# 2 Rappels sur l'algorithme de dichotomie

**Théorèmes**

*1. Théorème des valeurs intermédiaires strict*

*Soit $f$ une fonction d'une variable réelle continue sur $[a, b]$, $a < b$, strictement monotone sur $[a, b]$.*
*Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors :*

$$\exists! \alpha \in [a, b] / f(\alpha) = 0$$

**Raisonnement :** Quitte à changer $f$ en $-f$, on peut supposer que $f(a) \leq 0 \leq f(b)$.

**Principe de l'algorithme :** Il consiste à construire par récurrence deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ qui sont adjacentes et vérifient : $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- *Initialisation :* On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$. On a bien $a_0 \leq b_0$ et $f(a_0) \leq 0 \leq f(b_0)$.

- *Hypothèse de récurrence :* Pour $n$ fixé ($n \in \mathbb{N}$), on suppose construits les termes $a_n$ et $b_n$ tels que :

$$a_0 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_0 \text{ et } f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$$

- *Hérédité :* Prenons $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

  → Si $f(c_n) \geq 0$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.
  → Si $f(c_n) < 0$, alors on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

  On a réduit l'intervalle entre $a_n$ et $b_n$. D'où $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ et donc :

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

  *Rque :* Nous sommes en train de construire une suite $(a_n)$ **croissante** et une suite $(b_n)$ **décroissante**. Par ailleurs, par construction de $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$, on a bien

$$f(a_{n+1}) \leq 0 \leq f(b_{n+1})$$

  *En effet :* $f(a_{n+1})$ vaut soit $f(a_n)$ qui était négatif par hypothèse de récurrence, soit $f(c_n)$ dans le cas où $f(c_n) < 0$. De même pour $f(b_{n+1})$...

- *conclusion :* En notant qu'à chaque étape la longueur de l'intervalle est divisée par deux, on obtient :

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{b - a}{2^n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$$

  Si on rappelle que $(a_n)$ est croissante et $(b_n)$ est décroissante, on a donc bien construit deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ adjacentes vérifiant $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

**Conséquence :** Les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ convergent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$. Et comme $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$, on a par passage à la limite et par continuité de $f$ sur $[a, b]$ :

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(l) \text{ et } \lim_{n \to \infty} b_n = l \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(b_n) = f(l)$$

Soit : $f(l) \leq 0 \leq f(l)$. **Conclusion** : $\boxed{f(l) = 0}$