (suite)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$. Leur juxtaposition est une base de $\mathbb{R}^3$?

- $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

  $\mathrm{rg} A_3 = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 2$; $\dim(\mathrm{Ker} f) = 1$

- $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Rang, noyau et image (suite)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$. Leur juxtaposition est une base de $\mathbb{R}^3$?

- $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

  $\mathrm{rg} A_3 = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 2$; $\dim(\mathrm{Ker} f) = 1$
  $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{(1,1,-1)\}$ car $C_1 + C_2 = C_3$.
  $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(1,1,0),(0,1,1)\}$;
- $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Rang, noyau et image (suite)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$. Leur juxtaposition est une base de $\mathbb{R}^3$?

- $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

  $\mathrm{rg} A_3 = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 2$; $\dim(\mathrm{Ker} f) = 1$

  $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{(1, 1, -1)\}$ car $C_1 + C_2 = C_3$.

  $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$; juxtaposition base de $\mathbb{R}^3$
- $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Rang, noyau et image (suite)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$. Leur juxtaposition est une base de $\mathbb{R}^3$?

- $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
  $\mathrm{rg} A_3 = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 2$;$\dim(\mathrm{Ker} f) = 1$
  $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{(1, 1, -1)\}$ car $C_1 + C_2 = C_3$.
  $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$; juxtaposition base de $\mathbb{R}^3$
- $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
  $\mathrm{rg} A_4 = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 2$;$\dim(\mathrm{Ker} f) = 1$.

Rang, noyau et image (suite)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$. Leur juxtaposition est une base de $\mathbb{R}^3$?

- $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
  $\mathrm{rg} A_3 = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 2$; $\dim(\mathrm{Ker} f) = 1$
  $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{(1,1,-1)\}$ car $C_1 + C_2 = C_3$.
  $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(1,1,0),(0,1,1)\}$; juxtaposition base de $\mathbb{R}^3$
- $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
  $\mathrm{rg} A_4 = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 2$; $\dim(\mathrm{Ker} f) = 1$.
  $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$ car $C_1 + C_2 + C_3 = 0$.
  $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(1,1,1),(2,-2,0)\}$;

Rang, noyau et image (suite)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$. Leur juxtaposition est une base de $\mathbb{R}^3$?

- $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
  $\mathrm{rg} A_3 = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 2$;$\dim(\mathrm{Ker} f) = 1$
  $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{(1, 1, -1)\}$ car $C_1 + C_2 = C_3$.
  $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$; juxtaposition base de $\mathbb{R}^3$
- $A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
  $\mathrm{rg} A_4 = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f) = 2$;$\dim(\mathrm{Ker} f) = 1$.
  $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 1)\}$ car $C_1 + C_2 + C_3 = 0$.
  $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}\{(1, 1, 1), (2, -2, 0)\}$;
  $(1, 1, 1) \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$. juxtaposition non base de $\mathbb{R}^3$.

Erreurs à ne pas commettre (Vrai/faux)

- $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est linéaire.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors 0_E est le seul vecteur de E dont l'image est nulle.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{R}$-e.v. Alors f injective $\Leftrightarrow$ f bijective.
- Soient $(f, g) \in \mathcal{L}^2(E) / \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g$ et $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g$. Alors $f = g$.
- $\mathrm{rg}(f + g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Erreurs à ne pas commettre (Vrai/faux)

- $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est linéaire. **FAUX**
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors 0_E est le seul vecteur de E dont l'image est nulle.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{R}$-e.v. Alors f injective $\Leftrightarrow$ f bijective.
- Soient $(f, g) \in \mathcal{L}^2(E)/\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g$ et $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g$. Alors $f = g$.
- $\mathrm{rg}(f + g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Erreurs à ne pas commettre (Vrai/faux)

- $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est linéaire. **FAUX**
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors 0_E est le seul vecteur de E dont l'image est nulle. **FAUX**, sauf si f est injective...
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{R}$-e.v. Alors f injective $\Leftrightarrow$ f bijective.
- Soient $(f, g) \in \mathcal{L}^2(E) / \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g$ et $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g$. Alors $f = g$.
- $\mathrm{rg}(f + g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Erreurs à ne pas commettre (Vrai/faux)

- $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est linéaire. **FAUX**
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors 0_E est le seul vecteur de E dont l'image est nulle. **FAUX**, sauf si f est injective...
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{R}$-e.v. Alors f injective $\Leftrightarrow$ f bijective. **FAUX**, sauf si $dim(E)$ est finie
- Soient $(f, g) \in \mathcal{L}^2(E)/\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g$ et $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g$. Alors $f = g$.
- $\mathrm{rg}(f + g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Erreurs à ne pas commettre (Vrai/faux)

- $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est linéaire. **FAUX**
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors 0_E est le seul vecteur de E dont l'image est nulle. **FAUX**, sauf si f est injective...
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{R}$-e.v. Alors f injective $\Leftrightarrow$ f bijective. **FAUX**, sauf si $dim(E)$ est finie
- Soient $(f, g) \in \mathcal{L}^2(E)/\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g$ et $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g$. Alors $f = g$. **FAUX** sinon tous les automorphismes de $\mathbb{R}^3$ seraient égaux...
- $\mathrm{rg}(f + g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Erreurs à ne pas commettre (Vrai/faux)

- $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est linéaire. **FAUX**
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors 0_E est le seul vecteur de E dont l'image est nulle. **FAUX**, sauf si f est injective...
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{R}$-e.v. Alors f injective $\Leftrightarrow$ f bijective. **FAUX**, sauf si $dim(E)$ est finie
- Soient $(f, g) \in \mathcal{L}^2(E)/\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g$ et $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} g$. Alors $f = g$. **FAUX** sinon tous les automorphismes de $\mathbb{R}^3$ seraient égaux...
- $\mathrm{rg}(f + g) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$. **FAUX**. Prendre $f = id_E$ et $g = -id_E$

Quelques réflexes...

- Soient E et F, 2 $\mathbb{R}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Que dire de f si :
  - $\mathrm{Ker} f = E$;
  - $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$;
  - $\mathrm{Im} f = \{0_E\}$;
  - $\mathrm{Im} f = F$;
- Que dire de l'image d'une base par une application linéaire :
  Injective : ; Surjective : ;
  Bijective :
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F 2 $\mathbb{R}$-ev de dim finie. Que peut-on dire de $\mathrm{rg}(f)$?
  Dans le cas f injective ?
  Dans le cas f surjective ?

Quelques réflexes...

- Soient E et F, 2 $\mathbb{R}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Que dire de f si :
  - $\mathrm{Ker} f = E$; f est l'application nulle
  - $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$;
  - $\mathrm{Im} f = \{0_E\}$;
  - $\mathrm{Im} f = F$;
- Que dire de l'image d'une base par une application linéaire :
  Injective : ; Surjective : ;
  Bijective :
- Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F 2 $\mathbb{R}$-ev de dim finie. Que peut-on dire de $\mathrm{rg}(f)$?
  Dans le cas f injective ?
  Dans le cas f surjective ?

Quelques réflexes...

