Devoir : Probabilités et séries numériques (3h00)

Le devoir se compose de trois problèmes. A titre indicatif, on consacrera respectivement 30 mn, 45 mn et 1h30 mn à chacun d'entre eux avant de prendre le temps d'une relecture attentive.
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de l'encadrement des résultats.
L'usage de la calculatrice ***n'est pas*** *autorisé au cours de l'épreuve.*
En annexe, on retrouvera le problème 2 du DS2. Toute question correctement traitée de ce problème viendra se substituer à votre rédaction du 1er octobre et valorisera votre note.

Problème 1 :

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On dispose de deux urnes U et V, l'urne U contenant une boule blanche et $(n-1)$ boules noires et l'urne V contenant une boule noire et $(n-1)$ boules blanches.
Un joueur choisit une urne au hasard pour le premier tirage puis il effectue des tirages d'une boule qui sera remise dans l'urne dont elle provient, selon deux protocoles étudiés dans les deux parties de cet exercice.

Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on note B_i l'événement « on obtient une boule blanche au i^{e} tirage ».

On note X le numéro du tirage pour lequel on obtient, pour la première fois, une boule noire. On admet que X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Pour finir, on note U l'événement « le premier tirage a lieu dans l'urne U ».

Partie 1

Dans cette partie, les tirages qui suivent le premier tirage ont lieu dans l'urne choisie au premier tirage.

① a) Déterminer $\mathbb{P}_U(X=1)$ et $\mathbb{P}_{\overline{U}}(X=1)$ avant d'en déduire $\mathbb{P}(X=1)$.

b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $(X=k)$ à l'aide de certains des événements B_i ou $\overline{B_i}$, puis montrer que :

$$\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right)$$

Vérifier que cette formule reste valable pour $k=1$.

② a) On convient que $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Vérifier qu'on a ainsi défini une loi de probabilité de X en montrant que la série $\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(X=k)$ est une série à termes positifs convergente et que sa somme sur $X(\Omega)$ vaut 1.

b) On dira que X admet un espérance si la série $\sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument et on admettra que sous cette condition $\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)$. Établir que X possède une espérance et donner sa valeur.

③ On décide de coder l'événement U par 1 et l'événement $\overline{U}$ par 0.

a) Quelle bibliothèque et quelle fonction vous permet sous Python de retourner de façon équiprobable un **entier** au hasard dans l'intervalle $[\![0,1]\!]$?

b) On suppose avoir importé la bibliothèque `random` en exécutant : `import random as rdm`. Compléter le programme suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X à l'issue de l'expérience décrite dans cette partie.

```python
def simulX(n:int) -> int:
    urne = ... # choix de l'urne au hasard
    x = 0
    if urne == 0:
        # A compléter (plusieurs lignes possibles)
    else:
        # A compléter (plusieurs lignes possibles)
    return ... # A compléter.
```

c) On souhaite confirmer informatiquement l'espérance de X obtenue en 2.b). Écrire une fonction `estimEspX(n, m)` d'arguments l'entier n et un entier m supposé grand, qui renvoie, sans faire appel à une quelconque fonction prédéfinie Python, la moyenne de m appels successifs à la fonction `simulX(n)`.

Partie 2

Dans cette partie, le protocole est le suivant : les tirages qui suivent le premier tirage dépendent de la couleur de la boule tirée. Ils ont lieu dans l'urne U si le tirage précédent a donné une boule blanche et dans l'urne V sinon.

① a) Donner $\mathbb{P}(X=1)$.

b) En procédant comme dans la partie 1, montrer que : $\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}\right)^{k-2}\dfrac{n-1}{n}$

② Établir que X possède une espérance et donner sa valeur.

③ Avec les mêmes conventions et les mêmes notations que celles de la partie 1, écrire une fonction Python qui renvoie la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience décrite dans cette partie.

Problème 2 :

Une urne contient initialement 2 boules blanches et 2 boules noires.
Soit c un entier naturel. On effectue une série de tirages en suivant le protocole suivant :

— On tire au hasard une première boule. Si elle est blanche, on arrête là. Si elle est noire, on remet la boule noire dans l'urne. Puis on rajoute encore c boules noires dans l'urne.
— On recommence ainsi jusqu'à obtenir une boule blanche (si on finit par obtenir une boule blanche...) ou indéfiniment si on n'obtient jamais de boule blanche.

Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement : « Les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules noires ».
Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage auquel on a obtenu une boule blanche si on finit par obtenir une boule blanche et égale à 0 sinon.

① On suppose que $c=0$.

a) Déterminer $X(\Omega)$ et montrer que $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Justifier la convergence de $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X=n)$ et calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=n)$.
En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X=0)$.

c) On précise que l'espérance d'une variable aléatoire discrète X existe si la série $\sum n\mathbb{P}(X=n)$ converge absolument et que, si c'est le cas, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n\in X(\Omega)} n\mathbb{P}(X=n)$.
Justifier l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et donner sa valeur.

