4 Concepts de base des probabilités.

Contexte : Les séries ont été introduites comme un outil pour doner tout leur sens aux probabilités et variables aléatoires discrètes. En dehors des questions de probabilistes, les séries ne doivent être utilisées que de manière exceptionnelle et en lien avec des démarches de modélisation.

Exercice 1 ✶ : Coïncidences

Soit $n \geq 2$. On dispose de n cartons numérotés de 1 à n. On prend un carton au hasard. Si on obtient le carton n°i, pour $i \in \{1, \cdots, n\}$, on place alors dans une urne i boules blanches et $n - i$ boules noires. On tire alors successivement et avec remise deux boules de cette urne.
Soit A l'événement : « Tirer deux boules blanches ».

① Écrire une fonction Python `effectifBlanches` d'argument le nombre initial n de cartons qui renvoie le nombre de blanches obtenues à l'issue du tirage. En déduire une fonctions Python `estimProbA(n, m)` permettant d'estimer la probabilité de l'événement A en répétant m fois de façons indépendantes (m supposé grand) l'expérience aléatoire précédente.

② Quelle est la probabilité exacte de tirer deux boules blanches ?

③ On a tiré deux boules blanches. Quelle est la probabilité d'avoir pris le carton n°i ?

Exercice 2 ✶✶ : A nouveau des coïncidences

Soit n un entier supérieur à 2. On dispose d'une urne contenant $n - 1$ boules numérotées de 1 à $n - 1$ et de n caisses $C_1, C_2, \cdots, C_n$. Pour tout i compris entre 1 et n, la caisse C_i contient i jetons numérotés de 1 à i.
On tire une boule de l'urne. Si la boule tirée porte le numéro i, on tire un jeton de la caisse C_i et un jeton de la caisse C_{i+1}. On dit qu'il y a succès si les deux jetons portent le même numéro.

① Quelle est la probabilité p_2 du succès lorsque $n = 2$?

② Quelle est la probabilité p_n du succès lorsque $n > 2$? Valider votre réponse grâce à des fonctions Python.

③ **a.** Montrer que pour tout entier naturel k non nul, l'inégalité suivante :
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$
est vraie.

b. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Monter que : $\forall n \geq 1,\ S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_{n-1} < S_n$.

c. En déduire un équivalent au voisinage de l'infini de S_n

d. Donner un équivalent au voisinage de l'infini de p_n.

Exercice 3 ✶ :

Un logiciel informatique permet de retourner un nombre entier naturel au hasard de manière aléatoire et on note ω_n le résultat : « obtenir l'entier n ».

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $p_n = \dfrac{1}{n!e}$.

① Montrer qu'il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $\mathbb{P}(\omega_n) = p_n$.

② Après avoir tiré un nombre aléatoire k avec ce programme, on tire une boule dans une urne composée de k boules blanches et une noire.
Calculer la probabilité d'obtenir la boule noire.

Exercice 4 ✶✶ :

Des personnes se transmettent une information. Chaque personne transforme l'information reçue en son contraire avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et la transmet fidèlement avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, p_n la probabilité que la n-ième personne reçoive l'information non déformée (ce qui ne veut pas dire que la n-ième personne transmet fidèlement le message...). On pose $p_1 = 1$.

① Écrire une fonction Python `transmission(n, p)` d'arguments un nombre n de personnes et leur probabilité p de mentir qui renvoie une liste `Lp` formée d'entiers égaux à 0 ou 1 selon que, au fil des transmissions, chaque personne reçoit l'information déformée ou non.
A titre d'exemple, pour $n = 4$ et $p = 1/2$, `Lp = [1, 1, 0, 1]` *signifie que la 1ère personne a reçu l'information non déformée (par convention), que la 2nd également mais qu'elle a mentie et que la 3ème personne a reçu l'information déformée. Enfin que cette personne a menti et que la 4ème personne reçoit l'information non déformée...*
En répétant m fois cette expérience (m supposé grand), estimer la probabilité que la n-ième personne reçoive l'information non déformée selon différentes valeurs de p lorsque n devient grand.

② Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, p_{n+1} en fonction de p_n.

③ En déduire que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique puis exprimer p_n en fonction de n et de p.

④ Calculer $\lim_{n\to\infty} p_n$. Que remarque-t-on ?

Exercice 5 ✶ :

Un joueur lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à obtenir un premier pile. On note N le nombre de lancers nécessaire.

① Déterminer $N(\Omega)$ et $\mathbb{P}(N = k)$ pour tout $k \in N(\Omega)$.

② Si l'événement $(N = n)$ est réalisé, alors le joueur tire un billet dans une urne de n billets dont un seul est gagnant. Soit G l'événement : « le joueur gagne ».

a. Déterminer $\mathbb{P}_{(N=n)}(G)$.

b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne ? Confortez ce résultat grâce à une simulation Python

Exercice 6 ✶✶ :

Une urne contient une boule verte et une boule rouge. On effectue des tirages successifs selon la procédure suivante : on tire une boule ; si elle est rouge on arrête les tirages, si elle est verte on la remet dans l'urne en ajoutant une boule rouge. On note X le nombre de tirages effectués. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note V_k (respectivement R_k) l'évènement : « le k-ième tirage donne une boule verte (respectivement rouge) ».

① $\forall n \geq 2$, calculer la probabilité $\mathbb{P}(V_n | V_1 \cap \cdots \cap V_{n-1})$. En déduire $\mathbb{P}(X > k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

② Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $p_l = \mathbb{P}(X = k)$. Vérifier que X est bien une variable aléatoire réelle en montrant que la série $\sum p_k$ converge et que $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

③ Montrer que X admet une espérance et la calculer. Trouver le moyen de valider votre réponse avec Python.

Exercice 7 ✶✶ :

Soit un nombre réel $p \in]0, 1[$. On réalise une suite de lancers d'une pièce, chaque lancer amenant « pile » avec la probabilité p ou « face » avec la probabilité $q = 1 - p$. Pour tout entier naturel k non nul, soit l'événement A_k : « on obtient pour la première fois Pile suivi de Face aux lancers k et $k + 1$ ».

① Calculer $\mathbb{P}(A_1)$ et $\mathbb{P}(A_2)$.

② A l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que pour tout $k \geq 2$, on a : $\mathbb{P}(A_k) = q \cdot \mathbb{P}(A_{k-1}) + p^k q$.

③ En faisant intervenir la suite (u_k) définie, pour tout entier $k \geq 2$, par $u_k = \dfrac{\mathbb{P}(A_k)}{q^k}$, déterminer $\mathbb{P}(A_k)$ pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1 (✐ On pensera à étudier le cas particulier : $p = q = 1/2$).

④ Vérifier que les A_k forment un système quasi-complet d'événements.

Exercice 8 ✶✶ ✶ :

On effectue des tirages dans une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires. Après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne avec c boules de la même couleur.

① Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer p_n, probabilité que la 1ère boule blanche soit obtenue au n-ième tirage.

② On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{b + kc}{a + b + kc}$. Montrer qu'on a $p_n = a_{n-1} - a_n$ pour tout $n \geq 2$.

③ **a.** Montrer que $\ln(a_n) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ où $u_k = \ln\left(1 + \dfrac{a}{b + kc}\right)$

b. Montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{1}{n} = v_n$ et en déduire que la série de terme général u_n diverge. Conclure sur $\underset{n\to\infty}{lim}\, a_n$.

④ En déduire la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} p_n$ ainsi que sa somme. Interpréter.