Devoir : Séries numériques et probabilités (3h00)

Problème 1 :

On rappelle que pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on note B_i l'événement « on obtient une boule blanche au i^{e} tirage », X le numéro du tirage où l'on obtient, pour la première fois, une boule noire.
Pour finir, on note U l'événement « le premier tirage a lieu dans l'urne U ».

Partie 1

Dans cette partie, les tirages qui suivent le premier tirage ont lieu dans l'urne qui a été choisie au premier tirage.

1. a) *Déterminons* $\mathbb{P}(X = 1)$.
   Le système $\{U, \overline{U}\}$ est un système complet d'évènements et par application de la formule des prob. totales :
   $$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(U) \cdot \mathbb{P}_U(X = 1) + \mathbb{P}(\overline{U}) \cdot \mathbb{P}_{\overline{U}}(X = 1)$$
   Or $\mathbb{P}(U) = \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}(\overline{U})$ (tirage au hasard), $\mathbb{P}_U(X = 1) = \dfrac{n-1}{n}$ et $\mathbb{P}_{\overline{U}}(X = 1) = \dfrac{1}{n}$.
   Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{n-1}{n} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2}}$

   b) Pour tout entier $k \geq 2$, $(X = k) = B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}$.
   La probabilité de cet événement dépendant de l'urne dans laquelle a eu lieu le premier tirage, on utilise à nouveau le système complet d'événements $\{U, \overline{U}\}$:
   Alors, la formule des probabilités totales donne :
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(U) \cdot \mathbb{P}_U(X = k) + \mathbb{P}(\overline{U}) \cdot \mathbb{P}_{\overline{U}}(X = k) \\ &= \mathbb{P}(U) \cdot \mathbb{P}_U(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}) + \mathbb{P}(\overline{U}) \cdot \mathbb{P}_{\overline{U}}(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k})\end{aligned}$$
   Une fois l'urne choisie, les tirages sont indépendants (tirages avec remise - on parle d'indépendance conditionnelle). Donc :
   $\mathbb{P}_U(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}) = \mathbb{P}_U(B_1)\mathbb{P}_U(B_2)...\mathbb{P}_U(B_{k-1})\mathbb{P}_U(\overline{B_k})) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1} \cdot \dfrac{n-1}{n}$
   De même :
   $\mathbb{P}_{\overline{U}}(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-1} \cap \overline{B_k}) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1} \cdot \dfrac{1}{n}$
   Et puisque $\mathbb{P}(U) = \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}(\overline{U})$
   Conclusion : $\boxed{\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}\dfrac{n-1}{n} + \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{k-1}\dfrac{1}{n}\right]}$
   Comme $\left(\dfrac{1}{n}\right)^0 = 1$ et $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^0 = 1$, on retrouve $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{1}{2}$. Cette formule reste donc valable pour $k = 1$

2. a) *Vérifions qu'on a ainsi défini une loi de probabilité de* X :
   i. On note que pour tout entier naturel k non nul, $\mathbb{P}(X = k) \geq 0$.
   Il suffit donc de montrer que $\displaystyle\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = k)$ converge et que sa somme vaut 1.
   ii. n étant fixé, $\displaystyle\sum_{k \geq 1}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} = \sum_{k \geq 0}\left(\frac{1}{n}\right)^{k}$ et $\displaystyle\sum_{k \geq 1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = \sum_{k \geq 0}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k}$ sont deux séries géométriques convergentes de raisons respectives $q_1 = \dfrac{1}{n}$ et $q_2 = \dfrac{n-1}{n}$, toutes deux comprises entre 0 et 1 strictement (en effet $n \geq 2 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{2} < 1$ et donc $0 < 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n} < 1$)
   Donc $\displaystyle\sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = k)$ converge comme combinaison linéaire de deux séries convergentes.

iii. Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k) &= \frac{n-1}{2n}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{n})^{k-1}+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{n-1}{n})^{k-1}\\ &= \frac{n-1}{2n}\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{1}{n})^{i}+\frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{\infty}(\frac{n-1}{n})^{i}\\ &= \frac{n-1}{2n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}}+\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{1-\frac{n-1}{n}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{On a bien défini une loi de probabilité de } X}$

b) *Montrons que X possède une espérance et donnons sa valeur.*
Pour montrer l'existence de l'espérance, il suffit de montrer que $\sum_{k\geq 1}|k\mathbb{P}(X=k)|$ converge.
Le terme général de cette série étant positif, il s'agit de montrer que $\sum_{k\geq 1}k\mathbb{P}(X=k)$ converge.

Or $\sum_{k\geq 1}k\cdot(\frac{1}{n})^{k-1}$ et $\sum_{k\geq 1}k\cdot(\frac{n-1}{n})^{k-1}$ sont deux séries géométriques dérivées convergentes, donc $\sum_{k\geq 1}k\mathbb{P}(X=k)$ converge comme combinaison linéaire de deux séries convergentes.
Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1}^{+\infty}k\cdot\mathbb{P}(X=k) &= \frac{n-1}{2n}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot(\frac{1}{n})^{k-1}+\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot(\frac{n-1}{n})^{k-1}\\ &= \frac{n-1}{2n}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{(1-\frac{n-1}{n})^2}=\frac{n}{2(n-1)}+\frac{n}{2}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E(X) \text{ existe et vaut : } E(X)=\frac{n^2}{2(n-1)}}$

