

Plaque 3

$I = [0, 1]$; $f_0 = 1$ et $f_{n+1}(x) = 2 \int_0^x \sqrt{f_n(t)} dt \quad \forall n \in \mathbb{N}$

① $\forall x \in I, f_1(x) = 2 \int_0^x \sqrt{f_0(t)} dt = 2 \int_0^x 1 dt = 2x$

$f_2(x) = 2 \int_0^x \sqrt{2t} dt = 2\sqrt{2} \int_0^x \sqrt{t} dt = 2\sqrt{2} \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^x = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{3/2}$

Conclusion $\forall x \in I, f_1(x) = 2x ; f_2(x) = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{3/2}$

② On raisonne par récurrence.

• $n=0$; $f_0(x) = 1 = 1 \cdot x^0$: on prend $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$

$n=1$; $f_1(x) = 2x = 2 \cdot x^1$: on prend $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$

$n=2$; $f_2(x) = \frac{4\sqrt{2}}{3} x^{3/2}$: on prend $a_2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ et $b_2 = 3/2$

On vérifie que $a_1 = \frac{4\sqrt{a_0}}{b_0+2}$; $b_1 = \frac{b_0}{2} + 1$; $a_2 = \frac{4\sqrt{a_1}}{b_1+2}$; $b_2 = \frac{b_1}{2} + 1$

• On suppose que : $\exists a_n, b_n \in \mathbb{R}_+^* / f_n(x) = a_n x^{b_n} \quad \forall x \in I$
pour n fixé ($n \in \mathbb{N}$)

• Alors $f_{n+1}(x) = 2 \int_0^x \sqrt{a_n t^{b_n}} dt = 2\sqrt{a_n} \int_0^x t^{b_n/2} dt$
 $= 2\sqrt{a_n} \left[\frac{t^{b_n/2+1}}{\frac{b_n}{2}+1} \right]_0^x = \frac{4\sqrt{a_n}}{b_n+2} x^{\frac{b_n}{2}+1}$

Il suffit de poser $a_{n+1} = \frac{4\sqrt{a_n}}{b_n+2}$, $b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + 1$.

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n, b_n \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in I, f_n(x) = a_n x^{b_n}$
 $a_{n+1} = \frac{4\sqrt{a_n}}{b_n+2}$, $b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + 1$

③ On demande une fonction qui affiche les $n+1$ premiers termes des suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$.
Par exemple :

def suites(n):

 a, b = 1, 0

 La, Lb = [a], [b]

 for k in range(1, n+1):

 a, b = 4*np.sqrt(a)/(b+2), b/2+1

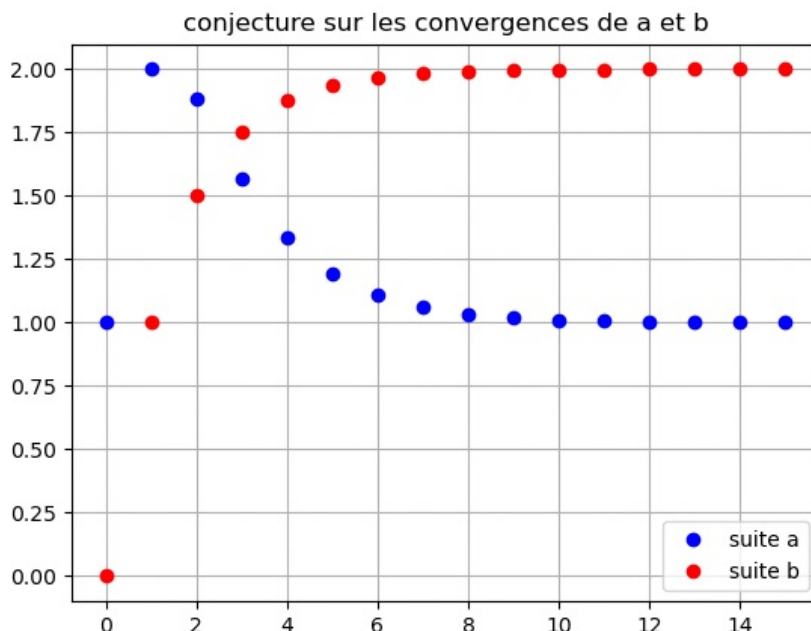
 La.append(a), Lb.append(b)

