$\boxed{\text{PROBLÈME 2 (Agro-Véto 2021)}}$

① a) Soit $f(x) = \ln(x) + x$; $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$; Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Donc f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : $\boxed{\text{D'après le théorème de la bijection, } \exists!\, \alpha \in]0, +\infty[\,/\, \ln(\alpha) + \alpha = 0}$

b) grâce à Python, après un "from math import *", on obtient :

$$\log(2) \simeq 0.69 \Rightarrow \ln(1/2) = -\ln(2) \simeq -0.69$$

$$\log(3) \simeq 1{,}09 \Rightarrow \ln(2/3) = \ln(2) - \ln(3) \simeq -0.40$$

D'où

$$\begin{cases} f(1/2) = \ln(1/2) + 1/2 < 0 \\ f(2/3) = \ln(2/3) + 2/3 > 0 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\alpha \in]1/2 ; 2/3[}$

c) On ne demande pas ici d'écrire l'algorithme de dichotomie mais de dénombrer les partages de l'intervalle $[a_0, b_0] = [1/2, 2/3]$ pour obtenir une valeur approchée α à 10^{-p} près...

Etape 0 : $b_0 - a_0 = 2/3 - 1/2 = 1/6$.

Etape 1 : $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2 = 1/12$

⋮

Etape n : $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$

Donc $b_n - a_n \leq 10^{-p} \Leftrightarrow \dfrac{b_0 - a_0}{2^n} \leq 10^{-p} \Leftrightarrow 2^n \geq \dfrac{10^p}{6}$

$$\Leftrightarrow n \ln(2) \geq \ln\left(\frac{10^p}{6}\right)$$

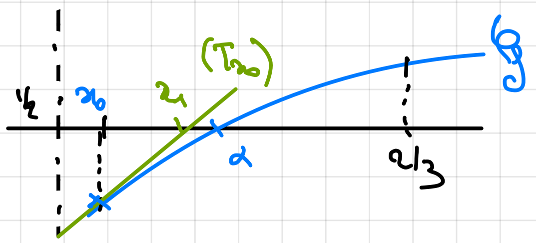
$$\Leftrightarrow n \geq \ln(10^p/6) / \ln(2)$$

Conclusion : $\boxed{\text{le nb. de partages nécessaire vaut } \left\lfloor \frac{\ln(10^p/6)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1}$

② a) $x_0 \in [1/2, \alpha]$; Exprimons la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $(x_0, f(x_0))$.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$y = 0 \Leftrightarrow x = \boxed{x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$



Soit $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$; on a $x_1 = g(x_0)$

On étudie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ / $x_{n+1} = g(x_n)$

b) (i) Variations de g sur $[1/2, \alpha]$

$\forall x>0, \quad g(x) = x - \frac{\ln(x)+x}{1+x} \cdot x = \frac{(1+x)x - x\ln x - x^2}{1+x}$

$$= \frac{x}{1+x}(1-\ln(x))$$

$$g'(x) = \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}(1-\ln(x)) + \frac{x}{1+x}\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1-\ln(x)}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-\ln(x)-1-x}{(1+x)^2} = -\frac{f(x)}{(1+x)^2}$$

or $f(x) < 0 \ \forall x \in [1/2, \alpha]$

donc $g'(x) > 0 \ \forall x \in [1/2, \alpha)$

<u>conclusion</u> : $\boxed{g \text{ est croissante sur } [1/2, \alpha)}$

→ Montrons que $I = [1/2, \alpha]$ est un intervalle stable par g :

$g(1/2) = \frac{1/2}{1+1/2}(1-\ln(1/2)) = \frac{1}{3}(1+\ln(2)) \simeq \frac{1.69}{3} > \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$

$g(\alpha) = \alpha + \frac{\ln(\alpha)+\alpha}{1+\alpha} = \alpha$ et $\frac{1}{2} < \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} < g(1/2) \leq g(\alpha) = \alpha$

(car g croissante sur I)

<u>Conclusion</u> $\boxed{g([1/2, \alpha]) \subset [1/2, \alpha]}$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, \ x_{n+1} = g(x_n)$ avec $x_0 \in [1/2, \alpha)$.

On commence par montrer par récurrence que :
$\forall n \in \mathbb{N}, \ x_n \in I = [1/2, \alpha]$ (Immédiat car $g(I) \subset I$)

La suite (x_n) est donc majorée.

