

3

Équations différentielles.

Objectif

L'objectif est de reprendre par la pratique le cours sur les équations différentielles de BCPST1 en insistant sur le lien avec l'informatique (méthode d'Euler (toujours rappelée dans un énoncé) mais nous apprendrons aussi à traiter des équations différentielles autonomes du type $y'(t) = F(y(t))$ où F est une fonction continue sur un intervalle à valeurs réelles.

Le programme officiel précise : « Aucune théorie générale ne doit être faite. Toute étude devra être entièrement guidée et on se limitera à quelques exemples issus de la biologie des populations ou de la cinétique chimique ».

1 L'algorithme d'Euler explicite.

1.1 Introduction

Voici des exemples d'équations différentielles du premier ordre, certains élémentaires, d'autres glanés dans les sujets du concours Agro-Véto :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases} ; \begin{cases} y'(t) = -3y(t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 2 \end{cases} ; \begin{cases} (1+t)y'(t) + y(t) = 0, t \in]-1, +\infty[\\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = \frac{1}{1+e^t}, t \in \mathbb{R} \\ y(0) = \ln(2) \end{cases} ; \begin{cases} y'(t) - \frac{y(t)}{4} = \cos(t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \end{cases} ; \begin{cases} y'(t) = 2y(t) - y^2(t), t \in \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Toutes peuvent se mettre, selon les cas, sous la forme générale

$$\boxed{\begin{cases} y'(t) = F(y(t)), t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}} (E_1) \text{ ou } \boxed{\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)), t \in I \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}} (E_2)$$

où $y_0 \in J$ représente la condition à l'origine et $F \in \mathcal{C}(J)$ pour (E_1) , $F \in \mathcal{C}(I \times J)$ pour (E_2) , est spécifique à chaque équation. On dira que pour tout $(t_0, y_0) \in I \times J$, $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une **solution** sur I de l'équation différentielle si y est dérivable sur I et $y'(t) = F(y(t))$ ou $y'(t) = F(t, y(t))$ selon les cas, avec $y(t_0) = y_0$.

On admettra que la solution au problème ainsi posé existe en tant que fonction définie sur I et qu'elle est unique. Des techniques au programme existent pour obtenir cette solution (cf cours de BCPST1) mais ce n'est pas toujours le cas (cf. l'ED n°6 ci-dessus). Commençons donc par mettre en place une méthode numérique qui nous permettra, quel que soit le cas de figure, d'approcher la solution des équations d'ordre 1.

1.2 La méthode d'Euler explicite pour $y'(t) = F(y(t))$, $y(t_0) = y_0$:

Cette méthode repose sur l'idée simple que, puisque la solution cherchée est dérivable sur I , on a pour h « suffisamment » petit :

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \cong y'(t) \text{ ou encore } y(t+h) \cong y(t) + h \cdot y'(t)$$

Certains énoncés introduisent également cette approximation en disant que y étant dérivable sur I , elle admet un développement limité à l'ordre 1 qui permet d'écrire :

$$\forall t \in I, y(t+h) \underset{0}{=} y(t) + h \cdot y'(t) + o(h)$$

et sous cette condition, on peut écrire $y(t+h) \cong y(t) + h \cdot F(y(t))$ pour h suffisamment petit.

Supposons vouloir résoudre l'équation sur un intervalle $[t_0, t_f]$ avec comme condition initiale $y(t_0) = y_0$. Pour faire le lien avec ce qui précède, on commence par définir une subdivision de l'intervalle $[t_0, t_f]$ en précisant son « pas », $h = (t_f - t_0)/n$ où n est le nombre de « segments » dont nous aurons besoin. On retiendra qu'ainsi $(t_k)_{k \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison h , soit :

$$t_k = t_0 + kh \text{ pour tout } k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \text{ avec } t_n = t_f$$

La méthode d'Euler consiste à calculer pas à pas des valeurs approchées de tous les réels $y(t_k)$ en approchant la courbe sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ par sa tangente en t_k . Précisons cette phrase :

