PROBLÈME 1 (Agro-Véto 2016)

DS02. 01.X.22

① a) Soit f définie par $f(x) = x^{20} - x - 2$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car c'est une fonction polynôme.

$\forall x \geq 0$, $f'(x) = 20x^{19} - 1$

car $t \mapsto t^a$ croissante sur $\mathbb{R}_+$ $\forall a > 0$

et $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 20x^{19} > 1 \Leftrightarrow x^{19} > \frac{1}{20} \Leftrightarrow x > \left(\frac{1}{20}\right)^{1/19}$

or $0 < \frac{1}{20} < 1$ donc $0 < \left(\frac{1}{20}\right)^{1/19} < 1$

Donc $\underline{f'(x) > 0 \ \forall x \in [1,2]}$

Dès lors, f est continue sur $[1,2]$, strictement croissante sur $[1,2]$, avec $f(1) = 1 - 1 - 2 = -2 < 0$
$f(2) = 2^{20} - 4 > 0$

Par application du théorème des valeurs intermédiaires strict (ou du théorème de la bijection), on a,

Conclusion $\boxed{\exists ! \gamma \in [1,2] \ / \ f(\gamma) = 0}$

b) L'algorithme de dichotomie est rappelé.
On l'initialise en prenant $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$

Une réalisation possible est la suivante :

```
f = lambda x: x**20 - x - 2

def dichotomie(a, b, e: float) -> float :
    while b - a > e :
            c = (a+b)/2
            if f(a)*f(c) <= 0:
                b = c
            else:
                a = c
    return c
```

Dans ce cas, round(dichotomie(1, 2, 1e-3), 3) retourne
$\underline{\gamma = 1,058 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.

② $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $f_n(x) = x^n - \alpha x - \beta$.

a) f_n dérivable sur $\mathbb{R}_+$ / $f_n'(x) = nx^{n-1} - \alpha$ $\forall x \in \mathbb{R}_+$.

$f_n'(x) \geq 0 \Leftrightarrow nx^{n-1} \geq \alpha \Leftrightarrow x \geq \left(\frac{\alpha}{n}\right)^{1/(n-1)} = x_0$. (toujours car $t \mapsto t^{1/(n-1)}$ croissante sur $\mathbb{R}_+$ si $n \geq 2$ ...)

On en déduit le tableau de variation :

x	0		x_0		u_n		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_n(x)$	$-\beta<0$	$\searrow$	$f_n(x_0)<0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f_n(0) = -\beta < 0$ par hypothèse

$f_n(x) \underset{\infty}{\sim} x^n$

et donc $\lim\limits_{x \to \infty} f_n(x) = +\infty$

- $\forall x \in [0, x_0]$, $f_n(x) \leq -\beta < 0$
Donc f_n ne s'annule pas sur $[0, x_0]$.
- f_n continue et strictement croissante sur $[x_0, +\infty[$.
C'est une bijection de $[x_0, +\infty[$ sur $[f_n(x_0), +\infty[$.

or $f_n(x_0) < 0$ donc $0 \in [f_n(x_0), +\infty[$.

d'où, par application du théorème de la bijection.

$$\boxed{\exists ! \, u_n \in [x_0, +\infty[\subset \mathbb{R}_+ \ / \ f_n(u_n) = 0}$$

b) Si $\alpha + \beta = 1$, alors $f_n(1) = 1 - (\alpha + \beta) = 0$, $\forall n \geq 2$.

On a montré précédemment l'unicité de u_n...

Conclusion $\boxed{(u_n)_{n \geq 2} \text{ est une suite constante égale à } 1}$

(3) Dans les questions qui suivent : $\alpha + \beta \neq 1$.

a) $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 = u_{n+1}^{n+1} - \alpha u_{n+1} - \beta$

Donc $u_{n+1}^{n+1} = \alpha u_{n+1} + \beta$

Dès lors, $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n - \alpha u_{n+1} - \beta = u_{n+1}^n - u_{n+1}^{n+1}$

Conclusion $\boxed{\forall n \geq 2, \ f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n (1 - u_{n+1})}$

b) On suppose que $\alpha + \beta < 1$: $\forall n \geq 2$, $f_n(1) = 1 - (\alpha + \beta) > 0$
Donc, d'après (2) a) : $\boxed{u_n \in [0, 1[, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2}$

c) On suppose ici que $\alpha+\beta > 1$:

$f_n(1) = 1-(\alpha+\beta) < 0$ et $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = +\infty$

Donc, d'après ② a) : $\boxed{u_n \in [1, +\infty[\, , \forall n \geq 2}$

d) Montrons la monotonie de la suite (u_n) :

<u>si $\alpha+\beta<1$</u> : On a vu que $u_n \in [0,1[\; \forall n \geq 2$.

