

# 5

## Espaces vectoriels



*Les objectifs* : « Ce chapitre reprend les concepts présentés en première année dans un cadre limité ( $\mathbb{K}^n$ ) et les adapte brièvement à d'autres espaces, de dimension finie ou non (on travaille avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Les capacités exigibles sont les suivantes : Trouver une base et la dimension d'un espace vectoriel ; calculer le rang d'une famille finie de vecteurs ; capacité d'abstraction (ou d'adaptation) pour concevoir une fonction, un polynôme ou une matrice comme un vecteur. »

### 1 Structure vectorielle.

#### 1.1 Définition et exemples

##### Définition

Espace vectoriel

On appelle **espace vectoriel** sur  $\mathbb{K}$  ou  $K$ -espace vectoriel tout ensemble  $E$  non vide muni :

① D'une addition interne satisfaisant :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, x + y \in E & && \text{(Stabilité)} \\ \forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x & && \text{(Commutativité)} \\ \forall (x, y, z) \in E^3, x + (y + z) = (x + y) + z & && \text{(Associativité)} \\ \exists 0_E \in E / \forall x \in E, x + 0_E = x & && \text{(Élément neutre)} \\ \forall x \in E, \exists x' \in E / x + x' = 0_E & && \text{(E symétrisable)} \end{aligned}$$

② D'une multiplication externe satisfaisant :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x \in E & && \text{(Stabilité)} \\ \forall (x, y) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 : & && \\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x & && \text{(Distributivité)} \\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y & && \text{(Distributivité)} \\ \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x & && \text{(Associativité)} \\ 1 \cdot x = x & && \text{(Produit par l'élément neutre)} \end{aligned}$$

**Notations** : Les éléments de  $E$  sont appelés **vecteurs** et les éléments de  $\mathbb{K}$  **scalaire**.  $0_E$  désigne le vecteur nul.

##### Définition

combinaison linéaire

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_n\}$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathcal{F}$  tout vecteur  $u$  de la forme :

$$u = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \text{ où } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

#### Remarque 1.1 :

- Le vecteur nul  $0_E$  est combinaison linéaire de toute famille finie de vecteurs de  $E$ .
- Si  $u$  est combinaison linéaire des vecteurs de  $\mathcal{F}$ , alors quelque soit un vecteur  $v \in E$ ,  $u$  est combinaison linéaire des vecteurs  $x_1, \dots, x_n, v$ .

## Exemples

Exemple fondamentaux

- ①  $\mathbb{K}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel; En particulier  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^2$  sont des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels,  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{C}^2$  sont des  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels **et** des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels.
- ②  $\mathbb{K}^I$  : Ensemble des applications définies sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .
- ③  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$  : Ensemble des fonctions de classes  $\mathcal{C}^n$  définies sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .
- ④  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$ .
- ⑤  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  : ensemble des suites à éléments dans  $\mathbb{R}$ .
- ⑥  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  : matrices  $n$  lignes,  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .
- ⑦  $\mathcal{V}_d(\Omega)$  : Ensemble des variables aléatoires discrètes définies sur un même univers.

## Propriété

Règles de calcul

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $u$  et  $v$  deux vecteurs de  $E$  et  $\lambda$  un scalaire de  $\mathbb{K}$ . Alors :

$$\begin{array}{lll} (i) 0 \cdot u = 0_E & (ii) \lambda \cdot 0_E = 0_E & (iii) (-\lambda) \cdot u = -(\lambda \cdot u) \\ (iv) \lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot u - \lambda \cdot v & (v) \lambda \cdot u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E & \end{array}$$

## 1.2 Sous-espaces vectoriels

### Définition

Sous-espaces vectoriels

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle **sous-espace vectoriel** de  $E$  toute partie non vide de  $E$ , à la fois stable par l'addition de  $E$  et stable par la multiplication par un scalaire.