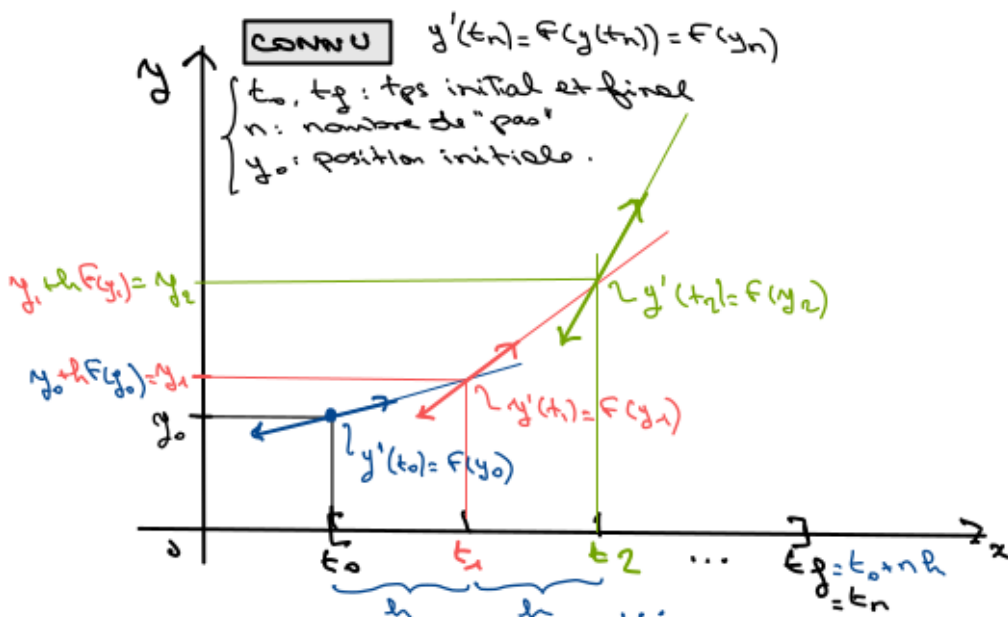
- En partant du point (t_0, y_0) , on suit la droite de pente $y'(t_0) = F(y_0)$ sur l'intervalle $[t_0, t_1]$. On a alors :

$$\begin{cases} t_1 &= t_0 + h \\ y_1 &= y_0 + h \cdot F(y_0) \end{cases}$$

- En partant du point (t_1, y_1) , on suit la droite de pente $y'(t_1) = F(y_1)$ sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$. A cette étape, $t_2 = t_1 + h$, $y_2 = y_1 + hF(y_1)$.
- On construit ainsi une suite de points de façon récurrente en posant :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \begin{cases} t_{k+1} &= t_k + h \\ y_{k+1} &= y_k + h \cdot F(y_k) \end{cases}$$

La ligne brisée joignant les points $\{(t_k, y_k), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ donne une solution approchée de l'ED.



Mise en oeuvre : Si $y' = F(y(t))$ où $y(t_0) = y_0$ admet une solution sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour avoir une approximation de la solution sur $I_+ = I \cap [t_0, +\infty[$, au pas de temps h , on commence par déterminer le nombre n de pas nécessaire pour la subdivision de $I_+ = [t_0, t_f]$, à savoir : $n = \frac{t_f - t_0}{h}$.

On construit la suite $(t_k, y_k)_{0 \leq k \leq n}$ définie par son premier terme (t_0, y_0) (condition initiale) et vérifiant la relation de récurrence :

$$\begin{cases} t_{k+1} &= t_k + h \\ y_{k+1} &= y_k + h \cdot F(y_k) \end{cases}$$

Algorithme d'Euler : Écrire une fonction `eulerExplicite(F, t0, tf, y0, h)` permettant, connaissant la fonction F , le temps initial et final t_0 et t_f , la position à l'origine y_0 et le pas de temps h , de renvoyer à la fois la liste $T = [t_0, t_0+h, \dots, t_0+nh]$ et de la liste des valeurs estimées de y , à savoir $Y = [y_0, y_1, \dots, y_n]$.

```

1 def eulerExplicite(F, t0, tf, y0, h):
2     n = ... # nombre de pas
3     T = ...
4     Y = ... # initialise la solution approchée
5     T[0] = ...
6     Y[0] = ...
7     for k in range(...):
8         T[k+1] = ...
9         Y[k+1] = ... # y'(t) = F[y(t)]
10    return T, Y

```

Application 1 :

① Considérons l'équation différentielles (ED_1) : $y'(t) = y(t)$, avec $y(0) = 1$.

- Donner la solution de cette E.D. et écrire une fonction Python donnant une représentation graphique de la solution sur l'intervalle $I = [0, 2]$.
- Utiliser la fonction `eulerExplicite()` pour tracer sur la même figure la solution approchée de cette solution.
- On souhaite estimer l'erreur commise en fonction de h . En appliquant l'algorithme d'Euler cette fois sur l'intervalle $[0, 1]$, comparer la valeur estimée à l'instant $t = 1$ avec e^1 en retournant le logarithme décimal l'erreur commise $\text{err} = y(1) - \exp(1)$ pour des valeurs de h prises dans l'ensemble $\{10^{-k}, k \in [1, 6]\}$.

② On considère cette fois l'équation différentielle (ED_2) : $y' = -3y$ et $y(0) = 2$.

- Résoudre cette équation différentielle sur \mathbb{R}_+ . Tracer le graphe de sa solution et préciser sa limite en l'infini.
- On cherche une solution approchée grâce à la méthode d'Euler. Montrer qu'elle est donnée par une suite géométrique $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont on précisera la raison et le premier terme. Dans quel intervalle doit se situer h pour assurer la stabilité de la solution, autrement dit pour que la solution numérique approchée conserve la même limite en l'infini que la solution y de (E_1) ?
- Le vérifier en utilisant la fonction `eulerExplicite()` sur l'intervalle $I = [0, 2]$.