Par ailleurs, $\forall x \in I, \ g(x) - x = -\frac{f(x)}{f'(x)} \geq 0$ (car $f(x) \leq 0$ et $f'(x) > 0$)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ g(x_n) - x_n = x_{n+1} - x_n \geq 0$.

Conclusion $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est croissante et majorée par } \alpha}$

(iii) le théorème de la limite monotone assure que : $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geq 0} \text{ converge.}}$

Par ailleurs,

$\forall x \in I, \quad g(x) = x \Leftrightarrow -\dfrac{f(x)}{f'(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$

or g continue sur I donc $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(\ell)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \ell = g(\ell) \Leftrightarrow \ell = \alpha.$

Conclusion $\boxed{(x_n)_{n\geq 0} \text{ converge vers } \alpha \,/\, f(\alpha) = 0.}$

c) (i) Mq $\forall t \in [1/2, \alpha], \ |f(t)| \leq 3(\alpha - t)$

$\forall t \in [1/2, \alpha], \ f'(t) = \dfrac{1}{t} + 1 \ ; \ f''(t) = -\dfrac{1}{t^2} < 0$

f' est décroissante sur I avec $f'(1/2) = 3 \ ; \ f'(\alpha) > 1.$

Donc $\sup\limits_{t \in I} |f'(t)| = f'(1/2) = 3.$

f est de classe C^1 sur $I = [1/2, \alpha]$, donc d'après le théorème des accroissements finis, $\forall t \in I$:

$\exists\, c \in]1/2, \alpha[\,/\, |f(t) - f(\alpha)| = |f'(c)|\,|t - \alpha|$

ou encore.

$|f(t) - f(\alpha)| \leq 3\,|\underbrace{t - \alpha}_{<0}|$ [et $f(\alpha) = 0$ ...]

Conclusion $\boxed{\forall t \in [1/2, \alpha], \ |f(t)| \leq 3(\alpha - t)}$

(ii) Montrons que $\forall x \in I, \ 0 \leq \alpha - g(x) \leq 3(\alpha - x)^2$.

(·) On a vu que $\forall x \in I$, $g(x) \in I$, donc $g(x) \leq \alpha \Leftrightarrow \alpha - g(x) \geq 0$.

(··) À nouveau le TAF cette fois appliqué à g ... : $\exists\, c \in]1/2, \alpha[\,/$

$\alpha - g(x) = g(\alpha) - g(x) = g'(c) \cdot (\alpha - x) = -\dfrac{f(c)}{1+c}(\alpha - x)$

$\Rightarrow |\alpha - g(x)| = \dfrac{|f(c)|}{1+c}(\alpha - x) \leq 3(\alpha - x)^2$ car $1 + c > 1$ ...

Conclusion $\boxed{\forall x \in [1/2, \alpha],\ 0 \leq \alpha - g(x) \leq 3(\alpha - x)^2}$

(iii) On prend $x_0 = 1/2$;
Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \alpha - x_n \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \quad (R_n)$$

- $\underline{n=0}$: (R_0) est vraie car
$1/2 \leq \alpha \leq 2/3$ donc $0 \leq \alpha - x_0 \leq 2/3 - 1/2 = 1/6 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^0}$
- On suppose (R_n) vraie pour n fixé $(n \geq 0)$
- Alors $\frac{1}{2} \leq x_{n+1} \leq \alpha \Rightarrow \alpha - x_{n+1} \geq 0$

Par ailleurs :

$$\alpha - x_{n+1} = \alpha - g(x_n) \leq 3(\alpha - x_n)^2 \leq 3 \cdot \frac{1}{9}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]^2$$
$$\leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$$

Conclusion $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \alpha - x_n \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$

d) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^k} \leq 10^{-n} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2^k} \leq 3.10^{-n} \Leftrightarrow 2^k \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln(3) - n$
$\Leftrightarrow 2^k \geq \frac{n - \ln(3)}{\ln(2)} \Leftrightarrow k \geq \frac{1}{\ln(2)} \ln\left(\frac{n - \ln(3)}{\ln(2)}\right)$

On écrira par exemple :

```
def newton(n):
    g = lambda t: (t/(1+t))*(1-log(t))
    x = 1/2
    n0 = int(log((n-log(3))/log(2))/log(2))+1
    for k in range(1, n0+1):
        x = g(x)
    return x, n
```

Application

dichotomie (10) renvoie $\underline{0.5671432904\ ,\ cpt = 31}$

newton (10) renvoie la même valeur $\underline{\text{mais avec } n0 = 4}$