DEVOIR MAISON 1 : Planche 4 - TD01.

$u_1 \in]0, \pi[$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = (1+\frac{1}{n})\sin(u_n)$

① $0 < u_1 < \pi \Rightarrow 0 < \sin(u_1) < 1$

$\Rightarrow u_2 = (1+\frac{1}{1})\sin(u_1) = 2\sin(u_1) \in]0, 2] \subset]0, \pi[$

$u_3 = \frac{3}{2}\sin(u_2) \in]0, \frac{3}{2}] \subset]0, \pi/2[$ (car $\sin(u_2) \in]0, 1]$)

Raisonnons maintenant par récurrence :

(i) $u_3 \in]0, \pi/2[$

(ii) On suppose $u_n \in]0, \pi/2[$ pour n fixé ($n \geq 3$)

(iii) $u_{n+1} = \frac{n+1}{n}\sin(u_n)$ avec $0 < \sin(u_n) < 1$

$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < \frac{n+1}{n}$

or $n \geq 3$ donc $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{3}$ et $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq \underbrace{\frac{4}{3} < \frac{\pi}{2}}_{\text{car } 8 < 3\pi}$

D'où $0 < u_{n+1} < \pi/2$

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 3, \ u_n \in]0, \frac{\pi}{2}[}$

② Soit $\ell \in \mathbb{R}$ / $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$.

La fonction sinus étant continue sur $\mathbb{R}$, on a par passage à la limite :

$\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \ell = \sin(\ell) \Leftrightarrow \ell = 0$ (on pourra vérifier que $x \mapsto \sin(x) - x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ car continue et strictement décroissante, ce qui assure l'unicité de ℓ)

Conclusion : $\boxed{\text{le seul réel vers lequel } (u_n) \text{ peut converger est } 0}$

③ On peut se contenter d'écrire :

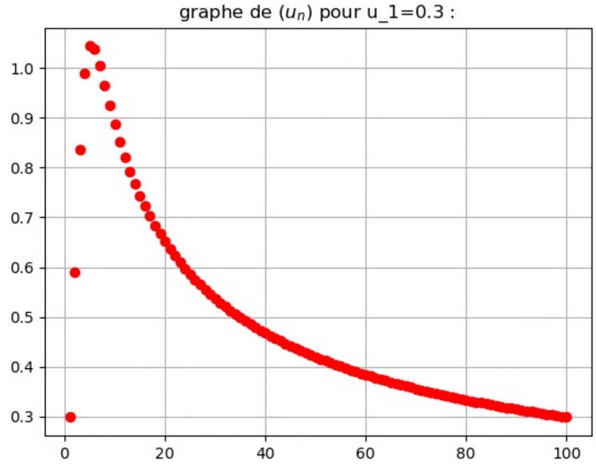
```
def calculU(u1: float, n: int) -> list:
    LU = [u1]
    for k in range(1, n):
        u1 = (1+1/k)*sin(u1)
        LU.append(u1)
    return LU
```

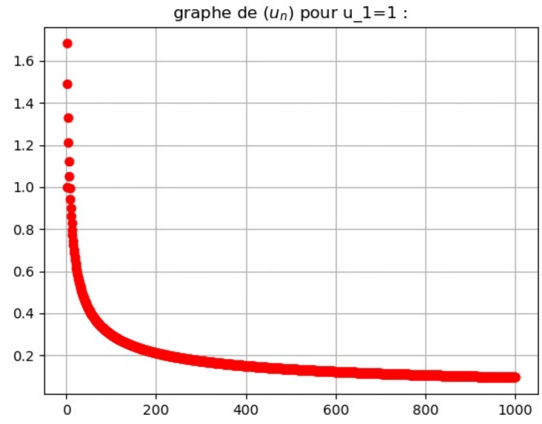
on aura LU = [u_1, ..., u_n]

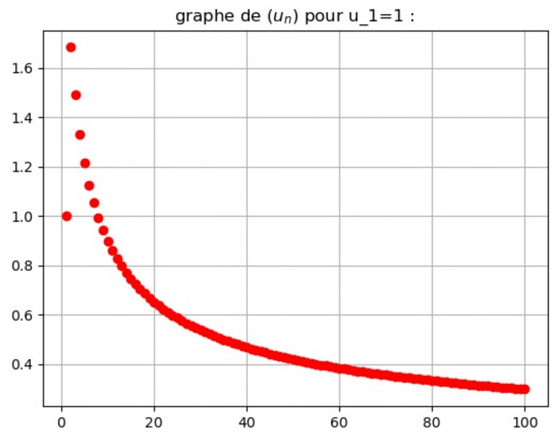
Pour la représentation graphique, a minima :

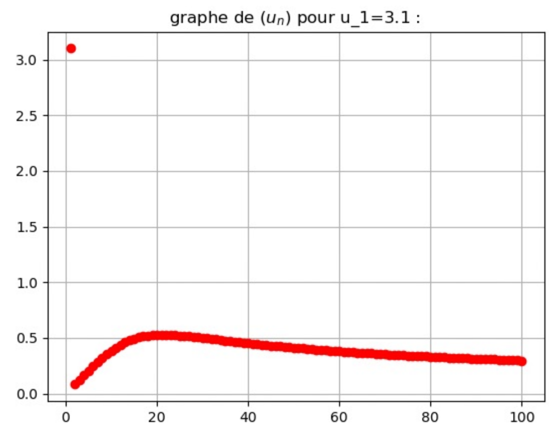
```
a = 0.3
n = 100
I = np.arange(1, n+1)
plt.plot(I, calculU(a, n), 'ro')
```

ce qui donne :









Conjecture : $\boxed{\text{Pour tout } u_1 \in]0;\pi[\text{, la suite } (u_n) \text{ décroît à partir d'un certain rang.}}$

④ Hypothèse : On suppose qu'il existe $n_0 \geq 4$ tel que $u_{n_0} \leq u_{n_0-1}$

Montrons que (u_n) décroît à partir du rang n_0 :

Pour ça montrons par récurrence que :

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq u_{n-1}$$

(i) $u_{n_0} \leq u_{n_0-1}$ par hypothèse.

