Devoir : Révisions d'analyse (1h30)

Le devoir se compose d'exercices rapides et de deux sujets issus des oraux de l'agro.
A titre indicatif, on consacrera respectivement 20 mn, 30 mn et 30 mn à chacun d'entre eux avant de prendre le temps d'une relecture attentive.
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
L'usage de la calculatrice ***n'est pas*** *autorisé au cours de l'épreuve.*

Exercices rapides :

① **Ex 1 :** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Donner l'ensemble de définition de f.

b) Dire si f est continue sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^*$ et, si c'est le cas, dire si elle est prolongeable par continuité en 0.

c) Montrer que f est dérivable en 0, donner l'équation de sa tangente en ce point et préciser la position de cette tangente par rapport à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0.

② **Ex 2 :** Que vaut $\underset{x\to+\infty}{lim} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$?

③ **Ex 3 :** Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}$.

a) Préciser son ensemble de définition.

b) Montrer que $\Omega = (-\dfrac{1}{2}, 0)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

c) Déterminer l'équation de sa (ou ses) asymptote(s) en précisant leur position par rapport à la courbe.

Problème 1 : (oral agro-véto 2016)

Dans tout l'exercice on se place sur $\mathbb{R}_+$.

① a) Soit f définie par $f(x) = x^{20} - x - 2$. Justifier qu'il existe un unique γ avec $1 \leq \gamma \leq 2$, tel que $f(\gamma) = 0$

b) Écrire un script Python qui donne par dichotomie une valeur approchée de γ à 10^{-3} (*La méthode est rappelée en annexe).*

② Pour α et β dans $\mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$, on définit f_n par $f_n(x) = x^n - \alpha x - \beta$.

a) Justifier l'existence d'un unique réel positif u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.

b) Que dire de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ lorsque $\alpha + \beta = 1$.

③ On se place désormais dans le cas où $\alpha + \beta \neq 1$.

a) Établir que $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n(1 - u_{n+1})$

b) Montrer que si $\alpha + \beta < 1$ alors $u_n \in [0, 1[$

c) Déterminer un intervalle « symétrique » lorsque $\alpha + \beta > 1$.

d) Montrer que (u_n) est monotone puis qu'elle converge. On note l sa limite.

e) Écrire une fonction Python d'arguments α, β et m permettant d'afficher les valeurs de (u_n) pour $2 \leq n \leq m$ selon les valeurs de $\alpha + \beta$.

Si tout se passe bien, on obtiendra les affichages proposés dans les figures 1 et 2 :

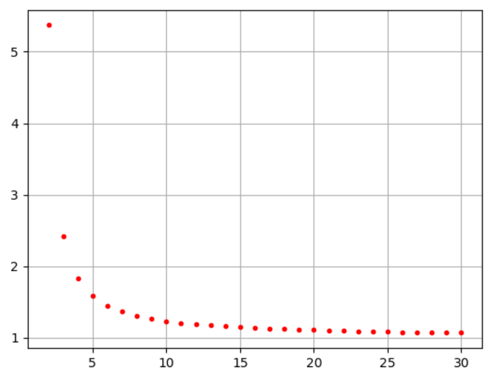

FIGURE 1 – $\alpha = 5$ et $\beta = 2$

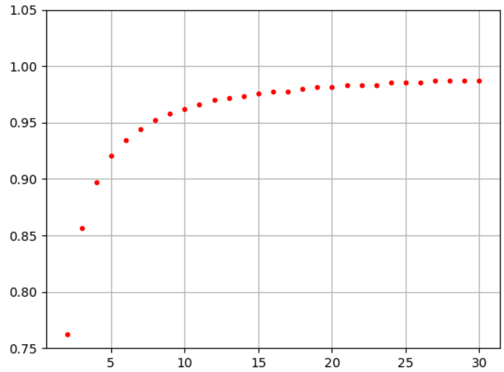

FIGURE 2 – $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.2$

Conjecturer la valeur de l.

f) On suppose que $l \neq 1$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^n = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha+\beta<1. \\ +\infty & \text{si } \alpha+\beta>1. \end{cases}.$$

g) En déduire que $l = 1$.

Problème 2 : (oral agro-véto 2021)

On considère l'équation (E) : $\ln(x) = -x$ dont on cherche les solutions éventuelles sur $\mathbb{R}_+^*$.

① a) Montrer que l'équation (E) possède une unique solution α.

b) En utilisant les valeurs approchées $\ln(2) \approx 0.69$ et $\ln(3) \approx 1.09$, justifier que $\alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$.

c) On peut utiliser l'algorithme de dichotomie rappelé en annexe pour écrire une fonction qui prend en argument un entier n, qui renvoie α à 10^{-p} près ($p \in \mathbb{N}^*$).
On ne demande pas d'écrire une telle fonction. En revanche, donner en fonction de p le nombre de partages de l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ nécessaires pour trouver cette approximation.
✐ *A titre d'exemple pour la suite, on retiendra que si $p = 5$, cela nécessite 15 partage et si $p = 10$, cela nécessite 31 partages.*

② **La méthode de Newton.**
Considérons la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = x + \ln(x)$$

a) Soit $x_0 \in [\frac{1}{2}, \alpha]$. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $(x_0, f(x_0))$.
Faire un schéma rapide permettant de comprendre la manière dont x_1 est construit. Pour cela on dessinera $\mathcal{C}_f$ ainsi que sa tangente en x_0.
On introduit alors la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \longmapsto \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

b) i. Étudier les variations de g sur $[\frac{1}{2}, \alpha]$ puis montrer que $\forall x \in [\frac{1}{2}, \alpha]$, $g(x) \in [\frac{1}{2}, \alpha]$.

ii. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par α.

iii. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers α.

c) i. Montrer que pour tout $t \in [\frac{1}{2}, \alpha]$, $|f(t)| \leq 3(\alpha - t)$.

ii. En déduire que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, \alpha]$: $0 \leq \alpha - g(x) \leq 3(\alpha - x)^2$.

iii. On prend $x_0 = \dfrac{1}{2}$. Montrer que pour tout entier naturel n : $0 \leq \alpha - x_n \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^n}$.

d) Exprimer le rang n_0 à partir duquel la suite (x_n) donne une valeur approchée de α à 10^{-p} près. Si on admet que pour $p = 5$, on obtient $n_0 = 3$ et pour $p = 10$, on obtient $n_0 = 4$, quel est l'intérêt d'une fonction mettant en oeuvre la méthode de Newton par rapport à celle qui s'appuierait sur l'.algorithme de dichotomie ?

Écrire ensuite en langage Python une fonction qui prend en argument un entier p et qui renvoie α à 10^{-p} près en utilisant la méthode de Newton.

ANNEXE

On rappelle le principe de l'**Algorithme de dichotomie** :
On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

— $a_0 = a$ et $b_0 = b$

— Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.