1.3 La méthode d'Euler explicite pour $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0$:

On généralise la méthode précédente en écrivant que pour obtenir une approximation de la solution sur $I_+ = I \cap [t_0, +\infty[$, on considère la suite (y_k) définie par son premier terme y_0 (condition initiale) et vérifiant la relation de récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} t_{k+1} &= t_k + h \\ y_{k+1} &= y_k + h \cdot F(t_k, y_k) \end{cases}$$

Algorithme d'Euler (version 2) : Écrire une fonction `eulerExplicite2(F, t0, tf, y0, h)` qui renvoie sous forme de liste la subdivision de l'intervalle $[t_0, t_f]$ ainsi que la valeur estimée de la solution en chaque point de cette subdivision.

```
1 def eulerExplicite2(F, t0, tf, y0, h):
2     n = ... # nombre de pas
3     T = ...
4     Y = ... .. # initialise la solution approchée
5     T[0] = ...
6     Y[0] = ...
7     for k in range(.....):
8         T[k+1] = ...
9         Y[k+1] = ... .. # y'(t) = F[t, y(t)]
10    return T, Y
```

2 Les équations différentielles d'ordre 1. Rappel de cours

Méthode

méthode générale de résolution

- S'il n'est pas imposé, on détermine le domaine de définition de l'équation.
- On résout l'équation homogène (\mathcal{H}) (par une méthode que l'on verra plus loin)
- On trouve une solution particulière de (\mathcal{E}) .
- On obtient la forme générale des solutions de (\mathcal{E}) en additionnant notre solution particulière à la forme générale des solutions de (\mathcal{H}) .
- Dans le cas d'un problème de Cauchy, on détermine les constantes à l'aide des conditions initiales.

Propriété

cas d'une équation homogène

On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad y' + a(t)y = 0 \quad (\mathcal{E}_0)$$

avec a une fonction continue sur I .

Comme a est continue sur I , elle admet une primitive A .

Les solutions de (\mathcal{E}_0) sont les fonctions de la forme :

$$y(t) = Ce^{-A(t)} \quad (C \in \mathbb{R})$$

Méthode

Solution particulière si ED à coefficients constants

Soit $y' + ay = g(t)$ avec $a \neq 0$ constante

Expression de g	Forme de la solution particulière y_p
$g(x) = P(x)$ [Polynôme]	$y_p(x) = Q(x)$, $\deg(Q) = \deg(P)$
$g(x) = P(x)e^{mx}$, ($m \neq -a$)	$y_p(x) = Q(x)e^{mx}$, $\deg(Q) = \deg(P)$
$g(x) = P(x)e^{mx}$, ($m = -a$)	$y_p(x) = Q(x)$, $\deg(Q) = \deg(P) + 1$
$g(x) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$	$y_p(x) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Méthode

Solution particulière dans le cas général (Variation de la constante)

On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad y' + a(t) = g(t) \quad (\mathcal{E})$$

avec a et g des fonctions continues sur I .

Comme a est continue sur I , elle admet une primitive A . Il existe une solution particulière de la forme :

$$\forall t \in I, y_p(t) = C(t)e^{-A(t)}$$

où $C : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I .

On injecte y_p dans l'ED, ce qui permet d'obtenir $C'(t)$ et donc $C(t)$ par une recherche de primitive. Une solution particulière en découle...

3 Equations différentielles d'ordre 1 non linéaires

3.1 Introduction

Exemple : Soit : (ED) $y'(t) = 2y(t) - y^2(t)$, avec $y(0) = 1$

- ① Vérifier que la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{1 + e^{-2t}}$ est solution de cette équation.
- ② Utiliser les méthode Euler explicite pour donner une solution approchée de cette équation.

Pour une introduction par François Rechenmann (directeur de recherche à l'Inria Rhône-Alpes, spécialiste de bio-informatique) vous pouvez lire « Systèmes dynamiques et équations différentielles », que vous trouverez sur la page »(<https://interstices.info/systemes-dynamiques-et-equations-differentielles/>).
ou encore en flachant le QR-code suivant :



3.2 Une approche par l'exemple

On s'appuie sur des modèles de dynamique des populations dont l'analyse mathématique et l'interprétation qui en découle permettra de dépasser les seuls modèles discrets étudiés en début d'année en informatique.

On notera $N(t)$ le nombre (ou la quantité) d'individus d'une espèce donnée présents à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$. La répartition spatiale des individus ne sera pas prise en compte ici. Les modèles considérés seront donc des équations différentielles ordinaires de la forme :

$$\begin{cases} N'(t) = F(N(t)), & t \in \mathbb{R}_+^* \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

où $N_0 \geq 0$ représente le nombre (ou la quantité d'individus) à l'instant initial et $F \in \mathcal{C}(N(\mathbb{R}_+))$ devra contenir certaines caractéristiques biologiques naturelles pour une population.