3. *On rappelle qu'on a décidé de coder l'événement U par 1 et l'événement $\overline{U}$ par 0.*

a) La bibliothèque utilisée pour simuler la loi uniforme s'appelle `random` et la fonction qui permet sous Python de retourner de façon équiprobable un entier au hasard dans l'intervalle $[\![0,1]\!]$ s'appelle `randint`. Il suffit d'appeler `random.randint(0,1)`

b) On suppose avoir importé la bibliothèque `random` sous l'appellation `rdm`. Complétons le programme suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience décrite dans cette partie :
Le hasard de la fonction décide de l'urne dans laquelle a lieu le tirage. Si « `urne=0` » est réalisé alors on tire dans l'urne V et on a donc une chance sur n de tirer une noire à chaque tirage. On prend donc un entier au hasard entre 0 et $n-1$ et on s'arrête dès que `tirage=0` (tirage d'une noire).
Si « `urne=1` » est réalisé alors on tire dans l'urne U et on a donc $n-1$ chances sur n de tirer une noire à chaque tirage. Tant que le tirage parmi les entiers de 0 à $n-1$ vaut 0, on recommence jusqu'à obtenir le premier tirage strictement supérieur à 0. Soit :

```python
def simulX(n:int) -> int:
    urne = rdm.randint(0, 1)
    x = 0
    if urne == 0: # urne V
        while rdm.randint(0, n-1) != 0: # c'est une blanche
            x += 1
    else: # urne U
        while rdm.randint(0, n-1) == 0: # c'est la blanche
            x += 1
    return x+1
```

Partie 2

Dans cette partie, le protocole est le suivant : les tirages qui suivent le premier tirage ont lieu dans l'urne U si le tirage précédent a donné une boule blanche et dans l'urne V sinon.

1. a) Comme dans la première partie et pour les mêmes raisons, $\boxed{\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{2}}$.

   b) Cette fois, pour $k \geq 2$, $(X=k)$ est réalisé si et seulement si le premier tirage a amené une blanche (quelle que soit l'urne) avec la probabilité $\frac{1}{2}$, tous les tirages suivants ayant lieu ensuite dans l'urne U jusqu'à enfin obtenir une boule noire au $k^{\text{ième}}$ tirage.
   Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 ... \cap B_{k-1} \cap N_k) \\
&= \mathbb{P}(B_1) \cdot \mathbb{P}(B_2/B_1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(B_{k-1}/B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_{k-2}) \cdot \mathbb{P}(N_k/B_1 \cap ... \cap B_{k-1}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right) \cdot ... \cdot \left(\frac{1}{n}\right)\frac{n-1}{n}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\frac{n-1}{n}}$;

2. Commençons par établir qu'il s'agit d'une loi de probabilité :
   On note que $\displaystyle\sum_{k\geq 2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} = \sum_{i\geq 0}\left(\frac{1}{n}\right)^{i}$ est une série convergente.
   Donc $\sum \mathbb{P}(X=k)$ converge et
   $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\mathbb{P}(X=k) = \frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{\infty}(\frac{1}{n})^{k-2} = \frac{n-1}{2n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$
   Et donc, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$, ce que nous nous devions de vérifier...
   Pour l'existence et la valeur de $E(X)$ une astuce de calcul consiste à évaluer $E(X-1)$. En effet $\displaystyle\sum_{k\geq 2}(k-1)\mathbb{P}(X=k)$ est de même nature que $\displaystyle\sum_{k\geq 2}(k-1)(\frac{1}{n})^{k-2} = \sum_{k\geq 1}(k)(\frac{1}{n})^{k-1}$ qui est une série géométrique dérivée convergente $(0<\frac{1}{n}<1)$
   On peut donc en déduire que $E(X-1)$ existe et vaut :

$$\begin{aligned}
E(X-1) &= \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\mathbb{P}(X=k) \\
&= \frac{n-1}{2n}\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)(\frac{1}{n})^{k-2} = \frac{n-1}{2n}\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^2} = \frac{n}{2(n-1)}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E(X) \text{ existe et vaut } E(X) = E(X-1)+1 = \frac{n}{2(n-1)}+1 = \frac{3n-2}{2(n-1)}}$

✐ **Pour une méthode plus classique, on écrira** :
$\displaystyle\sum_{k\geq 2}k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}$ est une série géométrique dérivée convergente car $0<\frac{1}{n}<1$ donc

$$\sum_{k\geq 2}\frac{1}{2}\frac{n-1}{n}k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} = \sum_{k\geq 2}\frac{1}{2}\frac{n-1}{n}kn\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} = \sum_{k\geq 2}\frac{n-1}{2}k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \quad \text{converge}$$

car la multiplication par le scalaire $\lambda = \dfrac{n-1}{2}$ ne change pas la nature de la série.
Donc $E(X)$ existe et vaut :

$$\begin{aligned}
E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k) &= \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}\sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^2} - 1\right) = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}\left(\frac{n^2}{(n-1)^2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}\frac{2n-1}{(n-1)^2} = \boxed{\frac{3n-2}{2(n-1)}}
\end{aligned}$$

3. *Avec les mêmes conventions et les mêmes notations que celles de la partie 1, écrivons un programme permettant le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience décrite dans cette partie.*
Au premier tirage, on a une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ de tirer une blanche et sinon, c'est qu'on a obtenu une noire au premier tirage, c'est-à-dire que B_1 est réalisé. Ensuite, tous les tirages ont lieu dans l'urne U jusqu'à obtenir une noire. A chaque fois, on a la probabilité $\dfrac{1}{n}$ de poursuivre et $\dfrac{n-1}{n}$ de s'arrêter. On peut donc écrire :

```
def simulX2(n):
   hasard=rdm.randint(0,1) # tirage d'une blanche ou d'une noire
   x=1
   if hasard == 0: # tirage d'une blanche au 1er tirage ; on est ensuite dans U
     tirage = rdm.randint(0,n-1) # n numéros possibles de 0 à n-1
     x = x+1
     while tirage == 0: # on a la blanche. On recommence...
       x = x+1
       tirage = rdm.randint(0,n-1)
   return x
```

Problème 2 :

On rappelle que l'urne contient initialement 2 boules blanches et 2 boules noires et qu'on effectue des tirages avec remise de c boules noires jusqu'à obtenir la première boule blanche (si on finit par obtenir une boule blanche...) ou indéfiniment si on n'obtient jamais de boule blanche.

Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement : « Les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules noires »et X la variable aléatoire égale au rang du tirage auquel on a obtenu une boule blanche si on finit par obtenir une boule blanche et égale à 0 sinon.