 I = np.arange(n+1)

 plt.plot(I, La, 'bo', I, Lb, 'ro')

 plt.show()

On obtient l'affichage suivant :



conjecture (a_n) converge vers 1
 (b_n) converge vers 2

④ (b_n) est une suite arithmético géométrique.

$$\begin{cases} b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + 1 \\ l = \frac{1}{2}l + 1 \Leftrightarrow l = 2 \end{cases} \quad \text{et } b_{n+1} - l = \frac{1}{2}(b_n - l) \quad \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow b_n - 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n (b_0 - 2)$$

Conclusion: $\forall n \geq 0, b_n = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

et comme $0 < \frac{1}{2} < 1$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$

⑤ Raisonnons à nouveau par récurrence

- $a_0 = 1 \geq 1$; $a_1 = 2 \geq 1$.
- on suppose $a_n \geq 1$ pour n fixé ($n \in \mathbb{N}$)
- Alors $\forall a_n \geq 1$ et

$$a_{n+1} = \frac{4\sqrt{a_n}}{b_{n+2}} \geq \frac{4}{b_{n+2}} \quad \text{avec } 0 \leq b_n \leq 2 \text{ d'après ④}$$

$$\Rightarrow 2 \leq 2 + b_n \leq 4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b_{n+2}} \geq \frac{1}{4}$$

D'où $a_{n+1} \geq 1$.

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 1$

⑥ On pose $w_n = 2^n \ln(a_n)$

$$\begin{aligned}
 w_{n+1} - w_n &= 2^{n+1} \ln(a_{n+1}) - 2^n \ln(a_n) \\
 &= 2^{n+1} \ln\left(\frac{4\sqrt{a_n}}{2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}\right) - 2^n \ln(a_n) \\
 &= 2^{n+1} \ln\left(\frac{\sqrt{a_n}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\right) - 2^n \ln(a_n) \\
 &= 2^{n+1} \left(\cancel{\frac{1}{2} \ln(a_n)} - \ln\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] \right) - \cancel{2^n \ln(a_n)} \\
 &= -2^{n+1} \ln\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)
 \end{aligned}$$

or $\ln\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \sim -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ [$\ln(1+u) \sim u$]

donc $w_{n+1} - w_n \sim 1$; conclusion $\lim_{n \rightarrow \infty} (w_{n+1} - w_n) = 1$

⑦ Appliquons la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, |w_{n+1} - w_n - 1| \leq 1$

et donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall k \geq n_0, -1 \leq w_{k+1} - w_k - 1 \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq w_{k+1} - w_k \leq 2$

Pour $n > n_0$, Sommons ces inégalités pour $k \in [n_0, n-1]$:

$$0 \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} (w_{k+1} - w_k) \leq \sum_{k=n_0}^{n-1} 2$$

$\Leftrightarrow 0 \leq w_n - w_{n_0} \leq (n - n_0) \times 2$

conclusion $\forall n > n_0 : w_{n_0} \leq w_n \leq 2(n - n_0) + w_{n_0}$
 (Encore valable pour $n = n_0$)

Enfin, $a_n \geq 1 \Rightarrow \ln(a_n) \geq 0$ et $0 \leq \ln(a_n) \leq \frac{2(n - n_0)}{2^n} + \frac{w_{n_0}}{2^n}$

or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n_0}{2^n} = 0$ (par rappel $n \sim o(2^n)$)

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a_n) = 0$
 (théor d'encadrement des limites) ; conclusion $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$