Pour fixer les idées, nous considérerons par la suite qu'il s'agit d'une population de poissons dont $N(t)$ désigne la quantité évaluée en tonnes à l'instant t donné en années.

3.2.1 Le modèle malthusien

Nous supposons dans un premier temps que la population de poissons croît de façon proportionnelle à la population existante en l'absence de pression du milieu (démographique, trophique, de compétition, de prédation...) selon un taux r de croissance *per capita* constant au cours du temps puisque l'accroissement relatif de la population ne dépend que du taux de fécondité et du taux de mortalité et en aucun cas de l'effectif. Le modèle associé devient, r étant un réel strictement positif :

$$\begin{cases} N'(t) = r \cdot N(t), & t \in \mathbb{R}_+^* \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

N est dérivable et sa dérivée N' se mesure en tonnes par unité de temps, à savoir en année. Dès lors, r s'exprime en « année⁻¹ »

Par ailleurs, N est solution de l'équation différentielle $y' - ry = 0$ avec $y(0) = N_0$.

En conséquence, $N(t) = \boxed{\phantom{N(t) = e^{rt} N_0}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} N(t) = +\infty$.

On retiendra que ce modèle présente un ajustement satisfaisant avec les croissances de populations dont les effectifs sont faibles. Il illustre l'aptitude à proliférer, comportement biologique présent par exemple chez les espèces *pionnières*, dans le cadre d'invasions biologiques liées à la conquête d'un territoire.

3.2.2 Le modèle logistique ou modèle de « Verhulst »

- ① **Introduction du modèle** : Le modèle exponentiel n'est pas satisfaisant puisque l'effectif de la population ne dépend en rien des ressources disponibles et plus généralement de la capacité d'accueil du milieu. L'idée est de faire dépendre le taux de croissance *per capita* de la population ($N'(t)/N(t)$) de l'effectif même de cette population. Si cette population est de faible effectif, alors elle adopte un comportement malthusien et le taux d'accroissement *per capita* est maximum tandis que, lorsque l'effectif augmente et ce rapproche de la capacité de charge de l'environnement, ce taux tend vers 0.

L'idée la plus simple est d'imaginer une dépendance linéaire entre le taux de croissance *per capita* et l'effectif de la population, lui affectant la valeur 0 lorsque N atteint le potentiel d'accueil du milieu.

Soit $K \in \mathbb{R}_+^*$ et $N_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On considère maintenant le modèle suivant :

$$\boxed{\begin{cases} N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right), & t \in \mathbb{R}_+^* \\ N(0) = N_0 \end{cases}}$$

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'(t) = F(y(t))$, $y(0) = y_0$.

Définition

capacité biotique

Le terme $1 - \frac{N}{K}$ de ce modèle est interprété comme **la part de la capacité biotique encore disponible** et la fonction ρ définie par $\rho(N) = r(1 - \frac{N}{K})$ pondère le taux de croissance per capita par cette capacité biotique. La constante K , quant à elle, est appelée « capacité de charge » ou « potentiel d'accueil ». Dans notre exemple elle s'exprime en tonnes...

Propriété

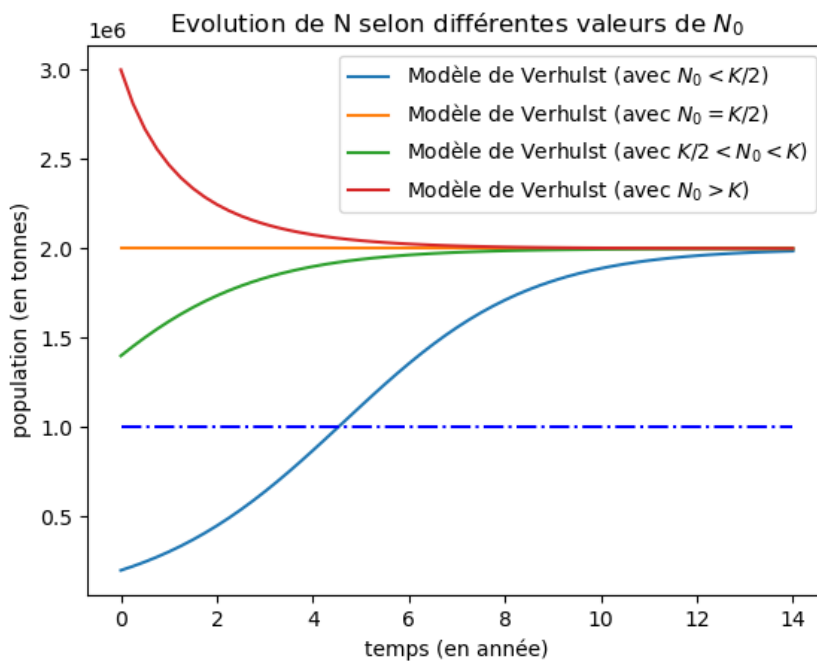
$$\begin{cases} \rho(N) \geq 0 & \text{si } N \leq K \\ \rho(N) < 0 & \text{si } N > K \end{cases}$$