1. On suppose que $c = 0$.

   a) *Déterminons $X(\Omega)$ et montrons que $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*
   D'après l'énoncé X prend toute valeur entier naturel non nul (rang de la première blanche) mais également 0 dans le cas où on n'obtient jamais de boules blanches. Dès lors, $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$

   Par ailleurs, si on note
   — B_n l'événement : « Obtenir une boule blanche au n-ième tirage »
   — N_n l'événement : « Obtenir une boule noire au n-ième tirage »
   Alors :
   $$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}$$
   $$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(N_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ (formule des prob. conditionnelles)}$$
   Plus généralement, $\forall n \geq 1$,
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = n) &= \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{n-1} \cap B_n) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2) \cdots \mathbb{P}_{N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1}}\mathbb{P}(B_n) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ (formule des prob. composées)}\end{aligned}$$

   ✐*Remarque :* Dans ce cas particulier de $c = 0$, on pouvait également considérer que les épreuves étaient indépendantes puisque la composition de l'urne ne change pas. En ce sens, les événements associés à ces épreuves sont mutuellement indépendants. Une autre rédaction devient donc :
   $$\mathbb{P}(X_n) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_{n-1} \cap B_n) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}(N_2) \cdots \mathbb{P}(N_{n-1})\mathbb{P}(B_n)$$
   Conclusion : $\boxed{\forall n \in X(\Omega) = \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^n}}$

   b) *Justifions la convergence de $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X = n)$ et calculons $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)$:*
   $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X = n)$ est de même nature que $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ qui est une série géométrique convergente donc elle converge. Dès lors,
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$
   Nous pouvons en déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$. En effet, puisque $X(\Omega) = \mathbb{N}$, alors
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = 0) + 1 = 1$$
   Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(X = 0) = 0}$

   c) On rappelle que l'espérance d'une variable aléatoire discrète X existe si la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} n\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument et que, si c'est le cas, $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{n \in X(\Omega)} n\mathbb{P}(X = n)$.

$$\sum_{n\geq 0} n|\mathbb{P}(X=n)| = \sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n} \text{ est de même nature que } \sum_{n\geq 1} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée convergente car $q = 1/2 \in]0,1[$.
Dès lors $\boxed{\mathbb{E}(X) \text{ existe}}$.

Calculons sa valeur : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(X=n) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-1/2)^2} = 2.$

2. *Calculons $\mathbb{P}(X=3)$ en fonction de c quelconque*
C'est une application directe de la formule des probabilités composées : Pour tout $c \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap B_3) = \mathbb{P}(N_1)\mathbb{P}_{N_1}(N_2)\mathbb{P}_{N_1\cap N_2}(B_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2+c}{4+c}\cdot\frac{2}{4+2c}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(X=3) = \frac{1}{2(4+c)}}$

3. a) *Écrivons une fonction **`simulExp()`** qui prend en argument la valeur de c et un entier naturel s et renvoie le rang d'apparition d'une boule blanche si une boule blanche a été obtenue et 0 sinon.*

On choisit de nommer `Nb` et `Nn` respectivement le nombre de boules blanches et le nombre de boules noires au moment de chaque tirage.
Ainsi, au moment du premier tirage (`t = 1`), on a `Nb = 2 = Nn`.
On effectue les tirages jusqu'à obtenir une boule blanche, c'est-à-dire tant que on tire une boule noire. La probabilité de tirer une noire étant de `Nn/(Nb+Nn)`, il y a deux possibilités pour modéliser cette expérience, selon qu'on utilise `rdm.randint()` ou `rdm.random()`.
Dans le premier cas, on suppose les deux boules blanches numérotées 1 et 2, les boules noires noires étant numérotées de 3 à `N=Nb+Nn`. Alors, on tire une noire si, et seulement si, `rdm.randint(1,Nb+Nn)>2`.
Dans le second cas, on tire une noire si, et seulement si, `rdm.random()<=Nn/(Nb+Nn)`.
Nous choisissons ci-dessous la première écriture.

Pour autant, il ne faut pas oublier le cas où aucune blanche n'est tirée... Dans ce cas, on prévoie l'entier naturel `s`, suffisamment grand pour penser qu'au delà de cette valeur de `s`, la probabilité d'obtenir une blanche est proche de 0 (on a ajouté que des noires dans l'urne, en plus ou moins grand nombre selon la valeur de c...).
On répète donc les tirages TANT QUE on a une noire et que $t \leq s$.
Une fonction possible est donc la suivante :

```
def simulExperience(c,s):
Nb,Nn = 2,2
t = 1 # numéro du tirage
while rdm.randint(1,Nb+Nn)>2 and t<=s : # on tire une noire
    Nn += c # on ajoute c noires     t += 1
if t == s+1: # on a jamais obtenu de blanche au cours des s premiers tirages
    t = 0
return t
```

mais on peut se passer d'un boucle « Tant que » et utiliser une boucle « Pour » :

```
def simulExperience(c,s):
   t,B,N = 0,2,4 # initialisation
   for k in range(s):
      t += 1
      if rdm.random()<B/N:
         return t
      else:
         N += c
   return 0
```

```
def simulExperience(c,s):
   for k in range(s):
      if rdm.random() > (2+k*c)/(4+k*c):
         return k+1
   return 0
```

b) *Écrivons une fonction* `estimEsp(c,s,m)` *qui utilise* `simulExp()` *et qui permette, sans avoir à utiliser la bibliothèque* `numpy`*, d'estimer l'espérance de X :*

```
def estimEsp(c,s,m):
    cpt = 0 # initalisation du compteur
    for k in range(m): # on répète m fois l'expérience
       cpt += simulExperience(c,s)
    return cpt/m
```

On nous donnait quelques résultats :

```
estimEsp(0,10,1000) = 1.956 ; estimEsp(0,50,1000) = 2.019 ;
estimEsp(0,100,1000) = 2.011

estimEsp(1,10,1000) = 2.174 ; estimEsp(1,50,1000) = 2.575 ;
estimEsp(1,100,1000) = 2.880 ; estimEsp(1,200,10000) = 3.0843

estimEsp(2,10,1000) = 2.09 ; estimEsp(2,50,1000) = 3.533 ;
estimEsp(2,100,1000) = 4.209 ; estimEsp(2,500,10000) = 5.4888
```

L'intuition nous laisse penser que, plus c est grand, plus le temps moyen d'arrivée de la première boule blanche sera grand. Les résultats ci-dessus permettent d'appuyer cette première hypothèse.