- Soient E et F, 2 $\mathbb{R}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Que dire de f si :
  - $\mathrm{Ker} f = E$; f est l'application nulle
  - $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$; f est injective
  - $\mathrm{Im} f = \{0_E\}$;
  - $\mathrm{Im} f = F$;
- Que dire de l'image d'une base par une application linéaire :
  Injective : ; Surjective : ;
  Bijective :
- Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F 2 $\mathbb{R}$-ev de dim finie. Que peut-on dire de $\mathrm{rg}(f)$?
  Dans le cas f injective ?
  Dans le cas f surjective ?

Quelques réflexes...

- Soient E et F, 2 $\mathbb{R}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Que dire de f si :
  - $\mathrm{Ker} f = E$; f est l'application nulle
  - $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$; f est injective
  - $\mathrm{Im} f = \{0_E\}$; f est l'application nulle
  - $\mathrm{Im} f = F$;
- Que dire de l'image d'une base par une application linéaire :
  Injective : ; Surjective : ;
  Bijective :
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F 2 $\mathbb{R}$-ev de dim finie. Que peut-on dire de $\mathrm{rg}(f)$?
  Dans le cas f injective ?
  Dans le cas f surjective ?

Quelques réflexes...

- Soient E et F, 2 $\mathbb{R}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Que dire de f si :
  - $\mathrm{Ker} f = E$; f est l'application nulle
  - $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$; f est injective
  - $\mathrm{Im} f = \{0_E\}$; f est l'application nulle
  - $\mathrm{Im} f = F$; f est surjective
- Que dire de l'image d'une base par une application linéaire :
  Injective : ; Surjective : ;
  Bijective :
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F 2 $\mathbb{R}$-ev de dim finie. Que peut-on dire de $\mathrm{rg}(f)$?
  Dans le cas f injective ?
  Dans le cas f surjective ?

Quelques réflexes...

- Soient E et F, 2 $\mathbb{R}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Que dire de f si :
  - $\mathrm{Ker} f = E$; f est l'application nulle
  - $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$; f est injective
  - $\mathrm{Im} f = \{0_E\}$; f est l'application nulle
  - $\mathrm{Im} f = F$; f est surjective
- Que dire de l'image d'une base par une application linéaire :
  Injective : Famille libre ; Surjective : ;
  Bijective :
- Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F 2 $\mathbb{R}$-ev de dim finie. Que peut-on dire de $\mathrm{rg}(f)$?
  Dans le cas f injective ?
  Dans le cas f surjective ?

Quelques réflexes...

- Soient E et F, 2 $\mathbb{R}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Que dire de f si :
  - $\mathrm{Ker} f = E$; f est l'application nulle
  - $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$; f est injective
  - $\mathrm{Im} f = \{0_E\}$; f est l'application nulle
  - $\mathrm{Im} f = F$; f est surjective
- Que dire de l'image d'une base par une application linéaire :
  Injective : Famille libre ; Surjective : Famille génératrice ;
  Bijective :
- Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F 2 $\mathbb{R}$-ev de dim finie. Que peut-on dire de $\mathrm{rg}(f)$?
  Dans le cas f injective ?
  Dans le cas f surjective ?

Quelques réflexes...

- Soient E et F, 2 $\mathbb{R}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Que dire de f si :
  - $\mathrm{Ker} f = E$; f est l'application nulle
  - $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$; f est injective
  - $\mathrm{Im} f = \{0_E\}$; f est l'application nulle
  - $\mathrm{Im} f = F$; f est surjective
- Que dire de l'image d'une base par une application linéaire :
  Injective : Famille libre ; Surjective : Famille génératrice ;
  Bijective : c'est une base
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F 2 $\mathbb{R}$-ev de dim finie. Que peut-on dire de $\mathrm{rg}(f)$?
  Dans le cas f injective ?
  Dans le cas f surjective ?

Quelques réflexes...

- Soient E et F, 2 $\mathbb{R}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Que dire de f si :
  - $\mathrm{Ker} f = E$; f est l'application nulle
  - $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$; f est injective
  - $\mathrm{Im} f = \{0_E\}$; f est l'application nulle
  - $\mathrm{Im} f = F$; f est surjective
- Que dire de l'image d'une base par une application linéaire : Injective : Famille libre ; Surjective : Famille génératrice ; Bijective : c'est une base
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F 2 $\mathbb{R}$-ev de dim finie. Que peut-on dire de $\mathrm{rg}(f)$? $\mathrm{rg}(f) \leq inf\{\dim(E), \dim(F)\}$;
  Dans le cas f injective ?
  Dans le cas f surjective ?

Quelques réflexes...

- Soient E et F, 2 $\mathbb{R}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Que dire de f si :
  - $\mathrm{Ker} f = E$; f est l'application nulle
  - $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$; f est injective
  - $\mathrm{Im} f = \{0_E\}$; f est l'application nulle
  - $\mathrm{Im} f = F$; f est surjective
- Que dire de l'image d'une base par une application linéaire :
  Injective : Famille libre ; Surjective : Famille génératrice ;
  Bijective : c'est une base
- Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F 2 $\mathbb{R}$-ev de dim finie. Que peut-on dire de $\mathrm{rg}(f)$? $\mathrm{rg}(f) \leq inf\{\dim(E), \dim(F)\}$;
  Dans le cas f injective ? $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$;
  Dans le cas f surjective ?

Quelques réflexes...

- Soient E et F, 2 $\mathbb{R}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Que dire de f si :
  - $\mathrm{Ker} f = E$; f est l'application nulle
  - $\mathrm{Ker} f = \{0_E\}$; f est injective
  - $\mathrm{Im} f = \{0_E\}$; f est l'application nulle
  - $\mathrm{Im} f = F$; f est surjective
- Que dire de l'image d'une base par une application linéaire :
  Injective : Famille libre ; Surjective : Famille génératrice ;
  Bijective : c'est une base
- Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F 2 $\mathbb{R}$-ev de dim finie. Que peut-on dire de $\mathrm{rg}(f)$? $\mathrm{rg}(f) \leq inf\{\dim(E), \dim(F)\}$;
  Dans le cas f injective ? $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$;
  Dans le cas f surjective ? $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$;

Quelques réflexes (suite)

1. Donner la forme générale des applications linéaires :
   - de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:
   - de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$:
   - de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$:
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$:
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$:
4. En déduire que $\boxed{\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathit{inf}\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}}$:

Quelques réflexes (suite)

1. Donner la forme générale des applications linéaires :
   - de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: $f : (x, y) \longmapsto (ax + by, cx + dy)$
   - de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$:
   - de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$:
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$:
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$:
4. En déduire que $\boxed{\mathrm{rg}(g \circ f) \leq inf\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}}$:

Quelques réflexes (suite)

1. Donner la forme générale des applications linéaires :
   - de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: $f : (x, y) \longmapsto (ax + by, cx + dy)$
   - de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$: $f : (x, y, z) \longmapsto ax + by + cz$
   - de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$:
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$:
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$:
4. En déduire que $\boxed{\mathrm{rg}(g \circ f) \leq inf\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}}$:

Quelques réflexes (suite)