② Calculer $\mathbb{P}(X=3)$ en fonction de c quelconque.

③ a) Écrire une fonction `simulExp(c, s)` qui prend en argument la valeur de c et un entier naturel s et qui doit modéliser l'expérience ci-dessus, avec un nombre maximal de tirages égale à s, étant entendu qu'au delà de ce nombre de tirage, le nombre de boules noires est tel qu'il devient improbable de pouvoir tirer une boule blanche (le programme dans ce cas ne s'arrêterait pas...).
Cette fonction devra renvoyer le rang d'apparition d'une boule blanche si une boule blanche a été obtenue et 0 sinon.
✐ On prendra soin de justifier chacun des choix qu'on a été amené à faire.

b) Écrire une fonction `estimEsp(c, s , m)` qui utilise `simulExp()` et qui renvoie, sans avoir à utiliser la bibliothèque `numpy`, une estimation de l'espérance de X en simulant un grand nombre m de fois l'expérience.

A titre d'exemple, on obtient :

```
estimEsp(0,10,1000) = 1.956 ; estimEsp(0,50,1000) = 2.019 ;
estimEsp(0,100,1000) = 2.011

estimEsp(1,10,1000) = 2.174 ; estimEsp(1,50,1000) = 2.575 ;
estimEsp(1,100,1000) = 2.880 ; estimEsp(1,200,10000) = 3.0843

estimEsp(2,10,1000) = 2.09 ; estimEsp(2,50,1000) = 3.533 ;
estimEsp(2,100,1000) = 4.209 ; estimEsp(2,500,10000) = 5.4888
```

Commentez ces résultats. Sont-ils conforment à votre réponse à la question 1. ? Quelle hypothèse pouvez-vous faire sur $\mathbb{E}(X)$ pour $c = 1$ et $c = 2$?

c) Montrer comment il est possible d'utiliser `simulExp()` pour écrire une fonction `estimProbZero(c,s,m)` simulant un grand nombre m de fois l'expérience et retournant une estimation de $\mathbb{P}(X = 0)$.

Voici quelques exemples d'exécution de cette fonction : `estimProbZero(1,100,1000) = 0.001` ; `estimProbZero(2,100,1000) = 0.011` ; `estimProbZero(5,100,1000) = 0.073`. Commentez ces résultats.

④ Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(E_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2+kc}{4+kc}$.

⑤ On suppose dans cette question que $c = 1$.

a) Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier naturel n non nul.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1 - \mathbb{P}(E_n)$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

En pensant à des télescopages, vérifier que $\sum \mathbb{P}(X = n)$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.

d) On souhaite montrer l'existence et calculer la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

i. On rappelle au préalable le théorème « de transfert » qui assure que, si X est une variable aléatoire discrète infinie et $Y = g(X)$ est une variable aléatoire discrète fonction de X, alors $\mathbb{E}(Y)$ existe si la série $\sum g(n)\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument. Alors $\mathbb{E}(Y) = \displaystyle\sum_{n \in X(\Omega)} g(n)\mathbb{P}(X = n)$.
Utiliser ce théorème pour montrer que $\mathbb{E}(X + 3)$ existe et calculer sa valeur.

ii. En déduire $\mathbb{E}(X)$ que vous confronterez au résultat de l'estimation obtenue en 3.c).

⑥ On suppose dans cette question que $c = 2$.

a) Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier naturel non nul. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.

b) Donner la loi de X (à savoir $X(\Omega)$ et $\mathbb{P}(X = n)$ pour tout $n \in X(\Omega)$).

c) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Confrontez votre réponse au résultat de l'estimation obtenue en 3.c).

⑦ On souhaite généraliser à tout c entier naturel non nul, les valeurs de $\mathbb{P}(X = 0)$ obtenues précédemment.

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\ln(\mathbb{P}(E_n)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{2}{2+kc}\right)$.

b) Démontrer le résultat suivant : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites positives et si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

c) Déterminer $\underset{n\to\infty}{lim}\, \mathbb{P}(E_n)$ et en déduire $\mathbb{P}(X = 0)$.

Problème 3 :

L'objectif de ce problème est l'étude de l'efficacité d'un traitement T destiné à éradiquer une population de cellules indésirables. Pour tester T, on agit comme suit :

① On prélève une cellule unique C_0 à laquelle on applique T, ce qui a pour effet de partager C_0 en un nombre naturel aléatoire D_1 de cellule(s) identique(s) à C_0 qu'on appellera enfants(s) de C_0 ou descendant(s) de première génération de C_0 lorsque $D_1 > 0$; Si $(D_1 = 0)$ est réalisé, le traitement est terminé.