Dans le cas $c = 0$, pour mille répétitions de l'expérience, on obtienne une moyenne proche de 2 qui vient conforter la valeur de $\mathbb{E}(X) = 2$ obtenue à la question 1.
Pour $c = 1$, les valeurs proposées montrent le rôle important de s. En effet, même si la probabilité d'obtenir une blanche au delà du centième tirage est faible ($\mathbb{P}(B_{100}) = 2/(4 + 99) = 2/103$) la moyenne des rangs de la première boule blanche continue d'augmenter quand s varie de 10 à 200.
Pour autant, ces valeurs laissent penser que $\mathbb{E}(X)$ est proche de 3.
Pour $c = 2$, plus s augmente, plus la valeur de $\mathbb{E}(X)$ est grande (alors que, cette fois $\mathbb{P}(B_{100}) = 2/(4+99*2) = 2/202 = 1/101$). On peut faire l'hypothèse que $\mathbb{E}(X) > 5.5$ mais rien ne permet d'assurer sa valeur si elle existe...

✐ *Remarque :* En toute rigueur, d'un point de vue théorique, il faudrait ici citer le théorème central limite qui assure que, dans le cas d'une répétition indépendante d'une même variable aléatoire, d'espérance et de variance constante, alors la moyenne expérimentale converge vers l'espérance de cette variable aléatoire. C'est bien ce théorème qui permet de faire le lien entre le calcul statistique de la moyenne et l'estimation de l'espérance...

c) *Montrons comment il est possible d'utiliser* `simulExp()` *pour écrire une fonction* `estimProbZero(c,s,m)` *retournant une estimation de $\mathbb{P}(X = 0)$:*

Il suffit de créer une liste formée des temps d'attente de la première boule blanche (ou d'un 0 si aucune blanche au cours des s premiers tirages) et dénombrer les 0 de cette liste. En divisant par m, on calcule la fréquence d'apparition du 0 au cours de m réalisations indépendantes de l'expérience. La loi faible des grands nombres (sur laquelle nous reviendrons également en fin d'année) nous assure que cette fréquence converge vers $\mathbb{P}(X = 0)$ lorsque m tend vers l'infini.

On écrira ainsi :

```
def estimProbZero(c,s,m):
    return [simulExperience(c,s) for k in range(m)].count(0)/m
```

Voici quelques exemples d'exécution de cette fonction : `estimProbZero(1,100,1000) = 0.001`; `estimProbZero(2,100,1000) = 0.011`; `estimProbZero(5,100,1000) = 0.073`

On peut supposer que, quelle que soit la valeur de c, $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ (y-compris si c est grand....)

4. *Démontrons que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(E_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2+kc}{4+kc}$

   Il s'agit cette fois encore de la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(N_1 \cap \cdots \cap N_n) = \mathbb{P}(N_1) \cdots \mathbb{P}_{N_1 \cap \cdots \cap N_{n-1}}(N_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2+c}{4+c} \cdots \frac{2+(n-1)c}{4+(n-1)c}$$

   Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(E_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2+kc}{4+kc}}$

5. On suppose dans cette question que $c = 1$.

   a) *Calculons* $\mathbb{P}(E_n)$ *pour tout entier naturel* n *non nul :* C'est une application immédiate de ce qui précède.

   Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(E_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2+k}{4+k} = \frac{2 \cdot 3}{(2+n)(3+n)} \text{ par télescopages}}$

   b) *Montrons que :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) = 1 - \mathbb{P}(E_n)$ *pour en déduire la valeur de* $\mathbb{P}(X=0)$ *:*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (X=k)\right) \text{ car événements incompatibles} \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{(X=k)}\right) = 1 - \mathbb{P}(E_n)\end{aligned}$$

   Or, par définition d'une loi de probabilité, sachant que $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on sait que $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X=k)$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1 = \mathbb{P}(X=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)$.

   D'où : $\mathbb{P}(X=0) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)$.

   Utilisons maintenant le début de la question... Soit $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k)$

   Si on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k)$. Alors $S = \displaystyle\mathop{lim}_{n\to\infty} S_n = \mathop{lim}_{n\to\infty} (1 - \mathbb{P}(E_n)) = 1$ puisque, d'après la question qui précède, $\mathbb{P}(E_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{6}{n^2}$ tend vers 0 dans n tend vers l'infini.

   Dès lors, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1$ et donc

$$\boxed{\mathbb{P}(X=0) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1 - 1 = 0}$$

   c) *Démontrons que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}$. Pour tout n entier non nul :

$$\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(E_{n-1} \cap B_n) = \mathbb{P}(E_{n-1}) \cdot \mathbb{P}_{E_{n-1}}(B_n) = \frac{6}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{2}{4+(n-1)1}$$

   Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}, \forall n \in \mathbb{N}^*}$

   Montrons maintenant que $\sum \mathbb{P}(X=n)$ converge et calculons sa somme pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{2}\frac{n+3-(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

Soit, par télescopages :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{6}{(k+1)(k+2)} - \frac{6}{(k+2)(k+3)} \right) = \frac{6}{(1+1)(1+2)} - \frac{6}{(n+2)(n+3)}$$

Or $\underset{n\to\infty}{lim} \dfrac{6}{(n+2)(n+3)} = 0$, donc (S_n) converge avec $\underset{n\to\infty}{lim} S_n = 1$.

