Devoir : Révisions d'analyse (1h30)

Exercices rapides :

① **Ex 1 :** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) *Donnons l'ensemble de définition de f :* La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

b) La fonction $x \longmapsto \sin(x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc $x \longmapsto \dfrac{\sin(x^2)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ par produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.
Par ailleurs $\dfrac{\sin(x^2)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{x} = x$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

c) *Montrons que f est dérivable en 0, donnons l'équation de sa tangente en ce point et précisons la position de cette tangente par rapport à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0 :*
On rappelle que $\sin(u) \underset{0}{=} u - \dfrac{u^3}{3!} + \circ(u^3)$. D'où :

$$\sin(x^2) \underset{0}{=} x^2 - \frac{x^6}{3!} + \circ(x^6)$$

soit :

$$f(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^5}{6} + \circ(x^5)$$

On en déduit que l'équation de la tangente en 0 est $y = x$ et que la position de la courbe dépend du signe de $-\dfrac{x^5}{6}$.
Conclusion : $\boxed{\text{La tangente en 0 est } \mathcal{C}_f \text{ est } (T_0) : y = x.\ \mathcal{C}_f \text{ sous } (T_0) \text{ en } 0^+\text{, au-dessus en } O^-}$

② **Ex 2 :** Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$? On écrit : $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.
Or $\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ donc $x\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to x}{\sim} 1$.
La continuité de la fonction exp en 1 permet d'obtenir :
Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e}$

③ **Ex 3 :** Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$.

a) *Précisons son ensemble de définition :*

$$1 + \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq -1 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ ou } x \geq 0$$

Conclusion : $\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty, -1] \cup \mathbb{R}_+}$

b) *Montrons que $\Omega = (-\dfrac{1}{2}, 0)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$:*
Il suffit de montrer que $\dfrac{f(-\frac{1}{2} - x) + f(-\frac{1}{2} + x)}{2} = 0 \Leftrightarrow f(-\frac{1}{2} - x) + f(-\frac{1}{2} + x) = 0$

Pour tout $x > \frac{1}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}
f\left(-\frac{1}{2}-x\right)+f\left(-\frac{1}{2}+x\right) &= f\left(-\frac{1+2x}{2}\right)+f\left(\frac{-1+2x}{2}\right) \\
&= -\frac{1+2x}{2}\sqrt{1-\frac{2}{1+2x}}+\frac{-1+2x}{2}\sqrt{1+\frac{2}{2x-1}} \\
&= -\frac{1+2x}{2}\sqrt{\frac{2x-1}{1+2x}}+\frac{2x-1}{2}\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} \\
&= -\frac{1}{2}\sqrt{(2x+1)(2x-1)}+\frac{1}{2}\sqrt{(2x+1)(2x-1)} = 0
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\Omega = (-\frac{1}{2}, 0) \text{ est centre de symétrie de } \mathcal{C}_f}$

c) *Déterminons l'équation de sa (ou ses) asymptote(s) en précisant leur position par rapport à la courbe*

On commence par noter que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ puis posons $X = \frac{1}{x}$. Alors :

$$Xf\left(\frac{1}{X}\right) = X\frac{1}{X}\sqrt{1+X} = 1+\frac{1}{2}X-\frac{1}{8}X^2+\circ(X^2)$$

D'où

$$f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{X}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}X+\circ(X)$$

ou encore

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x+\frac{1}{2}-\frac{1}{8x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit que la droite d'équation $\boxed{y = x+\frac{1}{2}}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$. La position de la courbe par rapport à ces asymptotes étant donné par le signe de $-\frac{1}{8x}$.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est sous son asymptote en } +\infty\text{, au-dessus en } -\infty.}$