Activité

Utiliser le Notebook et la fonction Python `eulerExplicite2()` pour simuler grâce à la méthode d'Euler explicite ($h = 0.1$) quatorze années d'évolution de la population de poissons pour laquelle $r = 0.5 \text{ an}^{-1}$, $N_0 = 2.10^5 T$ et $K = 2.10^6 T$.

Donner la représentation graphique de l'évolution de population dans ce cas précis puis vers varier la taille de la population initiale en prenant successivement $N_0 = K$, $N_0 > K$, $N_0 < K/2$ et $K/2 < N_0 < K$. Justifier ces évolutions.

Vous devriez obtenir les évolutions suivantes :



On dira que que 0 et K sont les états **stationnaires** (ou encore **solutions constantes**) du modèle.

② **Résolution analytique de l'équation logistique - A traiter sous forme d'exercice :**

- a. Sachant que $N_0 > 0$ (sans quoi il n'y a pas de population à étudier...), justifier l'existence de $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall t \in [0, a], N(t) > 0$.
- b. Montrer que la fonction y définie sur $[0, a]$ par $y(t) = 1/N(t)$ vérifie une équation différentielle du premier ordre qu'on résoudra.
- c. En déduire que la solution du modèle de Verhulst peut s'écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, N(t) = \frac{K}{1 + (K/N_0 - 1)e^{-rt}}$$

- d. Tracer son graphe sur la même figure que la simulation Python et valider la méthode d'Euler dans ce cas.

③ **Ajustement du modèle de Verhulst.** Considérons un cas réel, à savoir l'évolution du nombre des éléphants africains dans le parc Kruger, ouvert en 1903 à la frontière entre l'Afrique du Sud et le Mozambique pour sauver de la disparition cet espèce (*loxodonta africana*) qui ne compte alors plus que quelques représentants. En 1905, 10 éléphants sont repérés et, suite à des mesures de protections strictes, on a recensé au fil des années les effectifs suivants :

années	1905	1923	1930	1939	1945	1950	1960	1970	1980	1990	2000
effectif	10	13	29	450	980	3010	5800	6500	7400	7200	7310

- a. Donner une représentation graphique de ces effectifs et proposez une valeur de K .
- b. On considère la fonction auxiliaire h définie par : $h(t) = \ln \frac{N(t)}{K - N(t)}$.
Montrer qu'elle permet de réécrire la solution du système logistique sous la forme
 $h(t) = r(t - t^*)$ où $N(t^*) = K/2$
- c. En déduire un moyen statistique pour estimer r et confrontez votre réponse aux effectifs observés.

Signification biologique du modèle de Verhulst : A la lumière de ce modèle, des analyses différenciées se sont développées concernant les stratégies démographiques des êtres vivants.

- On parlera de stratégie r en l'absence de pression du milieu (K infini) ou bien lorsque les populations fluctuent fortement et que de nombreuses phases de conquête s'enchaînent. Bruno Anselme écrit : « On trouvera ainsi dans cette catégorie des espèces qui produisent un grand nombre d'oeufs et/ou de jeunes, qui ont un cycle de vie relativement court, qui alternent de nombreuses phases d'installation et de disparition, souvent de petite taille et à courte durée de vie. »¹
- On parle de stratégie K lorsque, à l'inverse, la pression du milieu est forte. « Ont une stratégie K les êtres vivants qui produisent peu de jeunes et qui privilégient la meilleure adéquation possible au milieu (donc qui optimisent la valeur de K) de chaque individu. On trouvera ainsi des espèces qui prodiguent beaucoup de soins aux jeunes, qui forment des couples stables et qui sont souvent de grande taille et ont une durée de vie importante. »²