Conclusion : $\boxed{\sum \mathbb{P}(X=n) \text{ STP convergente et } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=n) = 1}$

d) On souhaite montrer l'existence et calculer la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

i. D'après le théorème de transfert, $\mathbb{E}(X+3)$ existe si la série $\sum_{n\geq 0}(n+3)\mathbb{P}(X=n)$ converge absolument.
Le terme général de cette série étant positif, la convergence absolue n'est autre que la convergence de la série.
On note que :

$$\sum_{n\geq 0}(n+3)\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n\geq 1} \frac{12}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{12}{n+1} - \frac{12}{n+2} \right)$$

(✐ *Remarque :* on rappelle qu'on a démontré précédemment que $\mathbb{P}(X=0) = 0$, ce qui explique qu'on ait commencé à $n = 1$...)
C'est une série télescopique. On passe donc par sa somme partielle...

Soit $T_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{12}{k+1} - \dfrac{12}{k+2} \right) = 12 \sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2} \right)$. Par télescopage,

$$T_n = 12 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right)$$

On en déduit que $\underset{n\to\infty}{lim} T_n$ existe et vaut $\dfrac{12}{2} = 6$.

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(X+3) \text{ existe et vaut } 6}$

ii. On peut en déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$ en utilisant la linéarité de l'espérance.
En effet $\mathbb{E}(X+3) = \mathbb{E}(X) + 3 = 6 \Leftrightarrow \mathbb{E}(X) = 6 - 3 = 3$.
Ceci confirme l'hypothèse faite en 3.c)

6. On suppose dans cette question que $c = 2$.

a) *Calculons $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier naturel non nul et déduisons-en la valeur de $\mathbb{P}(X=0)$:*
On exploite à nouveau la question 4. en prenant cette fois $c = 2$. On obtient :

$$\mathbb{P}(E_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2+2k}{4+2k} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1+k}{2+k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{2}{n+1}$$

Soit $\boxed{\mathbb{P}(E_n) = \dfrac{1}{n+1}}$ et donc $\underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{P}(E_n) = 0$

En reprenant le raisonnement mené en 5.c), on a : $\underset{n\to\infty}{lim} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \underset{n\to\infty}{lim} (1 - \mathbb{P}(E_n)) = 1$.

Dès lors :

$$\boxed{\mathbb{P}(X=0) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = 0}$$

b) *Donnons la loi de X :*
Au regard de la question qui précède, on peut désormais considérer que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Par ailleurs, pour tout entier naturel n non nul,

$$\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(E_{n-1} \cap B_n) = \mathbb{P}(E_{n-1}) \cdot \mathbb{P}_{E_{n-1}}(B_n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{4+2(n-1)}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{2}{n(2n+2)} = \dfrac{1}{n(n+1)},\ \forall n \in \mathbb{N}^*}$

c) *La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?* La réponse est non car la série

$$\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(X=n) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1} \text{ est une série harmonique divergente}$$

Ce résultat confirme les résultats de la simulation faite en 3.c). A savoir, quand $c=2$, il est impossible de mettre en évidence expérimentalement une moyenne qui, plus `s` sera grand, plus elle sera importante...

7. On souhaite généraliser à tout c entier naturel non nul, les valeurs de $\mathbb{P}(X=0)$ obtenues précédemment.

a) On utilise le résultat de 4. et on compose de chaque côté de l'égalité par le logarithme népérien.
Dès lors :

$$\begin{aligned}\ln(\mathbb{P}(E_n)) &= \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{2+kc}{4+kc}\right)\\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{4+kc}{2+kc}\right) = -\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{2}{2+kc}\right)\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\ln(\mathbb{P}(E_n)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\dfrac{2}{2+kc}\right)}$

b) *Démontrons le résultat suivant : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites positives et si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature :*

Par définition : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow \underset{n\to\infty}{lim} \dfrac{u_n}{v_n} = 1 \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, 0 < \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{u_n}{v_n} \leq \dfrac{3}{2}$ Soit : $\forall n \geq n_0, 0 < \dfrac{v_n}{2} \leq u_n \leq \dfrac{3v_n}{2}$.

Il suffit d'appliquer par deux fois le théorème de convergence par comparaison sur les séries à termes positifs pour conclure :

— Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \dfrac{v_n}{2}$ converge et donc $\sum v_n$ converge [inégalité de gauche]

— Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum \dfrac{3v_n}{2}$ converge et donc $\sum u_n$ converge [inégalité de droite]

Par contraposition, on obtient que si $\sum v_n$ diverge alors c'est le cas de $\sum u_n$ et que si $\sum u_n$ diverge, alors c'est le cas de $\sum v_n$.

Conclusion : $\boxed{\sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature}}$

c) *Déterminons* $\underset{n\to\infty}{lim}\, \mathbb{P}(E_n)$ *pour en déduire* $\mathbb{P}(X=0)$ *:*
De la question 7.a), à l'aide de l'équivalent : $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, on déduit que

$$-\ln(\mathbb{P}(E_n)) \underset{u\to 0}{\sim} \frac{2}{kc}$$

Or $\sum \frac{2}{kc}$ est de même nature que $\sum \frac{1}{k}$ qui est une série harmonique divergente.

Dès lors, par application du résultat rappelé en 7.b), on a : $-\ln(\mathbb{P}(E_n))$ diverge.
Ou encore $\underset{n\to\infty}{lim}\,(-\ln(\mathbb{P}(E_n))) = +\infty \Leftrightarrow \underset{n\to\infty}{lim}\,(\ln(\mathbb{P}(E_n))) = -\infty \Leftrightarrow \underset{n\to\infty}{lim}\,\mathbb{P}(E_n) = 0$.

Toujours par ce même raisonnement utilisé en 5.c) et 6.a), on déduit que $\boxed{\mathbb{P}(X=0)=0}$.

Problème 3 : AgroB - 2006

Partie I : Premier exemple

Lu dans le rapport de Jury : *Cette partie a été en général assez bien traitée. Il faut toutefois relever certaines erreurs qui ont été commises. L'information sur le modèle a été parfois mal comprise. Par exemple pour la question 1.a), certains candidats affirment que la loi de D_n est la même que celle de D_1. Dans cette même question, on trouve parfois $u_1 = \frac{1}{2}$ (une chance sur deux qu'il y ait un descendant).*
Ces erreurs ne les empêchent pas de continuer et de trouver ensuite les résultats demandés.