Donc $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n (1-u_{n+1}) \geq 0$ car $0 \leq u_{n+1} < 1$
d'après ③ a).
$\Rightarrow \begin{cases} 1-u_{n+1} > 0 \\ u_{n+1}^n \geq 0. \end{cases}$

Ou encore, puisque $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(x) < 0 \; \forall x \in [0, u_n)$ d'après ② a),

$$u_{n+1} \geq u_n$$

Dans ce cas : $\boxed{(u_n)_{n\geq 2} \text{ croissante et majorée par } 1. \text{ Elle converge.}}$

<u>si $\alpha+\beta > 1$</u>, on a vu que $u_n \geq 1 \; \forall n \geq 2$.

Donc $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n (1-u_{n+1}) \leq 0 = f_n(u_n)$.

Si on note, toujours d'après ② a) que $f_n(x) > 0$ pour tout $x > u_n$, on a :

$$0 \leq u_{n+1} < u_n \quad , \forall n \geq 2.$$

Dans ce cas, $\boxed{(u_n)_{n\geq 2} \text{ décroissante, minorée par } 1 \text{; Elle converge.}}$

On note désormais l sa limite.

f) Pour répondre à la question, on commence par écrire une fonction dichotomie qui prend en argument, outre a, b et e comme en ① b) les valeurs de α, β et n permettant de définir la fonction f_n.

On notera que la fonction 'dichotomie()' écrite en ① b) n'est qu'un cas particulier de celle demandée ici, et permettant d'obtenir $u_{20} \simeq 1,058 \; 8$ $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$

```python
def dichotomie2(alpha, beta, n, a, b, e):
    fn = lambda alpha, beta, n, x: x**n - alpha*x - beta
    while b-a > e:
        c = (a+b)/2
        if fn(alpha, beta, n, a)*fn(alpha, beta, n, c) <= 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return c
```

Ensuite, il reste à appeler cette fonction dichotomie pour des valeurs de a et b bien choisies de telle façon que $f_n(a) \cdot f_n(b) < 0$.

- Si $\alpha+\beta<1$, tous les u_n sont dans $[0,1[$. On prendra donc $a=0$ et $b=1$.

- Si $\alpha+\beta>1$, $\forall n \geq 2$, $1 \leq u_n \leq u_2$ puisque $(u_n)_{n\geq 2}$ décroît.

  Or u_2 annule $f_2 : x \mapsto x^2-\alpha x-\beta$.

  $\Delta = \alpha^2+4\beta > 0$ puisque $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ par hypothèse

  D'où $x^2-\alpha x-\beta=0 \Leftrightarrow x = \underbrace{\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}}_{<0 \text{ car } \alpha^2+4\beta>\alpha^2\ldots}$ ou $x=\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2}$

  On prend donc $\begin{cases} a=1 \\ b=\left\lfloor \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2} \right\rfloor + 1 \end{cases}$

```python
def affichage(alpha, beta, m):
    if alpha+beta == 1:
        return [1]*(m-1)   # (m-1) termes entre 2 et m.
    else:
        if alpha+beta < 1:
            a, b = 0, 1
        else:
            a = 1
            b = int((alpha+ sqrt(alpha**2+4*beta))/2)+1
    L = []
    for n in range(2, m+1):
        L.append(dichotomie2(alpha, beta, n,
                             a, b, 1e-3))
    return L
```

f) On suppose que $\ell \neq 1$.

<u>Si $\alpha+\beta<1$</u>, alors $\ell \in]0,1[$ ($\ell \neq 0$ car (u_n) croissante)

$u_n^n = e^{n\ln(u_n)}$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(u_n) = \ln(\ell)$ (continuité de ln sur $]0,1[$)

avec $\ln(\ell)<0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln(u_n) = -\infty$

On a bien dans ce cas $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^n = 0$.

<u>Si $\alpha+\beta>1$</u> alors $\ell>1$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(u_n) = \ln(\ell)>0$

continuité de ln sur $]1,+\infty[$.

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln(u_n) = +\infty$.

et donc $\lim\limits_{n\to\infty} e^{n\ln(u_n)} = +\infty$

Conclusion : $$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n^n = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha+\beta<1 \\ +\infty & \text{si } \alpha+\beta>1 \end{cases}}$$

g) On rappelle que : $\forall n \in \mathbb{N}, n\geqslant 2, f_n(u_n)=0$
ou encore,

$$u_n^n - \alpha u_n - \beta = 0 \Leftrightarrow u_n^n = \alpha u_n + \beta$$

si <u>$\alpha+\beta<1$</u> et $\ell\neq 1$; $\begin{cases} \lim\limits_{\infty} u_n^n = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \alpha u_n+\beta = \alpha\ell+\beta \end{cases}$

Soit $\alpha\ell+\beta=0 \Rightarrow \ell = -\dfrac{\beta}{\alpha}<0$: Absurde car $0\leq u_n<1 \ \forall n\in\mathbb{N}$ avec $(u_n)\nearrow$.

si <u>$\alpha+\beta>1$</u> et $\ell\neq 1$; $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} u_n^n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} \alpha u_n+\beta = \alpha\ell+\beta \end{cases}$

Soit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell = +\infty$: Absurde car dans ce cas (u_n) décroît et donc $u_n \leq u_2 \ \forall n\geqslant 2$.

Conclusion $\boxed{\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}_+^*,\ (u_n) \text{ converge vers } \ell=1.}$