1. Donner la forme générale des applications linéaires :
   - de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: $f : (x, y) \longmapsto (ax + by, cx + dy)$
   - de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$: $f : (x, y, z) \longmapsto ax + by + cz$
   - de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$: $f : x \longmapsto (ax, bx, cx)$
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$:
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$:
4. En déduire que $\boxed{\mathrm{rg}(g \circ f) \leq inf\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}}$:

Quelques réflexes (suite)

1. Donner la forme générale des applications linéaires :
   - de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: $f : (x, y) \longmapsto (ax + by, cx + dy)$
   - de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$: $f : (x, y, z) \longmapsto ax + by + cz$
   - de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$: $f : x \longmapsto (ax, bx, cx)$
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$:
$$y \in \mathrm{Im}(g \circ f) \Rightarrow \exists x \in E / y = g[f(x)]$$
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$:
4. En déduire que $\boxed{\mathrm{rg}(g \circ f) \leq inf\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}}$:

Quelques réflexes (suite)

1. Donner la forme générale des applications linéaires :
   - de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: $f : (x, y) \longmapsto (ax + by, cx + dy)$
   - de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$: $f : (x, y, z) \longmapsto ax + by + cz$
   - de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$: $f : x \longmapsto (ax, bx, cx)$
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$:
$$y \in \mathrm{Im}(g \circ f) \Rightarrow \exists x \in E / y = g[f(x)]$$
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$:
$$x \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g[f(x)] = g(0) = 0$$
4. En déduire que $\boxed{\mathrm{rg}(g \circ f) \leq inf\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}}$:

Quelques réflexes (suite)

1. Donner la forme générale des applications linéaires :
   - de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: $f : (x, y) \longmapsto (ax + by, cx + dy)$
   - de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$: $f : (x, y, z) \longmapsto ax + by + cz$
   - de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$: $f : x \longmapsto (ax, bx, cx)$
2. Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$:
$$y \in \mathrm{Im}(g \circ f) \Rightarrow \exists x \in E / y = g[f(x)]$$
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$:
$$x \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow g[f(x)] = g(0) = 0$$
4. En déduire que $\boxed{\mathrm{rg}(g \circ f) \leq inf\{\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\}}$:
   $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(g)$ d'après (2)
   $\dim[\mathrm{Ker}(f)] \leq \dim[\mathrm{Ker}(g \circ f)]$ d'après (3)
   $\Rightarrow \mathrm{rg}(f) \geq \mathrm{rg}(g \circ f)$; d'où la conclusion

Table des matières

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}^n$

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base canonique et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ une nouvelle base de E avec : $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (-1, 1)$.
v est donné dans la base $\mathcal{B}$. Donner ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$:

1. $v_1 = (1, 1)_{\mathcal{B}} =$
2. $v_2 = (-1, 1)_{\mathcal{B}} =$
3. $v_3 = (1, 0)_{\mathcal{B}} =$
4. $v_4 = (0, 1)_{\mathcal{B}} =$
5. $v_5 = (a, b)_{\mathcal{B}} =$

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}^n$

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base canonique et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ une nouvelle base de E avec : $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (-1, 1)$.

v est donné dans la base $\mathcal{B}$. Donner ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$:

1. $v_1 = (1, 1)_{\mathcal{B}} = (1, 0)_{B'}$
2. $v_2 = (-1, 1)_{\mathcal{B}} =$
3. $v_3 = (1, 0)_{\mathcal{B}} =$
4. $v_4 = (0, 1)_{\mathcal{B}} =$
5. $v_5 = (a, b)_{\mathcal{B}} =$

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}^n$

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base canonique et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ une nouvelle base de E avec : $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (-1, 1)$.

v est donné dans la base $\mathcal{B}$. Donner ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$:

1. $v_1 = (1, 1)_{\mathcal{B}} = (1, 0)_{B'}$
2. $v_2 = (-1, 1)_{\mathcal{B}} = (0, 1)_{B'}$
3. $v_3 = (1, 0)_{\mathcal{B}} =$
4. $v_4 = (0, 1)_{\mathcal{B}} =$
5. $v_5 = (a, b)_{\mathcal{B}} =$

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}^n$

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base canonique et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ une nouvelle base de E avec : $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (-1, 1)$.

v est donné dans la base $\mathcal{B}$. Donner ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$:

1. $v_1 = (1, 1)_{\mathcal{B}} = (1, 0)_{B'}$
2. $v_2 = (-1, 1)_{\mathcal{B}} = (0, 1)_{B'}$
3. $v_3 = (1, 0)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(1, -1)_{B'}$
4. $v_4 = (0, 1)_{\mathcal{B}} =$
5. $v_5 = (a, b)_{\mathcal{B}} =$

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}^n$

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base canonique et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ une nouvelle base de E avec : $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (-1, 1)$.

v est donné dans la base $\mathcal{B}$. Donner ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$:

1. $v_1 = (1, 1)_{\mathcal{B}} = (1, 0)_{B'}$
2. $v_2 = (-1, 1)_{\mathcal{B}} = (0, 1)_{B'}$
3. $v_3 = (1, 0)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(1, -1)_{B'}$
4. $v_4 = (0, 1)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(1, 1)_{B'}$
5. $v_5 = (a, b)_{\mathcal{B}} =$

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}^n$

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base canonique et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ une nouvelle base de E avec : $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (-1, 1)$.

v est donné dans la base $\mathcal{B}$. Donner ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$:

1. $v_1 = (1, 1)_{\mathcal{B}} = (1, 0)_{B'}$
2. $v_2 = (-1, 1)_{\mathcal{B}} = (0, 1)_{B'}$
3. $v_3 = (1, 0)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(1, -1)_{B'}$
4. $v_4 = (0, 1)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(1, 1)_{B'}$
5. $v_5 = (a, b)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(a + b, -a + b)_{B'}$

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}^n$

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base canonique et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ une nouvelle base de E avec : $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (-1, 1)$.

v est donné dans la base $\mathcal{B}$. Donner ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$:

1. $v_1 = (1, 1)_{\mathcal{B}} = (1, 0)_{B'}$
2. $v_2 = (-1, 1)_{\mathcal{B}} = (0, 1)_{B'}$
3. $v_3 = (1, 0)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(1, -1)_{B'}$
4. $v_4 = (0, 1)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(1, 1)_{B'}$
5. $v_5 = (a, b)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(a + b, -a + b)_{B'}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $PX_i' = X_i$ où $X_i' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v_i)$ et $X_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_i)$

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}^n$

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base canonique et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ une nouvelle base de E avec : $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (-1, 1)$.
v est donné dans la base $\mathcal{B}$. Donner ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$:

1. $v_1 = (1, 1)_{\mathcal{B}} = (1, 0)_{B'}$
2. $v_2 = (-1, 1)_{\mathcal{B}} = (0, 1)_{B'}$
3. $v_3 = (1, 0)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(1, -1)_{B'}$
4. $v_4 = (0, 1)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(1, 1)_{B'}$
5. $v_5 = (a, b)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(a + b, -a + b)_{B'}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $PX_i' = X_i$ où $X_i' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v_i)$ et $X_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_i)$

Alors $P^{-1} =$

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}^n$

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base canonique et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ une nouvelle base de E avec : $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (-1, 1)$.