1. a) $u_0 = \mathbb{P}(D_0 = 0) = 0$, car $D_0 = 1$ et $u_1 = \mathbb{P}(D_1 = 0) = p_0$, par définition.
   Dans ce premier exemple, après chaque traitement : la cellule est détruite avec une probabilité p_0 ou est conservée avec une probabilité $p_1 = 1 - p_0$. Chaque génération comporte au maximum une cellule, donc pour tout entier n, D_n ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.

   b) Si $D_n = 0$, il n'y a plus de cellule à l'instant n. Pour $k \in \mathbb{N}$, aux instants $n + k$ il n'y a aucune cellule, car il n'y a pas de génération spontanée.

2. a) D_1 ne prend que les valeurs 0 ou 1, donc $\{(D_1 = 0), (D_1 = 1)\}$ est un système complet d'événements.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrivons la formule des probabilités totales :
   $\mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(D_{n+1} = 0|D_1 = 0)\mathbb{P}(D_1 = 0) + \mathbb{P}(D_{n+1} = 0|D_1 = 1)\mathbb{P}(D_1 = 1)$.
   Si $(D_1 = 0)$, alors on a vu que $\forall n \in \mathbb{N},\ (D_{n+1} = 0)$, donc $\mathbb{P}(D_{n+1} = 0)|D_1 = 0) = 1$.
   Si $(D_1 = 1)$, alors les cellules de la $n+1$-ème génération de C_0 sont celles de la n-ème génération de l'unique enfant de C_0. Tout revient à prendre comme premier instant l'instant 1 (en fait à décaler la chaîne). Donc $P(D_{n+1} = 0|D_1 = 1) = P(D_n = 0) = u_n$.
   Finalement $\boxed{u_{n+1} = P(D_{n+1} = 0) = p_0 + u_n p_1}$.

   b) On note que (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
   La méthode usuelle consiste à chercher $c \in \mathbb{R}$ tel que $c = p_0 + c.p_1 \Leftrightarrow c = \dfrac{p_0}{1 - p_1} = \dfrac{p_0}{p_0} = 1$
   Ici, on nous donne directement $c = 1$ et on nous fait travailler classiquement sur la suite $v_n = 1 - u_n$
   Alors $v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - p_0 - p_1 u_n = p_1(1 - u_n) = p_1 v_n$.
   La suite (v_n) est donc géométrique de raison p_1.
   On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = p_1^n v_0 = p_1^n$ et $\boxed{u_n = 1 - p_1^n}$.
   Le réel p_1 est strictement compris entre 0 et 1, donc
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

   Rapport de Jury : *On lit parfois $0 \leq p_1 \leq 1$ ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_1^n = 0$...*

   c) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'événement $(G > n)$ est réalisé si et seulement si le nombre de descendants à la (n+1)ième génération n'est pas nul, c'est-à-dire l'événement $(D_{n+1} > 0)$ est réalisé. On peut donc considérer que : $(G > n) = (D_{n+1} > 0)$.
   $\mathbb{P}(G > n) = 1 - \mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = 1 - u_{n+1} = p_1^{n+1}$.
   L'événement $(G > n - 1)$ est réunion des événements incompatibles $(G = n)$ et $(G > n)$ (même pour $n = 0$, car alors $\mathbb{P}(G > -1) = 1$). Donc :
   $\mathbb{P}(G = n) = \mathbb{P}(G > n - 1) - \mathbb{P}(G > n) = (1 - u_n) - (1 - u_{n+1}) = p_1^n - p_1^{n+1} = \boxed{p_0 p_1^n}$.
   On note par ailleurs que $G(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Pour justifier l'existence de $\mathbb{E}(G)$ on étudie la série $\sum n\mathbb{P}(G = n) = \sum p_0 p_1 n p_1^{n-1}$ qui est de même nature que $\sum n p_1^{n-1}$ qui une série géométrique dérivée convergente car $0 < p_1 < 1$
   D'où :
   $$\mathbb{E}(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(G = n) = p_0 p_1 \sum_{n=1}^{+\infty} n p_1^{n-1} = p_0 p_1 \frac{1}{(1 - p_1)^2} = \frac{p_0 p_1}{p_0^2}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(G) = \dfrac{p_1}{p_0}}$.

Remarque : Si on connaît la loi géométrique, il était ici possible de la faire apparaître et de gagner du temps sur les calculs. En effet :
Si on pose $G_1 = G + 1$. Dès lors, $G_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(G1 = n) = \mathbb{P}(G = n-1) = p_0 p_1^{n-1}$.
On a donc $\mathbb{E}(G_1) = \dfrac{1}{p_0} = E(G) + 1$ par linéarité de l'espérance.
D'où $\boxed{\mathbb{E}(G) = \dfrac{1}{p_0} - 1 = \dfrac{1-p_0}{p_0} = \dfrac{p_1}{p_0}.}$

Rapport de Jury : *L'égalité des évènements $(G > n)$ et $(D_{n+1} > 0)$ est rarement clairement justifiée. Pour établir ensuite la valeur de $\mathbb{P}(G = n)$ on utilise parfois (bien évidemment à tort) l'indépendance des variables D_n et leur équidistribution*

Partie II : Deuxième exemple

1. a) <u>si $n = 0$:</u> $\mathbb{P}_{(D_1=0)}(D_1 = 0) = 1 = u_0^0$ (événement certain) et $\mathbb{P}_{(D_1=k)}(D_1 = 0) = 0 = u_0^k$ pour tout $k \in [\![1, 2]\!]$ (événement impossible) puisque $u_0 = 0$.
<u>Si $n \in \mathbb{N}^*$:</u> on a déjà vu que $\mathbb{P}(D_{n+1} = 0 | D_1 = 0) = 1 = u_n^0$ et $\mathbb{P}(D_{n+1} = 0 | D_1 = 1) = u_n$.
Si $((D_1 = 2)$ est réalisé, alors C_0 a 2 enfants C_1^1 et C_1^2.
$(D_{n+1} = 0)$ est réalisé si et seulement si C_1^1 n'a pas d'enfant à la n-ème génération et C_1^2 n'a pas d'enfant à la n-ème génération.
Ces deux événements sont par hypothèse indépendants et ont chacun une probabilité u_n, car chaque enfant a même comportement que C_0.
Donc $\mathbb{P}(D_{n+1} = 0 | D_1 = 2) = \mathbb{P}(D_n = 0)^2 = u_n^2$.