② Lorsque C_0 a k enfant(s) avec $k \geq 1$, on leur applique à chacun le traitement T et leur comportement sera le même que celui de C_0 et ceci indépendamment les uns des autres lorsque $k > 1$.

③ A l'issue de cette étape, on obtiendra un nombre naturel aléatoire D_2 de descendant(s) de deuxième génération. Si $(D_2 = 0)$ est réalisé, on s'arrête, sinon on poursuit dans les mêmes conditions et, pour $n \geq 1$, on notera D_n le nombre de descendants de n-ième génération tant que $D_n > 0$.

Rq (*) : Les cellules de $(n+1)$-ième génération de C_0 sont celles de n-ième génération de l'ens. des enfants de C_0.

Notations.

— On notera conventionnellement $D_0 = 1$ (variable aléatoire certaine égale à 1).

— On notera $p_k = \mathbb{P}(D_1 = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ (p_k représente donc la probabilité pour une cellule quelconque C d'avoir k enfants, étant entendu qu'on utilisera la même variable aléatoire pour toutes les cellules sauf en cas d'ambiguïté).

On supposera bien entendu $0 < p_0 < 1$ et on aura $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.

— On notera $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathbb{P}(D_n = 0)$. Lorsque $\underset{n\to\infty}{lim}\, u_n = 1$, c'est-à-dire lorsque avec une probabilité de 1 la descendance de C_0 s'éteint au bout d'un nombre fini de générations, on dira que T est efficace. On désignera par G le nombre aléatoire de générations de descendants de C_0. Ainsi :

Si C_0 n'a pas d'enfant : $(D_1 = 0)$ implique $G = 0$.
Si $(D_1 > 0)$ et $(D_2 = 0)$ sont réalisés, alors $G = 1$.
Si d'une façon générale, pour $n_0 \geq 1$, $(D_{n_0-1} > 0)$ et $(D_{n_0} = 0)$, alors $G = n_0 - 1$.

— On notera $\mathbb{E}(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X. Pour deux événements A et B avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$, $\mathbb{P}(A|B)$ désignera la probabilité de A sachant B.

Premier exemple

① La loi de D_1 est définie par $p_0 > 0$ et $p_1 > 0$ tels que $p_0 + p_1 = 1$.

a) Calculer u_0 et u_1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, D_n ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.

b) Montrer que s'il existe $n \geq 1$ tel que $D_n = 0$, alors pour tout entier $k \geq 0$, $D_{n+k} = 0$.

② a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = \mathbb{P}((D_{n+1} = 0)|(D_1 = 0))p_0 + \mathbb{P}((D_{n+1} = 0)|(D_1 = 1))p_1$$

puis, en utilisant la remarque $(*)$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}((D_{n+1} = 0)|(D_1 = 1)) = u_n$ et enfin que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = p_0 + p_1 u_n$.

b) En posant $v_n = 1 - u_n$, montrer que $u_n = 1 - p_1^n$ et en déduire la limite de u_n.

c) Montrer que $\mathbb{P}(G > n) = 1 - u_{n+1} = p_1^{n+1}$ puis que $\mathbb{P}(G = n) = p_0 p_1^n$ et enfin que $\mathbb{E}(G) = p_1/p_0$.

③ a) Écrire une fonction Python `simulG1(p0)` qui simule l'application du traitement et retourne le nombre de générations de descendants de C_0.

b) En déduire une fonction `estimEspG1(p0,m)` de paramètre d'entrée le réel p_0 et l'entier m supposé grand et qui retourne une estimation de $\mathbb{E}(G)$.

Deuxième exemple

① La loi de D_1 est définie par p_0, p_1 et p_2 tels que $p_0 > 0$, $p_2 > 0$ et $p_0 + p_1 + p_2 = 1$.

a) Montrer que pour $0 \leq k \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}((D_{n+1} = 0)|(D_1 = k)) = u_n^k$. On utilisera notamment la remarque $(*)$ et on prendra soin de distinguer les cas $k = 0$ et $n = 0$.

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}((D_{n+1} = 0)|(D_1 = k))p_k = p_0 + p_1 u_n + p_2 u_n^2$$

② Soit f la fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \longmapsto f(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$$

a) Vérifier que $f > 0$, $f' \geq 0$, $f'' > 0$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 1 - p_0 + p_2$.

b) Représenter le graphe de f dans les trois cas suivant : $f'(1) < 1$, $f'(1) = 1$ et $f'(1) > 1$ (on choisira des valeurs simples de p_0, p_1 et p_2 pour chaque cas).

c) Vérifier par le calcul que :

i. pour $f'(1) \leq 1$, le graphe de f est au dessus de la première bissectrice $\Delta : (y = x)$;

ii. pour $f'(1) = 1$ le graphe est tangent à Δ au point $I(1, 1)$;

iii. pour $f'(1) > 1$, le graphe recoupe la première bissectrice au point $L(p_0/p_2, p_0/p_2)$.

d) Montrer que la suite de terme général u_n est strictement croissante et majorée par $min(p_0/p_2, 1)$.

e) En déduire la limite de la suite de terme général u_n dans les différents cas envisagés. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le traitement soit efficace (c'est-à-dire $\underset{n\to\infty}{lim}\, u_n = 1$).