v est donné dans la base $\mathcal{B}$. Donner ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$:

1. $v_1 = (1, 1)_{\mathcal{B}} = (1, 0)_{B'}$
2. $v_2 = (-1, 1)_{\mathcal{B}} = (0, 1)_{B'}$
3. $v_3 = (1, 0)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(1, -1)_{B'}$
4. $v_4 = (0, 1)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(1, 1)_{B'}$
5. $v_5 = (a, b)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(a + b, -a + b)_{B'}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $PX_i' = X_i$ où $X_i' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v_i)$ et $X_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_i)$

Alors $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où :

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}^n$

Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base canonique et $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ une nouvelle base de E avec : $u_1 = (1,1)$ et $u_2 = (-1,1)$.

v est donné dans la base $\mathcal{B}$. Donner ses coordonnées dans $\mathcal{B}'$:

1. $v_1 = (1,1)_{\mathcal{B}} = (1,0)_{B'}$
2. $v_2 = (-1,1)_{\mathcal{B}} = (0,1)_{B'}$
3. $v_3 = (1,0)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(1,-1)_{B'}$
4. $v_4 = (0,1)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(1,1)_{B'}$
5. $v_5 = (a,b)_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}(a+b,-a+b)_{B'}$

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $PX_i' = X_i$ où $X_i' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v_i)$ et $X_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_i)$

Alors $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. D'où : $X_1' = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$X_2' = P^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $X_5' = P^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+b \\ -a+b \end{pmatrix}$

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, Q_2)$ une nouvelle base de E avec : $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$ et $Q_2 = X(X-1)$.

$P = \mathcal{P}ass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') =$; $P^{-1} =$

Soient $P_1 = X^2$, $P_2 = X^2 + 3X$ et $P_3 = 1 + X + X^2$.
Donnez leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et dans la base $\mathcal{B}'$:
On note $Y_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P_i)$ et $Y_i' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(P_i)$. Alors :

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, Q_2)$ une nouvelle base de E avec : $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$ et $Q_2 = X(X-1)$.

$$P = \mathcal{P}ass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; P^{-1} =$$

Soient $P_1 = X^2$, $P_2 = X^2 + 3X$ et $P_3 = 1 + X + X^2$.

Donnez leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et dans la base $\mathcal{B}'$:

On note $Y_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P_i)$ et $Y_i' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(P_i)$. Alors :

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, Q_2)$ une nouvelle base de E avec : $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$ et $Q_2 = X(X-1)$.

$$P = \mathcal{P}ass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \; P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soient $P_1 = X^2$, $P_2 = X^2 + 3X$ et $P_3 = 1 + X + X^2$.

Donnez leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et dans la base $\mathcal{B}'$:

On note $Y_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P_i)$ et $Y_i' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(P_i)$. Alors :

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, Q_2)$ une nouvelle base de E avec : $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$ et $Q_2 = X(X-1)$.

$$P = \mathcal{P}ass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soient $P_1 = X^2$, $P_2 = X^2 + 3X$ et $P_3 = 1 + X + X^2$.

Donnez leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et dans la base $\mathcal{B}'$:

On note $Y_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P_i)$ et $Y'_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(P_i)$. Alors :$Y_i = PY'_i$

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, Q_2)$ une nouvelle base de E avec : $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$ et $Q_2 = X(X-1)$.

$$P = \mathcal{P}ass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \; P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soient $P_1 = X^2$, $P_2 = X^2 + 3X$ et $P_3 = 1 + X + X^2$.

Donnez leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et dans la base $\mathcal{B}'$:

On note $Y_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P_i)$ et $Y_i' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(P_i)$. Alors : $Y_i = PY_i'$

$Y_1 =$

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, Q_2)$ une nouvelle base de E avec : $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$ et $Q_2 = X(X-1)$.

$$P = \mathcal{P}ass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \; P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soient $P_1 = X^2$, $P_2 = X^2 + 3X$ et $P_3 = 1 + X + X^2$.

Donnez leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et dans la base $\mathcal{B}'$:

On note $Y_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P_i)$ et $Y_i' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(P_i)$. Alors : $Y_i = PY_i'$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } Y_1' =$$

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, Q_2)$ une nouvelle base de E avec : $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$ et $Q_2 = X(X-1)$.

$$P = \mathcal{P}ass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \; P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soient $P_1 = X^2$, $P_2 = X^2 + 3X$ et $P_3 = 1 + X + X^2$.

Donnez leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et dans la base $\mathcal{B}'$:

On note $Y_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P_i)$ et $Y_i' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(P_i)$. Alors :$Y_i = PY_i'$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } Y_1' = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, Q_2)$ une nouvelle base de E avec : $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$ et $Q_2 = X(X-1)$.

$$P = \mathcal{P}ass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \; P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soient $P_1 = X^2$, $P_2 = X^2 + 3X$ et $P_3 = 1 + X + X^2$.

Donnez leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et dans la base $\mathcal{B}'$:

On note $Y_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P_i)$ et $Y_i' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(P_i)$. Alors :$Y_i = PY_i'$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } Y_1' = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $P_1 = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}} = (0, 1, 1)_{\mathcal{B}'}$ ou encore :
$P_1(X) = X^2 = X + X(X-1)$

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, Q_2)$ une nouvelle base de E avec : $Q_0 = 1$, $Q_1 = X$ et $Q_2 = X(X-1)$.

$$P = \mathcal{P}ass(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \; P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soient $P_1 = X^2$, $P_2 = X^2 + 3X$ et $P_3 = 1 + X + X^2$.

Donnez leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et dans la base $\mathcal{B}'$:

On note $Y_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(P_i)$ et $Y_i' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(P_i)$. Alors :$Y_i = PY_i'$

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } Y_1' = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $P_1 = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}} = (0, 1, 1)_{\mathcal{B}'}$ ou encore :

$P_1(X) = X^2 = X + X(X-1)$

(On retrouve en particulier $n^2 = n(n-1) + n$...)

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$ (Suite...)

$P_2 = X^2 + 3X$ donc

$P_3 = 1 + X + X^2$ donc

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$ (Suite...)

$P_2 = X^2 + 3X$ donc $Y_2 =$

$P_3 = 1 + X + X^2$ donc

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$ (Suite...)

$P_2 = X^2 + 3X$ donc $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $Y_2' =$

$P_3 = 1 + X + X^2$ donc

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$ (Suite...)

$$P_2 = X^2 + 3X \text{ donc } Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } Y_2' = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$P_3 = 1 + X + X^2$ donc

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$ (Suite...)

$$P_2 = X^2 + 3X \text{ donc } Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } Y_2' = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $P_2 = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}} = (0, 4, 1)_{\mathcal{B}'}$ ou encore :
$P_2(X) = 3X + X^2 = 4X + X(X - 1)$

$P_3 = 1 + X + X^2$ donc

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$ (Suite...)