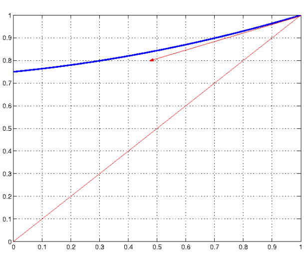
   b) $\{(D_1 = k)\}_{0 \leq k \leq 2}$ est un système complet d'événements, utilisons la formule des probabilités totales :
$$\mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(D_{n+1} = 0 | D_1 = k)\mathbb{P}(D_1 = k).$$
Finalement $u_{n+1} = \mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} u_n^k p_k = p_0 + p_1 u_n + p_2 u_n^2$.

2. a) Soit $x \in [0, 1]$: $f(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 \geq p_0 > 0$; $f'(x) = p_1 + 2p_2 x \geq p_1 \geq 0$; $f''(x) = 2p_2 > 0$;
$f(1) = p_0 + p_1 + p_2 = 1$; $f'(1) = p_1 + 2p_2 = (1 - p_0 - p_2) + 2p_2 = 1 - p_0 + p_2$.

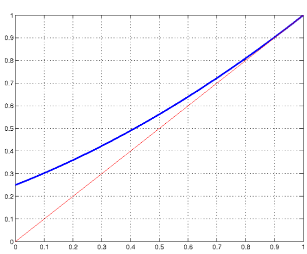
   b) On cherche dans les trois cas p_0, p_1 et p_2 tels que : $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ et $(f'(1) < 1 \Leftrightarrow p_2 < p_0)$, $(f'(1) = 1 \Leftrightarrow p_2 = p_0)$ et $(f'(1) > 1 \Leftrightarrow p_2 > p_0)$.

   On peut donc considérer les exemples suivants :

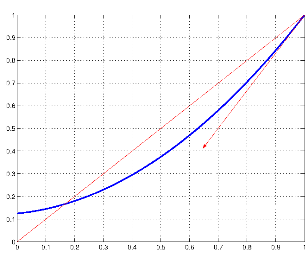
$f(x) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{8}x + \dfrac{1}{8}x^2$



$f(x) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}x^2$



$f(x) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8}x + \dfrac{3}{4}x^2$



Rapport de Jury : *On trouve peu de bonnes représentations graphiques des trois cas : on trouve même des représentations avec $p_0+p_1+p_2>1$ ou encore telles que p_0 ou $p_2=0$. De plus certains candidats reprennent ces cas particuliers pour traiter la question suivante 2.c)*

c) Appelons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.
Soit $x \in [0,1]$. $f(x)-x = p_0+(p_1-1)x+p_2x^2 = p_0-(p_0+p_2)x+p_2x^2$
$f(x)-x = p_0(1-x)+p_2x(x-1) = (1-x)(p_0-xp_2)$.
Le signe de $f(x)-x$ **est celui de** p_0-xp_2.

Si $f'(1)\leq 1$, (ce qui équivaut à $p_2\leq p_0$), alors $\forall x\in[0,1],\ p_0-xp_2\geq p_0-p_2\geq 0$, donc $f(x)\geq x$ et $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ.

Si $f'(1)=1$, (ce qui équivaut à $p_2=p_0$), alors $f(x)-x=p_0(1-x)^2=p_0(x-1)^2$, d'où : $f(x)=1+(x-1)+p_0(x-1)^2=1+(x-1)+o(x-1)$.
L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est donc $y=x$, c'est l'équation de Δ.
Autre méthode : On utilise l'équation de la tangente, à savoir : $y=f(1)+f'(1)(x-1)=1+(x-1)=x$ d'après les calculs précédents (C.Q.F.D.).

Si $f'(1)>1$, (ce qui équivaut à $p_2>p_0$), alors $f(x)>x \iff x<\dfrac{p_0}{p_2}$.

$\mathcal{C}_f$ est en dessous de la droite Δ pour $x<\dfrac{p_0}{p_2}$, coupe Δ au point d'abscisse $\dfrac{p_0}{p_2}$, puis passe au dessus de Δ... se rapporter au graphe !

d) La suite (u_n) est définie par $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)$.
Posons $a=\min(\dfrac{p_0}{p_2},1)$. Alors $f(\dfrac{p_0}{p_2})-\dfrac{p_0}{p_2}=0$ et $f(1)-1=0$, donc $f(a)=a$.
Par récurrence on montre facilement que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in[0,a]$ (en effet l'intervalle $[0,a]$ est stable par f).

x	0		a
$f'(x)$	$\vert\vert$	$+$	
$f(x)$	p_0	$\nearrow$	a

On note que sur $[0,a]$ la fonction f est croissante... et par une récurrence à écrire La suite (u_n) est monotone.
Par ailleurs, dans les trois cas étudiés, sur l'intervalle $[0,a]$ on a $f(x)\geq x$.
Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)\geq u_n$.
La suite (u_n) est croissante, majorée par a, donc converge vers une limite $l\leq a$.

Rapport de Jury : *Dans la question 2.d) l'erreur fréquemment commise consiste à déduire directement (u_n) croissante de f croissante*

e) f étant continue, l vérifie $f(l)=l$, donc $l=\dfrac{p_0}{p_2}$ ou $l=1$. Comme $l\leq a$, on a $l=a$.

Le traitement est efficace si et seulement si $a=1$, c'est à dire $p_0\geq p_2$.

