Quizz 4 : Suites et fonctions

Dans l'ensemble de ce quizz, on considère une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $u_0 \in I$, où I est un intervalle stable par f.

1. Dire dans chaque cas s'il s'agit d'une condition suffisante (**CS**), d'une condition nécessaire (**CN**) ou d'une condition nécessaire et suffisante (**CNS**) pour que f soit une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J :
   ✐ Remarque : *Pas d'espace, pas de points, dans la réponse proposée (CS, CN ou CNS).*
   a) f est continue et strictement monotone sur I, avec $f(I) = J$.
   b) $\forall y \in J, \exists! x \in I / f(x) = y$.
   c) $\exists g : J \longmapsto I$ telle que $g \circ f = id_I$ et $f \circ g = id_J$.

2. Soit $I_1 \subset I$. Dire que I_1 est stable par f signifie que :
   Rép. 1 : $f(I_1) \subset I$; Rép. 2 : $I_1 \subset f$
   Rép. 3 : $I_1 \subset f(I_1)$; Rép. 4 : $f(I_1) \subset I_1$

3. Si $\exists \alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$, alors on peut affirmer que la suite (u_n) converge vers α.

4. Si f continue sur I, alors on peut affirmer que (u_n) converge vers $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

5. Si f continue sur I, alors l'existence d'un point fixe de f est :
   a) une condition **suffisante** de convergence de (u_n).
   b) une condition **nécessaire** de convergence de (u_n).
   c) une condition nécessaire de convergence de (u_n).

6. Si l'intervalle stable est un intervalle fermé borné de la forme $I = [a, b]$ et f est une fonction continue sur I, alors il existe au moins un point fixe sur I. *Vrai ou faux ?*

7. Si l'intervalle stable est un intervalle fermé borné de la forme $I = [a, b]$, alors on peut affirmer que :
   Rép. 1 : (u_n) converge ; Rép. 2 : (u_n) est minorée.
   Rép. 3 : (u_n) est monotone ; Rép. 4 : (u_n) est majorée

8. Si f est croissante est continue sur I, alors on peut affirmer que :
   Rép. 1 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; Rép. 2 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   Rép. 3 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone ; Rép. 4 : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones

9. Si f est décroissante et continue sur I, alors on peut affirmer que :
   Rép. 1 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; Rép. 2 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   Rép. 3 : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone ; Rép. 4 : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones

10. Pour étudier la suite (u_n) avec f « k-contractante », on va utiliser :
    a) le théorème des valeurs intermédiaires.
    b) le théorème de la bijection continue.
    c) le théorème des accroissements finis.
    d) le théorème de Rolle.

11. Si f est continue et dérivable sur $I = [1, 2]$ telle que $|f'(t)| \leq \dfrac{1}{2}$ sur I. Si elle admet un point fixe α dans I, alors (u_n) converge vers α et u_n est une valeur approchée de α à ε près dès que :
    Rép. 1 : $n \geq \dfrac{\ln(\varepsilon)}{ln(2)}$; Rép. 2 : $n \leq \dfrac{\ln(\varepsilon)}{ln(2)}$
    Rép. 3 : $n \geq -\dfrac{\ln(\varepsilon)}{ln(2)}$; Rép. 4 : $n \geq -\dfrac{\ln(2)}{ln(\varepsilon)}$

12. soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1} = \sin(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = \pi/4 \in [0, \pi/2]$, intervalle stable par sin. Alors :
    a) La suite (u_n) est croissante.
    b) La suite (u_n) est décroissante
    c) La suite (u_n) converge vers $\pi/2$.
    d) La suite (u_n) diverge.
    e) La suite (u_n) converge vers 0.

13. soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1} = (u_n + 2)^2 - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. l'application $f :\longmapsto (x + 2)^2 - 2$ admet deux poins fixes : $\alpha_1 = -1$ et $\alpha_2 = -2$.
    Si $u_0 = 0$, alors :
    a) La suite (u_n) est croissante.
    b) La suite (u_n) est décroissante
    c) La suite (u_n) converge vers α_2.
    d) La suite (u_n) diverge.
    e) La suite (u_n) converge vers α_1.

14. soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_{n+1} = (u_n + 2)^2 - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. l'application $f :\longmapsto (x + 2)^2 - 2$ admet deux poins fixes : $\alpha_1 = -1$ et $\alpha_2 = -2$.
    Si $u_0 = -1, 5$, alors :
    a) La suite (u_n) est croissante.
    b) La suite (u_n) est décroissante.
    c) La suite (u_n) converge vers α_2.
    d) La suite (u_n) diverge.
    e) La suite (u_n) converge vers α_1.