$P_2 = X^2 + 3X$ donc $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $Y_2' = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $P_2 = (0,0,1)_{\mathcal{B}} = (0,4,1)_{\mathcal{B}'}$ ou encore :
$P_2(X) = 3X + X^2 = 4X + X(X-1)$

$P_3 = 1 + X + X^2$ donc $Y_3 =$

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$ (Suite...)

$$P_2 = X^2 + 3X \text{ donc } Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } Y_2' = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $P_2 = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}} = (0, 4, 1)_{\mathcal{B}'}$ ou encore :
$P_2(X) = 3X + X^2 = 4X + X(X-1)$

$$P_3 = 1 + X + X^2 \text{ donc } Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } Y_3' =$$

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$ (Suite...)

$$P_2 = X^2 + 3X \text{ donc } Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } Y_2' = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $P_2 = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}} = (0, 4, 1)_{\mathcal{B}'}$ ou encore :
$P_2(X) = 3X + X^2 = 4X + X(X-1)$

$$P_3 = 1 + X + X^2 \text{ donc } Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } Y_3' = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$ (Suite...)

$$P_2 = X^2 + 3X \text{ donc } Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } Y_2' = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $P_2 = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}} = (0, 4, 1)_{\mathcal{B}'}$ ou encore :
$P_2(X) = 3X + X^2 = 4X + X(X - 1)$

$$P_3 = 1 + X + X^2 \text{ donc } Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } Y_3' = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $P_3 = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}} = (1, 2, 1)_{\mathcal{B}'}$ ou encore :
$P_3(X) = 1 + X + X^2 = 1 + 2X + X(X - 1)$

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$ (Suite...)

$$P_2 = X^2 + 3X \text{ donc } Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } Y_2' = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $P_2 = (0,0,1)_{\mathcal{B}} = (0,4,1)_{\mathcal{B}'}$ ou encore :
$P_2(X) = 3X + X^2 = 4X + X(X-1)$

$$P_3 = 1 + X + X^2 \text{ donc } Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } Y_3' = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $P_3 = (1,1,1)_{\mathcal{B}} = (1,2,1)_{\mathcal{B}'}$ ou encore :
$P_3(X) = 1 + X + X^2 = 1 + 2X + X(X-1)$

Nature de $\sum \dfrac{1+n+n^2}{3^n}$:

Vecteurs et changements de base dans $\mathbb{R}_n[X]$ (Suite...)

$P_2 = X^2 + 3X$ donc $Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $Y_2' = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $P_2 = (0,0,1)_{\mathcal{B}} = (0,4,1)_{\mathcal{B}'}$ ou encore :
$P_2(X) = 3X + X^2 = 4X + X(X-1)$

$P_3 = 1 + X + X^2$ donc $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y_3' = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $P_3 = (1,1,1)_{\mathcal{B}} = (1,2,1)_{\mathcal{B}'}$ ou encore :
$P_3(X) = 1 + X + X^2 = 1 + 2X + X(X-1)$

Nature de $\sum \dfrac{1+n+n^2}{3^n}$:Série convergente car

$$\frac{1+n+n^2}{3^n} = (1 + 2n + n(n-1))\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Changement de bases et applications linéaires

$E = \mathbb{R}^2$, $E_1 = \mathrm{Vect}\{(1,1)\}$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\{(-1,1)\}$.
Soit p projection sur E_1 dans la direction de E_2. Exprimer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(p) = A' =$$

Exprimer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ en utilisant les formules de changement de base :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p) = A =$$

Changement de bases et applications linéaires

$E = \mathbb{R}^2$, $E_1 = \mathrm{Vect}\{(1,1)\}$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\{(-1,1)\}$.
Soit p projection sur E_1 dans la direction de E_2. Exprimer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}'$:
$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(p) = A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Exprimer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ en utilisant les formules de changement de base :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p) = A =$$

Changement de bases et applications linéaires

$E = \mathbb{R}^2$, $E_1 = \mathrm{Vect}\{(1,1)\}$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\{(-1,1)\}$.
Soit p projection sur E_1 dans la direction de E_2. Exprimer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}'$:

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(p) = A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exprimer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ en utilisant les formules de changement de base :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p) = A = PA'P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Changement de bases et applications linéaires (suite...)

Déterminer $p(v)$ dans la base $\mathcal{B}$ pour $v_1 = (1,1)_{\mathcal{B}}$, $v_2 = (0,1)_{\mathcal{B}}$, $v_3 = (0,1)_{\mathcal{B}'}$ et $v_4 = (2,-1)_{\mathcal{B}'}$:

$p(v_1)$?

$p(v_2)$?

$p(v_3)$?

$p(v_4)$?

Changement de bases et applications linéaires (suite...)

Déterminer $p(v)$ dans la base $\mathcal{B}$ pour $v_1 = (1,1)_{\mathcal{B}}$, $v_2 = (0,1)_{\mathcal{B}}$, $v_3 = (0,1)_{\mathcal{B}'}$ et $v_4 = (2,-1)_{\mathcal{B}'}$:

$p(v_1)$? $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_1) = A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$

$p(v_2)$?

$p(v_3)$?

$p(v_4)$?

Changement de bases et applications linéaires (suite...)

Déterminer $p(v)$ dans la base $\mathcal{B}$ pour $v_1 = (1,1)_{\mathcal{B}}$, $v_2 = (0,1)_{\mathcal{B}}$, $v_3 = (0,1)_{\mathcal{B}'}$ et $v_4 = (2,-1)_{\mathcal{B}'}$:

$p(v_1)$? $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_1) = A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow p(v_1) = (1,1)_{\mathcal{B}}$

$p(v_2)$?

$p(v_3)$?

$p(v_4)$?

Changement de bases et applications linéaires (suite...)

Déterminer $p(v)$ dans la base $\mathcal{B}$ pour $v_1 = (1,1)_{\mathcal{B}}$, $v_2 = (0,1)_{\mathcal{B}}$, $v_3 = (0,1)_{\mathcal{B}'}$ et $v_4 = (2,-1)_{\mathcal{B}'}$:

$p(v_1)$? $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p(v_1) = (1,1)_{\mathcal{B}}$

$p(v_2)$? $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_2) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$p(v_3)$?

$p(v_4)$?

Changement de bases et applications linéaires (suite...)

Déterminer $p(v)$ dans la base $\mathcal{B}$ pour $v_1 = (1,1)_{\mathcal{B}}$, $v_2 = (0,1)_{\mathcal{B}}$, $v_3 = (0,1)_{\mathcal{B}'}$ et $v_4 = (2,-1)_{\mathcal{B}'}$:

$p(v_1)$? $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p(v_1) = (1,1)_{\mathcal{B}}$

$p(v_2)$? $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_2) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p(v_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\mathcal{B}}$

$p(v_3)$?

$p(v_4)$?

Changement de bases et applications linéaires (suite...)

Déterminer $p(v)$ dans la base $\mathcal{B}$ pour $v_1 = (1,1)_{\mathcal{B}}$, $v_2 = (0,1)_{\mathcal{B}}$, $v_3 = (0,1)_{\mathcal{B}'}$ et $v_4 = (2,-1)_{\mathcal{B}'}$:

$p(v_1)$? $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p(v_1) = (1,1)_{\mathcal{B}}$

$p(v_2)$? $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_2) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p(v_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})_{\mathcal{B}}$

$p(v_3)$?