1. Bruno Anselme, *Biomathématiques*, p. 15

2. *op. cité*, p 15

3.2.3 La contrainte de prélèvements constants

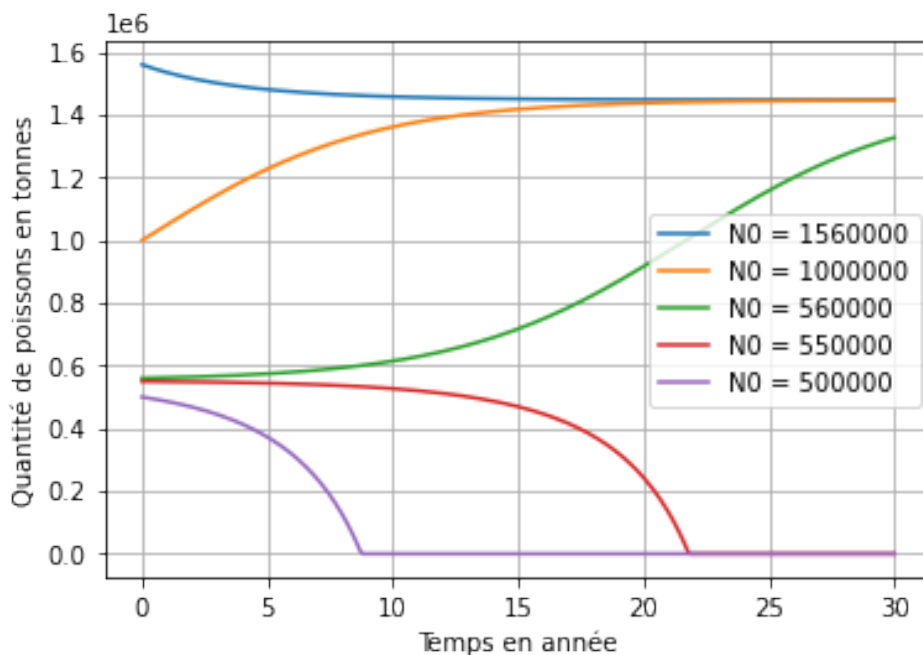
Nous cherchons désormais à décrire l'impact de la pêche sur notre population de poissons. On imagine un modèle pour lequel le taux de prélèvement $P \in \mathbb{R}_+$ est constant au cours des années et ne dépend pas de l'état de la population. Le modèle devient le suivant :

$$\begin{cases} N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - P = F(N(t)), & t \in \mathbb{R}_+^* \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

en supposant que F reste nulle dès qu'elle devient nulle pour la première fois.

- ① On suppose à nouveau que le taux de croissance maximum vaut $r = 0.5/an$, que la capacité d'accueil vaut $K = 2.10^6T$ et on pose $P = 2.10^5T/An$ le taux de prélèvement dû à la pêche. Utiliser le Notebook et complétez la fonction `verhulstAvecPrelevements()` pour donner l'évolution de la population sur trente années en fonction de différentes populations initiales prises dans $\{1e6, 0.5e6, 0.56e6, 1.56e6\}$.

Vous devriez obtenir les évolutions suivantes :



- ② Déterminer les états stationnaires de ce modèle. On pourra les visualiser en traçant simultanément grâce à *Geogebra* l'allure de la fonction f définie par $f(x) = rx(1 - \frac{x}{K})$ et la fonction constante $y = P$ et utiliser les fonctions `np.poly1d()` et la méthode `r` qui permet d'obtenir les racines d'un polynôme. Interpréter les résultats obtenus.

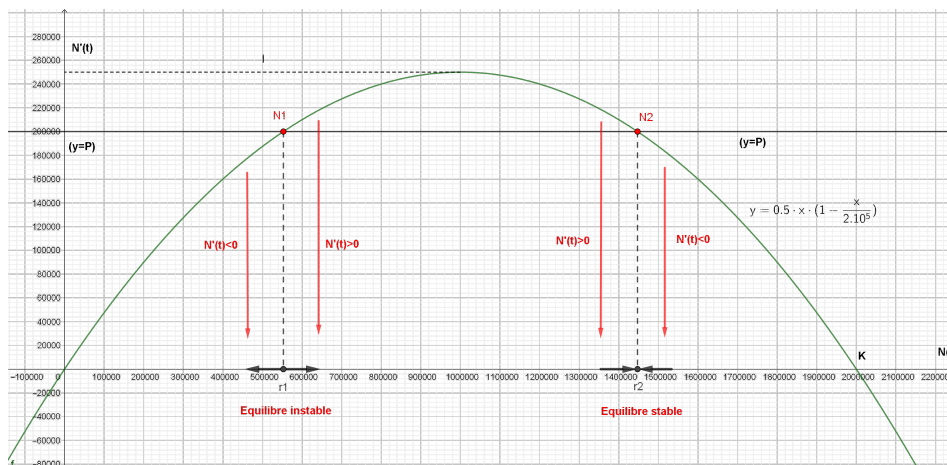
Définition

états stables et instables

On dit qu'un état stationnaire N_∞ est **stable** lorsque toute solution ayant pour condition initiale un N_0 proche de N_∞ tend vers N_∞ lorsque t tend vers l'infini. Un état stationnaire qui n'est pas stable au sens de cette définition est dit **instable**.

Dire, à l'aide du graphe précédent et représenté ci-dessous, quels sont les états qui sont stables parmi les états stationnaires obtenus précédemment et justifier les comportements observés à la question 1.

③ Justifier pourquoi on parle pour $P = 2e5T/an$ de *Prélèvement Maximum Supportable*.