(ii) supposons que $u_n \leq u_{n-1}$ pour n fixé ($n \geq n_0$)

(iii) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin(u_n)}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\sin(u_{n-1})} = \underbrace{\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{n-1}{n}}_{=\frac{n^2-1}{n^2}}\ \dfrac{\sin(u_n)}{\sin(u_{n-1})}$

$= \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\dfrac{\sin(u_n)}{\sin(u_{n-1})}$

or, par hypothèse de récurrence et d'après (1) :

$0 < u_n \leq u_{n-1} < \pi/2$ (car $n \geq 4 \Rightarrow n-1 \geq 3$)

donc

$0 < \sin(u_n) \leq \sin(u_{n-1}) < 1$ (car $t \mapsto \sin(t)$ est strict^t $\nearrow$ sur $[0, \pi/2]$)

Soit $\quad 0 < \dfrac{\sin(u_n)}{\sin(u_{n-1})} < 1$

et comme par ailleurs $0 < 1 - \dfrac{1}{n^2} < 1 \quad \forall n \geq 4$,
on a :

$0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ou encore $u_{n+1} < u_n$
(car $u_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$)

Conclusion $\boxed{\text{Si } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n_0 \geq 4 \,/\, u_{n_0} \leq u_{n_0-1}, \text{ alors } u_n \leq u_{n-1}\ \forall n \geq n_0, \text{ ou encore : } (u_n) \text{ décroit à partir du rang } n_0}$

(5) Raisonnons par l'absurde : Si pour tout entier $n \geq 4$ on a $u_n > u_{n-1}$, cela signifie que $(u_n)_{n\geq 4}$ est croissante.
Comme par ailleurs, d'après (1) : $0 < u_n < \frac{\pi}{4} \ \forall n \geq 3$,

la suite $(u_n)_{n\geq 4}$ est croissante et majorée. Elle converge d'après le théor. de la limite monotone, vers $\ell \geq u_3 > 0$.

Absurde car d'après (2) la seule limite possible est $\ell = 0$.

Conclusion : $\boxed{\exists n_0 \geq 4 \,/\, u_{n_0} \leq u_{n_0-1}}$

(6) D'après (4) et (5) : $\exists n_0 \geq 4 \,/\, (u_n)_{n\geq n_0}$ décroit.
Elle est minorée par 0 donc elle converge vers sa seule limite possible, à savoir $\ell = 0$.

Conclusion $\boxed{(u_n) \text{ converge et } \lim_{n\to\infty} u_n = 0}$

(7) On utilise le programme Python :

```
L1 = calculU(u1, n)
L2 = [sqrt(k+1)*L1[k] for k in range(n)]
```

Quelle que soit la valeur de u_1 prise dans $]0,\pi[$, la valeur de L2[-1] est proche de 3 pour de grandes valeurs de n.

Conjecture : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\,.\,u_n = 3}$

(8) $\forall n \geq 1$, on pose $x_n = \dfrac{u_n}{n}$.

$$x_{n+1} - x_n = \frac{u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_n}{n} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}\sin(u_n) - \frac{u_n}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sin(u_n) - u_n\right]$$

Pour rappel, $\sin x \underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$ et donc

$$\sin x - x \underset{0}{\sim} -\frac{x^3}{6}$$

Dès lors, puisque $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, on a :

$$x_{n+1} - x_n \underset{\infty}{\sim} -\frac{u_n^3}{6n} = -\frac{n^3 x_n^3}{6n} = -\frac{n^2}{6}x_n^3$$

Ensuite, $\dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2} = \dfrac{x_n^2 - x_{n+1}^2}{x_n^2 x_{n+1}^2} = \dfrac{(x_n - x_{n+1})(x_n + x_{n+1})}{(x_n x_{n+1})^2}$

avec $x_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{n+1} = \dfrac{1}{n}\sin(u_n) \underset{\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{n} = x_n \Rightarrow x_n x_{n+1} \underset{\infty}{\sim} x_n^2$

et $x_n + x_{n+1} = \dfrac{u_n}{n} + \dfrac{1}{n}\sin(u_n) = \dfrac{u_n}{n}\left[1 + \dfrac{\sin(u_n)}{u_n}\right] \underset{\infty}{\sim} 2\dfrac{u_n}{n} = 2x_n$

$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$

En conséquence :

$$\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \underset{\infty}{\sim} \frac{n^2}{6}\cancel{x_n^3}\cdot\frac{2\cancel{x_n}}{\cancel{x_n^4}} = \frac{n^2}{3}$$

Conclusion $\boxed{x_{n+1} - x_n \underset{\infty}{\sim} -\frac{n^2}{6}x_n^3 \ ; \ \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \underset{\infty}{\sim} \frac{n^2}{3}}$

(9) On admet : $\dfrac{1}{x_n^2} \underset{\infty}{\sim} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3}$; $n u_n^2 = n(n^2 x_n^2) = n^3 x_n^2$

D'où $\dfrac{1}{n u_n^2} = \dfrac{1}{n^3 x_n^2} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{3} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k/n)^2}{3} \underset{\infty}{\sim} \int_0^1 \frac{t^2}{3}\,dt$

↳ Somme de Riemann

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n u_n^2} = \left[\dfrac{t^3}{9}\right]_0^1 = \dfrac{1}{9}$; conclusion $\boxed{\lim\limits_{\infty} \sqrt{n}\,.\,u_n = 3}$