3. a) — *Première méthode* :
On reconnaît le théorème des accroissements finis...
Pour $x\in[0,a]$: $f\in C^1([x,1])$ donc $\exists c\in]x,1[\ /\ f(1)-f(x)=(1-x).f'(c)$. Or f' est croissante sur $[0,1]$ donc si $x<c<1$ alors $f'(c)<f'(1)$.
D'où $f(1)-f(x)\leq(1-x)f'(1)$.
En notant que $f(1)=1$ et en prenant $x=u_n\in[0,a]$ on obtient :

$\boxed{1 - u_{n+1} \leq (1 - u_n) f'(1)}$

— *Seconde méthode :*
Soit $x \in [0, 1]$: $f(x) - 1 = p_0 + (1 - p_0 - p_2)x + p_2 x^2 - 1$
$f(x) - 1 = p_0(1 - x) + (x - 1) + p_2(x^2 - x) = (1 - x)(p_0 - 1 - p_2 x)$.
$f(x) - 1 + (1 - x)f'(1) = (1 - x)(p_0 - 1 - p_2 x + 1 - p_0 + p_2) = p_2(x - 1)^2 \geq 0$.
Or pour tout entier n, $u_n \in [0, 1]$, on peut choisir $x = u_n$: $1 - u_n + 1 \leq (1 - u_n)f'(1)$.

Par récurrence immédiate : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 1 - u_n \leq (1 - u_0) f'(1)^n}$

Rapport de Jury : *Les accroissements finis sont souvent mal utilisés, et ceux qui s'en dispensent se perdent souvent dans les calculs. On trouve également parfois que puisque $f'(1) < 1$ l'inégalité $(1 - u_{n+1}) \leq (1 - u_n)$ implique $(1 - u_{n+1}) \leq f'(1)(1 - u_n)$!*

b) Si $f'(1) = 1$ (ce qui signifie que $p_0 = p_2$), on a :
$\forall x \in [0, 1],\ \dfrac{1}{1 - f(x)} - \dfrac{1}{1 - x} = \dfrac{1}{(1 - x)(1 - p_0 + p_0 x)} - \dfrac{1}{1 - x} = \dfrac{p_0(1 - x)}{(1 - x)(1 - p_0 + p_0 x)}$
$\dfrac{1}{1 - f(x)} - \dfrac{1}{1 - x} = \dfrac{p_0}{1 - p_0 + p_0 x} = \dfrac{p_0}{p_1 + p_0(1 + x)} \leq 1.$
En choisissant $x = u_n$ on obtient $\boxed{\dfrac{1}{1 - u_{n+1}} - \dfrac{1}{1 - u_n} \leq 1}$ (**).

On en déduit que pour tout entier naturel n : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1 - u_{k+1}} - \frac{1}{1 - u_k}\right) = \frac{1}{1 - u_n} - \frac{1}{1 - u_0}$ par application des télescopages. D'où :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{1 - u_{k+1}} - \frac{1}{1 - u_k}\right) = \frac{1}{1 - u_n} - 1 \leq \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$ d'après (**).
Donc $\dfrac{1}{1 - u_n} \leq n + 1$ et comme les deux membres de l'inégalité sont positifs, $1 - u_n \geq \dfrac{1}{n + 1}$.

c) $E(D_1) = 0\mathbb{P}(D_1 = 0) + 1\mathbb{P}(D_1 = 1) + 2\mathbb{P}(D_1 = 2) = p_1 + 2p_2 = f'(1)$.
On a déjà vu que $\mathbb{P}(G > n) = \mathbb{P}(D_{n+1} > 0) = 1 - \mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = 1 - u_{n+1}$.

4. Se rapporter au T.D. 'variables aléatoires'... Si la variable aléatoire X a une espérance :

a) Soit $N \geq 1$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{N} k[\mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k)]$

$$= \sum_{k=1}^{N}[(k - 1)\mathbb{P}(X > k - 1) - k\mathbb{P}(X > k)] + \sum_{k=1}^{N}\mathbb{P}(X > k - 1)$$

$$= 0 - N\mathbb{P}(X > N) + \sum_{k=1}^{N-1}\mathbb{P}(X > k) \qquad \textit{C.Q.F.D}$$

b) $0 \leq N\mathbb{P}(X > N) = N \displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = R_N$.

c) $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} R_N = 0$ car c'est le reste d'une série convergente. Donc $N\mathbb{P}(X > N)$ est compris entre 0 et R_N qui tend vers 0. Par encadrement $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} N\mathbb{P}(X > N) = 0$.
Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}(X = k) + N\mathbb{P}(X > N)$. Donc la série de terme général $\mathbb{P}(X > N)$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = E(X)$.

5. Dans cette question on a besoin d'une réciproque du lemme :
   Supposons que la série de terme général $\mathbb{P}(X > k)$ converge. Alors :
   $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > k) - N\mathbb{P}(X > N) \leq \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.
   La série de terme général positif $k\mathbb{P}(X = k)$ converge, X admet une espérance. On a alors vu que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$.

   <u>Si $f'(1) < 1$</u>, alors $0 \leq \mathbb{P}(G > k) = 1 - u_{k+1} \leq f'(1)^{k+1}$.
   La série géométrique de terme général $f'(1)^{k+1}$ converge, car $f'(1) < 1$. Donc la série de terme général $\mathbb{P}(G > k)$ converge (théorème de comparaison pour une série à termes positifs).
   De plus $0 \leq k\mathbb{P}(G > k) \leq kf'(1)^{k+1}$. Par encadrement $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} k\mathbb{P}(G > k) = 0$.
   La réciproque du lemme nous permet d'affirmer que G admet une espérance et
   $E(G) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(1 - u_{k+1}) = \sum_{k=1}^{+\infty}(1 - u_k)$. De plus $E(G) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} f'(1)^k = \frac{f'(1)}{1 - f'(1)}$.

   <u>Si $f'(1) = 1$</u>, alors $1 - u_n > \dfrac{1}{n+1}$. La série de terme général $\dfrac{1}{n+1}$ diverge. Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs nous permet d'affirmer que la série de terme général $\mathbb{P}(G > n)$ diverge.
   On utilise la contraposée du lemme : $\boxed{G \text{ n'a pas d'espérance.}}$