### Caractérisation des sous-espaces vectoriels :

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si :

$$(i) F \subset E \quad (ii) 0_E \in F \quad (iii) \forall u, v \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot u + v \in F$$

## Exemples

Exemple classiques

Dire dans chaque cas si les ensembles  $F$  sont sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels  $E$  suivants :

- $E = \mathbb{R}^n$  :  $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = x\}$ ;  $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x + y\}$ ;
- $E = \mathbb{R}[X]$  :  $F_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] / P'(X) = P(X)\}$ ;  $F_4 = \{P \in \mathbb{R}_1[X] / P(1) = 1\}$ ;  $F_5 = \{P \in \mathbb{R}_1[X] / P(1) = 0\}$ ;
- $E = \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$  :  $F_7 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - af(x) = 0\}$ ;  $F_8 = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) / f'' - 3f' + 2f = 0\}$ ;
- $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :  $F_9 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / {}^t M = M\}$ ;  $F_{10} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / M \text{ inversible}\}$ ;  
 $F_{11} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\}$

### Propriété

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- ① Si  $F$  est un sous-espace vectoriel, alors  $F$  muni des mêmes lois que  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -e.v.
- ②  $E$  et  $0_E$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$

### Propriété

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , alors  $F \cap G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

**Remarque 1.2 :** Il est possible d'étendre ce résultat à l'intersection finie de  $n$  sous-espaces vectoriels de  $E$ .

**Remarque 1.3 :** L'union de sous-espaces vectoriels de  $E$  n'est pas, en général un sous-espace vectoriel de  $E$ .

### Définition

*Sous-espace vectoriel engendré par une famille*

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  une famille finie de vecteurs de  $E$ . L'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de  $X$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  appelé **sous-espace vectoriel engendré par  $X$** .

On le note  $\text{Vect}\{X\}$  ou encore  $\text{Vect}\{x_1, \dots, x_n\}$

**Remarque 1.4 :** On dit aussi que  $X$  est une *famille génératrice* de  $\text{Vect}\{X\}$  et on écrit :

$$\text{Vect}\{X\} = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

### Exemples

*ss-ev engendrés par une famille*

- ① Dans  $\mathbb{C}$  considéré comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, le ss-espace vectoriel engendré par  $\{1\}$  est  $\mathbb{R}$ , le ss-espace vectoriel engendré par  $i$  est l'ensemble des imaginaires pures et le ss-espace vectoriel engendré par  $\{1, i\}$  est  $\mathbb{C}$ .
- ② Montrer que  $F_1 = \{u \in \mathbb{R}^3 / \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, u = (\alpha, \alpha + 2\beta, -\beta)\}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- ③ Montrer que  $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = 0 = P'(1)\}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- ④ Montrer que  $F_3 = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) / f'' - 3f' + 2f = 0\}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

## 2 Familles génératrices et libres. Bases

### Définition

*famille génératrice finie d'un espace vectoriel*

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_n\}$  une famille finie de vecteurs de  $E$ . Sous réserve d'existence,  $\mathcal{F}$  est dite **famille génératrice de  $F$**  si  $F = \text{Vect}\{\mathcal{F}\}$ . Autrement dit :

$$\forall u \in F, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n / u = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$$

**Remarque 2.1** Si  $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$  alors  $\mathcal{F}'$  est aussi une famille génératrice de  $F$ .

### Définition

famille libre finie

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_n\}$  une famille finie de vecteurs de  $E$ .  
On dit que la famille  $\mathcal{F}$  est **libre** si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_k = 0, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

Les vecteurs  $x_1, \dots, x_n$  sont dits dans ce cas **linéairement indépendants**.

### Définition

famille liée

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soit  $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_n\}$  une famille finie de vecteurs de  $E$ .  
On dit que la famille  $\mathcal{F}$  est **liée** si elle n'est pas libre, autrement dit :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\} / \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

### Exemple

Exemple fondamental de famille libre

Toute famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts est libre

### Propriété

- ① Toute sous famille d'une famille libre est libre.
- ② Si  $0_E \in \mathcal{F}$  alors  $\mathcal{F}$  est liée.
- ③ Si  $\mathcal{F}$  contient deux fois le même vecteur alors cette famille est liée.

### Définition

Base finie d'un espace vectoriel

Sous réserve d'existence, on appelle **base** d'un espace vectoriel  $E$  toute famille de  $E$  à la fois libre et génératrice.