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v_3) = A' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$p(v_4)$?

Changement de bases et applications linéaires (suite...)

Déterminer $p(v)$ dans la base $\mathcal{B}$ pour $v_1 = (1,1)_{\mathcal{B}}$, $v_2 = (0,1)_{\mathcal{B}}$, $v_3 = (0,1)_{\mathcal{B}'}$ et $v_4 = (2,-1)_{\mathcal{B}'}$:

$p(v_1)$? $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_1) = A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow p(v_1) = (1,1)_{\mathcal{B}}$

$p(v_2)$? $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_2) = A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow p(v_2) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})_{\mathcal{B}}$

$p(v_3)$?

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v_3) = A'\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow p(v_3) = (0,0)_{\mathcal{B}'} = (0,0)_{\mathcal{B}}$$

$p(v_4)$?

Changement de bases et applications linéaires (suite...)

Déterminer $p(v)$ dans la base $\mathcal{B}$ pour $v_1 = (1,1)_{\mathcal{B}}$, $v_2 = (0,1)_{\mathcal{B}}$, $v_3 = (0,1)_{\mathcal{B}'}$ et $v_4 = (2,-1)_{\mathcal{B}'}$:

$p(v_1)$? $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_1) = A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow p(v_1) = (1,1)_{\mathcal{B}}$

$p(v_2)$? $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_2) = A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow p(v_2) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})_{\mathcal{B}}$

$p(v_3)$?

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v_3) = A'\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow p(v_3) = (0,0)_{\mathcal{B}'} = (0,0)_{\mathcal{B}}$

$p(v_4)$? $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v_4) = A'\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$

Changement de bases et applications linéaires (suite...)

Déterminer $p(v)$ dans la base $\mathcal{B}$ pour $v_1 = (1,1)_{\mathcal{B}}$, $v_2 = (0,1)_{\mathcal{B}}$, $v_3 = (0,1)_{\mathcal{B}'}$ et $v_4 = (2,-1)_{\mathcal{B}'}$:

$p(v_1)$? $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_1) = A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow p(v_1) = (1,1)_{\mathcal{B}}$

$p(v_2)$? $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_2) = A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow p(v_2) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})_{\mathcal{B}}$

$p(v_3)$?

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v_3) = A'\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow p(v_3) = (0,0)_{\mathcal{B}'} = (0,0)_{\mathcal{B}}$

$p(v_4)$? $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v_4) = A'\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow p(v_4) = (2,0)_{\mathcal{B}'}$

Changement de bases et applications linéaires (suite...)

Déterminer $p(v)$ dans la base $\mathcal{B}$ pour $v_1 = (1,1)_{\mathcal{B}}$, $v_2 = (0,1)_{\mathcal{B}}$, $v_3 = (0,1)_{\mathcal{B}'}$ et $v_4 = (2,-1)_{\mathcal{B}'}$:

$p(v_1)$? $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_1) = A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow p(v_1) = (1,1)_{\mathcal{B}}$

$p(v_2)$? $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v_2) = A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow p(v_2) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})_{\mathcal{B}}$

$p(v_3)$?

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v_3) = A'\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow p(v_3) = (0,0)_{\mathcal{B}'} = (0,0)_{\mathcal{B}}$

$p(v_4)$? $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(p)\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v_4) = A'\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} \Rightarrow p(v_4) = (2,0)_{\mathcal{B}'}$

Or $P\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ donc $p(v_4) = (2,2)_{\mathcal{B}}$

Un exemple concret...

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Calculer A^2 et A^3 :

2. A inversible ?
3. Déterminer $u \in \mathbb{R}^3 / f^2(u) \neq 0$:
   Mq $\mathcal{B}' = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

Un exemple concret...

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Calculer A^2 et A^3 : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
2. A inversible ?
3. Déterminer $u \in \mathbb{R}^3 / f^2(u) \neq 0$:
   Mq $\mathcal{B}' = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

Un exemple concret...

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Calculer A^2 et A^3 : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$
2. A inversible ?
3. Déterminer $u \in \mathbb{R}^3 / f^2(u) \neq 0$:
   Mq $\mathcal{B}' = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

Un exemple concret...

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Calculer A^2 et A^3 : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$
2. A inversible ? **Non**, car sinon $A^2 = A^{-1}A^3 = A^{-1}0 = 0$.
3. Déterminer $u \in \mathbb{R}^3 / f^2(u) \neq 0$:
   Mq $\mathcal{B}' = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

Un exemple concret...

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Calculer A^2 et A^3 : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$
2. A inversible ?**Non**, car sinon $A^2 = A^{-1}A^3 = A^{-1}0 = 0$.
3. Déterminer $u \in \mathbb{R}^3 / f^2(u) \neq 0$: Il suffit de prendre $\boxed{u = e_2}$
   Mq $\mathcal{B}' = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

Un exemple concret...

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Calculer A^2 et A^3 : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$
2. A inversible ?**Non**, car sinon $A^2 = A^{-1}A^3 = A^{-1}0 = 0$.
3. Déterminer $u \in \mathbb{R}^3 / f^2(u) \neq 0$: Il suffit de prendre $\boxed{u = e_2}$
   Mq $\mathcal{B}' = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$:
   C'est une famille de bon cardinal (3) et libre.

Un exemple concret...

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Calculer A^2 et A^3 : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 0$
2. A inversible ?**Non**, car sinon $A^2 = A^{-1}A^3 = A^{-1}0 = 0$.
3. Déterminer $u \in \mathbb{R}^3 / f^2(u) \neq 0$: Il suffit de prendre $\boxed{u = e_2}$
   Mq $\mathcal{B}' = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$:
   C'est une famille de bon cardinal (3) et libre.
   En effet, $\lambda_1 u + \lambda_2 f(u) + \lambda_3 f^2(u) = 0 \Rightarrow \lambda_1 f^2(u) = 0$ en composant de chaque côté par f^2 avec $f^3 = f^4 = 0$.
   Or $f^2(u) \neq 0$ donc $\lambda_1 = 0$.
   En composant ensuite par f on obtient $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$

Un exemple concret...(suite)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.
On a mq $\mathcal{B}' = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ où $u = e_2$.

1. Exprimer $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$:
2. Relation matricielle entre A et A' ?

Un exemple concret...(suite)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

On a mq $\mathcal{B}' = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ où $u = e_2$.

1. Exprimer $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$: $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. Relation matricielle entre A et A' ?

Un exemple concret...(suite)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

On a mq $\mathcal{B}' = (u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ où $u = e_2$.

1. Exprimer $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$: $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. Relation matricielle entre A et A' ? $\boxed{A' = P^{-1}AP}$

Table des matières

Réduction d'endomorphismes

- Soient $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
  - $\mathrm{Sp}(A) =$; $f = 2id$? ; A est diagonalisable ? .
  - $\mathrm{Sp}(B) =$; $g = 2id$? ; B est diagonalisable ? .

- Soit $f \in \mathcal{L}(E) / \mathrm{Sp}(f) = \{1 - \sqrt{2}, 0, 1, 1 + \sqrt{2}\}$.
  - f est bijective ?
  - Si $dim(E) = 4$, f est diagnonalisable ?
  - Si $dim(E) = 5$, f est diagnonalisable ?
  - Si $dim(E) = 3$, que peut-on dire ?