3.2.4 Les modèles proies, prédateurs et l'impact de la pêche

On s'intéresse désormais à l'influence de la présence d'un prédateur sur une population de proies et, en retour, la réduction des effectifs des proies agit sur la dynamique des populations des prédateurs. Appelons $N_1(t)$ et $N_2(t)$ les effectifs respectifs des proies et des prédateurs.

Lotka et Volterra émettent l'hypothèse qu'isolément, les populations de proies comme de prédateurs, évoluent selon des modèles malthusiens.

En conséquence, en l'absence de tout prédateur, l'effectif des proies suit l'équation :

$$N_1'(t) = aN_1(t) \text{ avec } a > 0$$

Et en présence de prédateurs, la population décroît proportionnellement au nombre de rencontres qui donnent lieu à des capture. On choisit de modéliser le nombre de rencontres par le produit $N_1(t) \times N_2(t)$ (plus le nombre de proies et de prédateur est important et plus les chances de rencontres sont grandes...) et de le pondérer par un réel b strictement positif appelé constante de *capturabilité*. La croissance de la population est alors :

$$N_1'(t) = aN_1(t) - bN_1(t)N_2(t) = (a - bN_2(t))N_1(t)$$

- ① Proposer une relation similaire reliant $N_2'(t)$ à $N_1(t)$ et $N_2(t)$ grâce à deux paramètres c et d strictement positifs, d désignant une constante de prédation.
- ② On considère à nouveau une population de poissons pour laquelle le taux de croissance maximum vaut $r1 = 0.5/an$. On imagine par ailleurs que l'espérance de vie des prédateurs, en l'absence de ces proies, est de cinq ans. En supposant le phénomène constant au cours du temps, on dira que sous ces conditions un cinquième de la population de prédateurs disparaît chaque année. Après des échantillonnages répétés au fil des ans dans chacune des populations, on suppose enfin que l'équilibre est atteint à $5e6$ tonnes de proies et $1e6$ tonnes de prédateurs. Déterminer a , b , c et d sous ces conditions.
- ③ Écrire une fonction Python permettant de simuler par la méthode d'Euler explicite l'évolution des populations respectives des proies et des prédateurs sur cinquante années en supposant que $N_1(0) = 4e6$ T et $N_2(0) = 0.9e6$ T. Donner une représentation graphique de cette évolution et la commenter.

- ④ Les fonctions N_1 et N_2 sont périodiques de même période qu'on notera T . On définit les moyennes de N_1 et de N_2 sur une période $[0, T]$ comme :

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T N_1(t) dt \text{ et } \bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T N_2(t) dt$$

- Montrer que $\bar{x} = \frac{c}{d}$ et $\bar{y} = \frac{a}{b}$.
- On imagine un prédateur commun aux deux espèces (chasse ou pêche) qui prélève chaque année une proportion e et f respectivement de proies et de prédateurs. Adapter le système d'origine pour tenir compte de cette prédation et montrer que, sous cette condition, la moyenne des proies augmente alors que la moyenne des prédateurs diminue.

3.2.5 Le modèle de Gompertz

D'autres modèles existent, nombreux, parmi lesquels on retiendra le modèle de Gompertz dont le choix est de moduler le coefficient r de façon logarithmique avec l'équation différentielle :

$$N'(t) = r (\ln K - \ln N(t)) N(t) \quad (\mathcal{G})$$

Ici encore l'équation n'est pas linéaire ($\ln N$). Comme précédemment, K représente la population maximale de l'écosystème. Cette équation, si on est guidé, peut se résoudre par séparation des variables :

$$N'(t) = r (\ln K - \ln N(t)) N(t) \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{N'(t)}{N(t)}}_{u'(t)} \times \underbrace{\frac{1}{\ln K - \ln N(t)}}_{\frac{1}{u(t)}} = r$$

En intégrant entre 0 et t , on obtient :

$$-(\ln |\ln K - \ln N(t)| - \ln |\ln K - \ln N_0|) = rt$$

Et en passant à l'exponentielle :

$$\ln \left(\frac{K}{N(t)} \right) = \ln \left(\frac{K}{N_0} \right) e^{-rt}$$

puis

$$N(t) = K \exp \left(\ln \left(\frac{N_0}{K} \right) e^{-rt} \right)$$

Utiliser à nouveau le notebook et la fonction `eulerExplicite()` pour approcher cette solution et faire varier les paramètres r et N_0 .

4 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

4.1 Rappels de cours

Propriété

cas d'une équation homogène

Les solutions générales de l'ED homogène $y'' + ay' + by = 0$ dépendent du signe du discriminant Δ de l'équation caractéristique associée : $r^2 + ar + b = 0$.