### Exemples

- ①  $\mathcal{B}_1 = ((1, -2, 0), (0, 3, 1), (1, 2, 1))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$
- ②  $\mathcal{B}_2 = ((X-1)^2, X(X-1)^2)$  est une base de  $F_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = 0 = P'(1)\}$
- ③  $\mathcal{B}_3 = (1, X-2, (X-2)^2)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- ④  $\mathcal{B}_4 = (x \mapsto e^x, x \mapsto e^{2x})$  est une base de  $F_4 = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) / f'' - 3f' + 2f = 0\}$

### Exemples (suite)

⑤ Pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , déterminer une base de  $\mathcal{B} = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) / f'' + af' + bf = 0\}$  selon le nombre de solutions dans  $\mathbb{R}$  de l'équation caractéristique de l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = 0$ .

### Théorèmes

#### Coordonnées d'un vecteur dans une base

Si  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  est une base de  $E$  alors tout vecteur  $u$  de  $E$  se décompose de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de  $\mathcal{B}$ . Les coefficients de cette décomposition sont appelés les coordonnées de  $u$  relativement à la base  $\mathcal{B}$

### Exemples

En reprenant les bases obtenues dans l'exemple ci-dessus, déterminer les coordonnées les coordonnées de  $u = (a, b, c)$  dans la base  $\mathcal{B}_1$  et les coordonnées de  $P = 1 + X - X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$  dans la base  $\mathcal{B}_3$ .

### Notation

Si  $\mathcal{B}$  est une base d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  alors si  $u = (a_1, \dots, a_n)_{\mathcal{B}}$  alors la la matrice des coordonnées de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  est une matrice colonne et on note  $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$

**Remarque 2.2** Par extension, si  $\mathcal{B}$  est une base d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  et  $\mathcal{F} = \{u_1, \dots, u_p\}$  est une famille finie de  $p$  vecteurs de  $E$  exprimée dans cette base avec

$$u_k = (a_{1,k}, \dots, a_{n,k}), \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$$

alors on appelle  $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$  la matrice des coordonnées de la famille  $\mathcal{F}$  dans la base  $\mathcal{B}$  avec

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$$



Les bases canonique de  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathbb{K}_n[X]$  sont respectivement :

$$\mathcal{B}_1 =$$

$$\mathcal{B}_2 =$$

### 3 Dimension.

#### Définition

espace vectoriel de dimension finie

On dit que l'espace vectoriel  $E$  est de dimension finie si  $E$  admet une famille génératrice finie ou encore s'il existe une famille  $\mathcal{F}$  de vecteurs de  $E$  telle que  $E = \text{Vect}\{\mathcal{F}\}$ .

**Remarque 3.1 :** De toute famille génératrice finie  $\mathcal{F}$  d'un espace vectoriel  $E$ , on peut extraire une base.

#### Théorèmes

dimension d'un espace vectoriel

Dans un espace vectoriel  $E$  non réduit au vecteur nul et de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal ; ce nombre est appelé dimension de  $E$ .

**Remarque 3.2** Par convention,  $\dim(E) = 0 \Leftrightarrow E = \{0_E\}$ .

#### Théorèmes

Dans un espace vectoriel de dimension  $n$  :

- Toute famille libre a au plus  $n$  éléments.
- Une famille libre ayant  $n$  éléments est une base.
- Toute famille génératrice a au moins  $n$  éléments.
- Une famille génératrice ayant  $n$  éléments est une base.

#### Théorèmes

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $F$  est de dimension finie et  $\dim F \leq \dim E$ .  
Si les deux dimensions sont égales, alors  $F = E$ .

#### Définition

Rang d'une famille de vecteurs

Soit  $\mathcal{F}$  une famille finie de vecteur d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . On appelle rang de  $\mathcal{F}$  la dimension du sous-espace vectoriel engendré par  $\mathcal{F}$ , soit  $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}\{\mathcal{F}\})$ . C'est donc aussi le plus grand nombre de vecteurs issus de  $\mathcal{F}$  formant une famille libre.

**Remarque 3.3 :** Le rang d'une famille de vecteurs peut se calculer comme le rang de la matrice des coordonnées de la famille dans n'importe quelle base.

**Remarque 3.4 :** Une famille de vecteurs est libre si, et seulement si, son rang est égale à son cardinal.