Réduction d'endomorphismes

- Soient $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
  - $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$; $f = 2id$?**Non** ; A est diagonalisable ? Non.
  - $\mathrm{Sp}(B) =$; $g = 2id$? ; B est diagonalisable ? .

- Soit $f \in \mathcal{L}(E) / \mathrm{Sp}(f) = \{1 - \sqrt{2}, 0, 1, 1 + \sqrt{2}\}$.
  - f est bijective ?
  - Si $dim(E) = 4$, f est diagnonalisable ?
  - Si $dim(E) = 5$, f est diagnonalisable ?
  - Si $dim(E) = 3$, que peut-on dire ?

Réduction d'endomorphismes

- Soient $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
  - $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$; $f = 2id$?**Non** ; A est diagonalisable ? Non.
  - $\mathrm{Sp}(B) = \{2\}$; $g = 2id$?**Oui** ; B est diagonalisable ? Oui.

- Soit $f \in \mathcal{L}(E) / \mathrm{Sp}(f) = \{1 - \sqrt{2}, 0, 1, 1 + \sqrt{2}\}$.
  - f est bijective ?
  - Si $dim(E) = 4$, f est diagnonalisable ?
  - Si $dim(E) = 5$, f est diagnonalisable ?
  - Si $dim(E) = 3$, que peut-on dire ?

Réduction d'endomorphismes

- Soient $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
  - $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$; $f = 2id$?**Non** ; A est diagonalisable ? Non.
  - $\mathrm{Sp}(B) = \{2\}$; $g = 2id$?**Oui** ; B est diagonalisable ? .

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)/\mathrm{Sp}(f) = \{1-\sqrt{2}, 0, 1, 1+\sqrt{2}\}$.
  - f est bijective ?
  - Si $dim(E) = 4$, f est diagnonalisable ?
  - Si $dim(E) = 5$, f est diagnonalisable ?
  - Si $dim(E) = 3$, que peut-on dire ?

Réduction d'endomorphismes

- Soient $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
  - $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$; $f = 2id$?**Non** ; A est diagonalisable ? Non.
  - $\mathrm{Sp}(B) = \{2\}$; $g = 2id$?**Oui** ; B est diagonalisable ? .

- Soit $f \in \mathcal{L}(E) / \mathrm{Sp}(f) = \{1 - \sqrt{2}, 0, 1, 1 + \sqrt{2}\}$.
  - f est bijective ? **Non**
  - Si $dim(E) = 4$, f est diagnonalisable ?
  - Si $dim(E) = 5$, f est diagnonalisable ?
  - Si $dim(E) = 3$, que peut-on dire ?

Réduction d'endomorphismes

- Soient $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
  - $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$; $f = 2id$?**Non** ; A est diagonalisable ? Non.
  - $\mathrm{Sp}(B) = \{2\}$; $g = 2id$?**Oui** ; B est diagonalisable ? .

- Soit $f \in \mathcal{L}(E) / \mathrm{Sp}(f) = \{1 - \sqrt{2}, 0, 1, 1 + \sqrt{2}\}$.
  - f est bijective ? **Non**
  - Si $dim(E) = 4$, f est diagnonalisable ? **Oui**
  - Si $dim(E) = 5$, f est diagnonalisable ?
  - Si $dim(E) = 3$, que peut-on dire ?

Réduction d'endomorphismes

- Soient $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
  - $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$; $f = 2id$?**Non** ; A est diagonalisable ? Non.
  - $\mathrm{Sp}(B) = \{2\}$; $g = 2id$?**Oui** ; B est diagonalisable ? .

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)/\mathrm{Sp}(f) = \{1-\sqrt{2}, 0, 1, 1+\sqrt{2}\}$.
  - f est bijective ? **Non**
  - Si $dim(E) = 4$, f est diagnonalisable ? **Oui**
  - Si $dim(E) = 5$, f est diagnonalisable ? **Peut-être...**
  - Si $dim(E) = 3$, que peut-on dire ?

Réduction d'endomorphismes

- Soient $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
  - $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$; $f = 2id$?**Non** ; A est diagonalisable ? Non.
  - $\mathrm{Sp}(B) = \{2\}$; $g = 2id$?**Oui** ; B est diagonalisable ? .

- Soit $f \in \mathcal{L}(E)/\mathrm{Sp}(f) = \{1-\sqrt{2}, 0, 1, 1+\sqrt{2}\}$.
  - f est bijective ? **Non**
  - Si $dim(E) = 4$, f est diagnonalisable ? **Oui**
  - Si $dim(E) = 5$, f est diagnonalisable ? **Peut-être...**
  - Si $dim(E) = 3$, que peut-on dire ? **Qu'on s'est trompé !**

Matrices diagonalisable ?

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Matrices diagonalisable ?

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. *A* non diagonalisable
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Matrices diagonalisable ?

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. A non diagonalisable
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Matrices diagonalisable ?

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. A non diagonalisable
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Sp}(B) = \{1, 4\}$.

$$\mathrm{rg}(B - I) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow dim(E_1) = 3 - 2 = 1$$

$$\mathrm{rg}(B - 4I) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow dim(E_4) = 3 - 2 = 1$$

B non diagonalisable

Matrices diagonalisable ?

- $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Matrices diagonalisable ?

- $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Sp}(C) = \{1, 4\}$.

  $\mathrm{rg}(C - I) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow dim(E_1) = 3 - 1 = 2$

  $\mathrm{rg}(C - 4I) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow dim(E_4) = 3 - 2 = 1$

  C diagonalisable

Matrices diagonalisables et inversibles

Dire, parmis les quatres matrices suivantes celles qui sont diagonalisable, inversible :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ inversible ? ; diagonalisable ?
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ inversible ? ; diagonalisable ?
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ inversible ? ; diagonalisable ?
- $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ inversible ? ; diagonalisable ?

$A + B$ est diagonalisable ?

Matrices diagonalisables et inversibles

Dire, parmis les quatres matrices suivantes celles qui sont diagonalisable, inversible :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ inversible ?**OUI** ; diagonalisable ?**OUI**
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ inversible ? ; diagonalisable ?
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ inversible ? ; diagonalisable ?
- $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ inversible ? ; diagonalisable ?

$A + B$ est diagonalisable ?

Matrices diagonalisables et inversibles

Dire, parmis les quatres matrices suivantes celles qui sont diagonalisable, inversible :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ inversible ?**OUI** ; diagonalisable ?**OUI**
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ inversible ?**NON** ; diagonalisable ?**OUI**
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ inversible ? ; diagonalisable ?
- $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ inversible ? ; diagonalisable ?

$A + B$ est diagonalisable ?

Matrices diagonalisables et inversibles

Dire, parmis les quatres matrices suivantes celles qui sont diagonalisable, inversible :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ inversible ?**OUI** ; diagonalisable ?**OUI**
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ inversible ?**NON** ; diagonalisable ?**OUI**
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ inversible ?**OUI** ; diagonalisable ?**NON**
- $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ inversible ? ; diagonalisable ?