③ Examen des différents cas.

a) Cas où $f'(1) < 1$: démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 - u_{n+1} \leq (1 - u_n) f'(1)$.
Puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 - u_n \leq (1 - u_0)\left(f'(1)\right)^n$.

b) On s'intéresse au cas où $f'(1) = 1$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1 - u_{n+1}} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{p_0}{p_1 + p_0(1 + u_n)} \leq 1$$

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1 - u_{k+1}} - \frac{1}{1 - u_k} \right) = \frac{1}{1 - u_n} - 1 \leq n$

puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 - u_n \geq \dfrac{1}{n+1}$

c) Montrer que $\mathbb{E}(D_1) = f'(1)$ et que $\mathbb{P}(G > n) = 1 - u_{n+1} = \mathbb{P}(D_{n+1} \neq 0)$.

④ *Propriété :* Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ayant une espérance $\mathbb{E}(X)$. On admet que dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{N=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > N)$$

Déduire de cette propriété que :

— si $f'(1) < 1$ alors $\mathbb{E}(G) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 - u_n) \leq \frac{f'(1)}{1 - f'(1)}$

— si $f'(1) = 1$ alors G n'a pas d'espérance (on utilisera pour ça la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n+1}$).

⑤ En vous inspirant du premier exemple, question 3), écrire des fonctions python vous permettant d'estimer l'espérance de G dans le cas où $f'(1) < 1$.

ANNEXE - PROBLEME COMPTANT POUR LE DS02

On considère l'équation (E) : $\ln(x) = -x$ dont on cherche les solutions éventuelles sur $\mathbb{R}_+^*$.

① a) Montrer que l'équation (E) possède une unique solution α.

b) En utilisant les valeurs approchées $\ln(2) \approx 0.69$ et $\ln(3) \approx 1.09$, justifier que $\alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$.

c) On peut utiliser l'algorithme de dichotomie pour écrire une fonction qui prend en argument un entier n, qui renvoie α à 10^{-p} près ($p \in \mathbb{N}^*$).
Écrivez cette fonction correctement pour un bonus supplémentaire de points dans le DS02. Par ailleurs, donner en fonction de p le nombre de partages de l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ nécessaires pour trouver cette approximation.
✐ *A titre d'exemple pour la suite, on retiendra que si* $p = 5$*, cela nécessite* 15 *partage et si* $p = 10$*, cela nécessite* 31 *partages.*

② **La méthode de Newton**.
Considérons la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x + \ln(x)$$

a) Soit $x_0 \in [\frac{1}{2}, \alpha]$. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $(x_0, f(x_0))$.
Faire un schéma rapide permettant de comprendre la manière dont x_1 est construit. Pour cela on dessinera $\mathcal{C}_f$ ainsi que sa tangente en x_0.
On introduit alors la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

b) i. Étudier les variations de g sur $[\frac{1}{2}, \alpha]$ puis montrer que $\forall x \in [\frac{1}{2}, \alpha]$, $g(x) \in [\frac{1}{2}, \alpha]$.
ii. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par α.
iii. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers α.

c) i. Montrer que pour tout $t \in [\frac{1}{2}, \alpha]$, $|f(t)| \leq 3(\alpha - t)$.
ii. En déduire que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, \alpha]$: $0 \leq \alpha - g(x) \leq 3(\alpha - x)^2$.
iii. On prend $x_0 = \dfrac{1}{2}$. Montrer que pour tout entier naturel n : $0 \leq \alpha - x_n \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}$.

d) Exprimer le rang n_0 à partir duquel la suite (x_n) donne une valeur approchée de α à 10^{-p} près. Si on admet que pour $p = 5$, on obtient $n_0 = 3$ et pour $p = 10$, on obtient $n_0 = 4$, quel est l'intérêt d'une fonction mettant en oeuvre la méthode de Newton par rapport à celle qui s'appuierait sur l'.algorithme de dichotomie ?

Écrire ensuite en langage Python une fonction qui prend en argument un entier p et qui renvoie α à 10^{-p} près en utilisant la méthode de Newton.

On rappelle le principe de l'**Algorithme de dichotomie** :
On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

— $a_0 = a$ et $b_0 = b$

— Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.