- Si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles r_1 et r_2 et

$$y_h(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Si $\Delta = 0$, il y a une racine double $r_0 \in \mathbb{R}$.

$$y_h(t) = e^{r_0 t} (\lambda_1 t + \lambda_2) \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Si $\Delta < 0$, il y a deux racines conjuguées $z_1 = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \alpha - i\beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

$$y_h(t) = (\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)) e^{\alpha t} \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Méthode

Solution particulière si ED à coefficients constants

soit $y'' + ay' + by = g(x)$

- Une solution évidente existe. C'est le cas si g est une constante, si c 'est une fonction polynomiale (auquel cas y_p est également polynomiale) ou bien si l'énoncé nous a fait étudier au préalable une fonction qui répond à la question...
- L'énoncé nous donne la forme de la solution particulière. Elle dépend de paramètres réels et il suffit de la replonger dans l'ED pour les obtenir et répondre à la question (cf Tac O tac « analyse » du site internet).

4.2 A nouveau l'algorithme d'Euler ?

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle :
$$\begin{cases} y'' + ay' + by & = 0 \\ y(0) = y_0, y'(0) & = v_0 \end{cases} \quad (E).$$

On considère la matrice colonne $Y(t)$ définie par : $Y(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. On obtient alors :

$$(E) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y''(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \cdot Y(t)$$

où $A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. L'équation est devenue matricielle et du premier ordre.

En utilisant la notation usuelle : $v(t) = y'(t)$, on obtient une nouvelle formulation :

$$\begin{cases} v'(t) & = -av(t) - by(t) \\ y'(t) & = v(t) \end{cases}, \text{ où } y(0) = y_0 \text{ et } v(0) = v_0$$

Ce qui permet d'envisager de le résoudre par la méthode d'Euler vue dans la première partie.

On écrit pour ça :
$$\begin{cases} v(t+h) = v(t) + hv'(t) = \\ y(t+h) = y(t) + hy'(t) = \end{cases}$$

On en déduit une forme récurrente facile à programmer puisque, y_0 et v_0 étant connus :

$$\begin{cases} v_{n+1} = (1 - ah)v_n - bhy_n \\ y_{n+1} = hv_n + y_n \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 - ah & -bh \\ h & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_n \\ y_n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$$

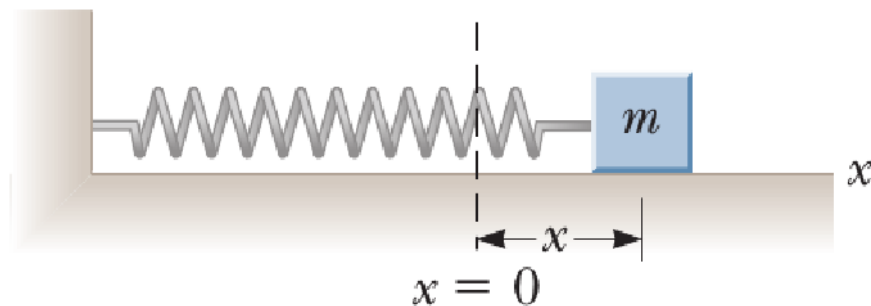
Compléter la fonction Python `simulSolutionEe(y0,v0)` proposée dans le Notebook.

4.3 Équations linéaires d'ordre 2 : mise en pratique.

① Soit l'équation différentielle : $y'' - 3y' + 2y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

- Donner sa solution et la tracer sur l'intervalle $I = [0, 3]$.
- Confrontez graphiquement votre solution approchée à la solution exacte.

② On suppose un point matériel de masse m attaché à un ressort horizontal, sans masse, de raideur k et de longueur au repos l_0 . Le système est supposé en équilibre à la position l_e .



A l'instant initial, la masse est déplacée, sans vitesse, d'une longueur x_0 par rapport à la position d'équilibre. Alors, si $x(t)$ désigne l'allongement du ressort par rapport à sa position d'équilibre à l'instant t , on a dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \text{ où } \omega^2 = \frac{k}{m}$$

On considère pour permettre une simulation numérique que $x_0 = 0.1m$, $\dot{x}(0) = 0m.s^{-1}$ et $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$.

- Rappeler quelle est la solution analytique de cette équation.
- Confronter la solution approchée et la solution analytique de cette équation et de tracer la trajectoire de phase. Commenter ce graphique.
- Justification : On s'intéresse à l'énergie du système qui, à l'instant t , est définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2}kx^2(t) + \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{m}{2}(v^2(t) + \omega^2x^2(t))$$

Il est facile de vérifier par dérivation que l'énergie est une constante du mouvement... Or ce n'est pas tout à fait le cas pour lorsqu'on approche v et x par la méthode précédentes.

En effet $E_{n+1} = \frac{m}{2}(v_{n+1}^2 + \omega^2x_{n+1}^2)$ et en remplaçant par l'expression obtenue en 4.b) on obtient pour Euler explicite : $E_{n+1} = (1 + \omega^2h^2)E_n$.