3 Plan d'étude des branches asymptotiques

Définition *Asymptote*

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On dit que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

Point méthode : Pour étudier les branches infinies de la courbe représentative de f,

① On étudie $\frac{f(x)}{x}$.

- **a.** Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy).
- **b.** Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, on passe à l'étape 2.

② On étudie $f(x) - ax$.

- **a.** Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $y = ax$.
- **b.** Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de $\mathcal{C}_f$. Et si on demande la position de la courbe par rapport à son asymptote, on passe au point 3.

③ On étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$ en $+\infty$.

Toute ce qui précède se généralise quand $x \longmapsto -\infty$

Point méthode 2 : Si on demande l'équation de l'asymptote et la position de la courbe par rapport à son asymptote, on peut utiliser les développements limités et prouver que $f(x) \underset{\infty}{=} ax + b + \frac{c}{x} + \circ(\frac{1}{x})$.

① On pose $X = \dfrac{1}{x}$ en notant que X tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$.

② On exprime $g(X) = Xf\left(\dfrac{1}{X}\right)$ dont on déterminer un DL à l'ordre 2 au voisinage de 0.

$$g(X) \underset{0}{=} a + bX + cX^2 + \circ(X^2)$$

soit

$$f\left(\frac{1}{X}\right) \underset{0}{=} \frac{a}{X} + b + cX + \circ(X)$$

ou encore

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right)$$

③ On conclut que $y = ax + b$ est l'asymptote à $\mathcal{C}_f$ et on obtient la position grâce au signe de c...