$A + B$ est diagonalisable ?

Matrices diagonalisables et inversibles

Dire, parmis les quatres matrices suivantes celles qui sont diagonalisable, inversible :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ inversible ?**OUI** ; diagonalisable ?**OUI**
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ inversible ?**NON** ; diagonalisable ?**OUI**
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ inversible ?**OUI** ; diagonalisable ?**NON**
- $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ inversible ?**NON** ; diagonalisable ?**NON**

$A + B$ est diagonalisable ?

Matrices diagonalisables et inversibles

Dire, parmis les quatres matrices suivantes celles qui sont diagonalisable, inversible :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ inversible ?**OUI** ; diagonalisable ?**OUI**
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ inversible ?**NON** ; diagonalisable ?**OUI**
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ inversible ?**OUI** ; diagonalisable ?**NON**
- $D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ inversible ?**NON** ; diagonalisable ?**NON**

$A + B$ est diagonalisable ? $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $A + B$ **NON** diagonalisable

Déterminer les valeurs propres de :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Déterminer les valeurs propres de :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 3\}$ car :

  $\mathrm{rg}(A) = 1 \Rightarrow dim(E_0) = 3 - 1 = 2$

  $\mathrm{rg}(A - 3I) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow dim(E_3) = 3 - 2 = 1$

- $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Déterminer les valeurs propres de :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 3\}$ car :

  $\mathrm{rg}(A) = 1 \Rightarrow dim(E_0) = 3 - 1 = 2$

  $\mathrm{rg}(A - 3I) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow dim(E_3) = 3 - 2 = 1$

- $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Déterminer les valeurs propres de :

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 3\}$ car :
  $\mathrm{rg}(A) = 1 \Rightarrow dim(E_0) = 3 - 1 = 2$
  $\mathrm{rg}(A - 3I) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow dim(E_3) = 3 - 2 = 1$
- $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Sp}(B) = \{1, 4\}$ car :
  $\mathrm{rg}(B - I) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow dim(E_1) = 3 - 1 = 2$
  $\mathrm{rg}(B - 4I) = \mathrm{rg}(A - 3I) = 2 \Rightarrow dim(E_4) = 3 - 2 = 1$

Déterminer les valeurs propres de :

- $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

- A est diagonalisable ? ; Matrice de passage ?

Déterminer les valeurs propres de :

- $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 5\}$ car :

- A est diagonalisable ? ; Matrice de passage ?

Déterminer les valeurs propres de :

- $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 5\}$ car :

  $\mathrm{rg}(A + I) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow dim(E_{-1}) = 2 - 1 = 1$

  $\mathrm{rg}(A - 5I) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow dim(E_5) = 2 - 1 = 1$
- A est diagonalisable ? ; Matrice de passage ?

Déterminer les valeurs propres de :

- $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 5\}$ car :

  $\mathrm{rg}(A+I) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow dim(E_{-1}) = 2 - 1 = 1$

  $\mathrm{rg}(A-5I) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow dim(E_5) = 2 - 1 = 1$

- A est diagonalisable ? **Oui** ; Matrice de passage ?

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P \cdot D_1^n \cdot P^{-1}$ où $D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Matrice de passage :

Soit $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

Déterminer $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Matrice de passage :

Soit $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

Déterminer $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

B est diagonalisable et de valeurs propres -1 et 2.
La matrice P cherchée est la matrice de passage de la base canonique dans la base de vecteur propre.
Il suffit donc de déterminer une base de E_{-1} et de E_2 :

Matrice de passage :

Soit $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

Déterminer $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

B est diagonalisable et de valeurs propres -1 et 2.
La matrice P cherchée est la matrice de passage de la base canonique dans la base de vecteur propre.
Il suffit donc de déterminer une base de E_{-1} et de E_2 :

$\mathrm{Ker}(B+I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$

$\mathrm{Ker}(B-2I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$

Conclusion : La matrice cherchée est : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Question d'oral...

Soit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1+\frac{2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que 1 et $1 + \dfrac{1}{n}$ sont **les** valeurs propres de A_n :
- Soit $B_2 = A_1 \cdot A_2$; B_2 est-elle diagonalisable ? inversible ?

Question d'oral...

Soit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1+\frac{2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que 1 et $1 + \dfrac{1}{n}$ sont **les** valeurs propres de A_n :

  $\mathrm{rg}(A_n - I) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix} = 2$ car $C_1 + C_2 = C_3$

  $\mathrm{rg}(A_n - (1+1/n)I) = \mathrm{rg} \begin{pmatrix} -\frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \end{pmatrix} = 1$ car

  $C_1 + C_2 = 0$ et $C_1 + C_3 = 0$
- Soit $B_2 = A_1 \cdot A_2$; B_2 est-elle diagonalisable ? inversible ?

Question d'oral...

Soit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1+\frac{2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que 1 et $1 + \dfrac{1}{n}$ sont **les** valeurs propres de A_n :
- Soit $B_2 = A_1 \cdot A_2$; B_2 est-elle diagonalisable ? inversible ?

Question d'oral...

Soit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1+\frac{2}{n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que 1 et $1 + \dfrac{1}{n}$ sont **les** valeurs propres de A_n :
- Soit $B_2 = A_1 \cdot A_2$; B_2 est-elle diagonalisable ? inversible ?
  $B_2 = PD_1P^{-1} \cdot PD_2P^{-1} = PD_1D_2P^{-1}$ avec :
  $$D_1D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  D'où on conclut : $\boxed{B_2 \text{ est diagonalisable et inversible}}$

projections

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. et $p \in \mathcal{L}(E) / p \circ p = p$.

- Montrer que $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$:
- On suppose $p \neq id$ et $p \neq 0$.
  - Montrer que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(p - id)$ et $\mathrm{Im}(p - id) \subset \mathrm{Ker}(p)$

projections

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. et $p \in \mathcal{L}(E)/p \circ p = p$.

- Montrer que $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$: Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(p)$. Alors : $\exists u \in E, u \neq 0/p(u) = \lambda u$. D'où $(p^2 - p)(u) = \lambda^2 u - \lambda u = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - \lambda)u = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0$ car $u \neq 0$
- On suppose $p \neq id$ et $p \neq 0$.
  - Montrer que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(p - id)$ et $\mathrm{Im}(p - id) \subset \mathrm{Ker}(p)$

projections

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. et $p \in \mathcal{L}(E)/p \circ p = p$.

- Montrer que $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$:
- On suppose $p \neq id$ et $p \neq 0$.
  - Montrer que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(p - id)$ et $\mathrm{Im}(p - id) \subset \mathrm{Ker}(p)$

projections

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. et $p \in \mathcal{L}(E) / p \circ p = p$.

- Montrer que $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$:
- On suppose $p \neq id$ et $p \neq 0$.
    - Montrer que $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(p - id)$ et $\mathrm{Im}(p - id) \subset \mathrm{Ker}(p)$
      $p^2 - p = 0 \Leftrightarrow p \circ (p - id) = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(p - id) \subset \mathrm{Ker}(p)$ et de même : $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(p - id)$