$\boxed{\text{Planche 2}}$ $a \in \mathbb{R}_+^*$; $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + a^n u_n & \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0, u_1 \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$

① (i) On commence par montrer par récurrence sur deux rangs que $\underline{u_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}}$.

(ii) Par hypothèse, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} - u_{n+1} = a^n u_n > 0$$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{(u_n)_{n\geq 1} \text{ est strictement croissante}}$

② On suppose ici que $a \in [1, +\infty[$.
On raisonne par l'absurde en supposant que (u_n) converge [théorème de la limite monotone)
autrement dit : $\exists \ell \in \mathbb{R}_+^* \mid \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$

or $u_{n+2} = u_{n+1} + a^n u_n$ or encore $a^n = \dfrac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_n}$ $\forall n \geq 0$

donc, par passage à la limite :

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 1 \\ +\infty \end{cases}}_{\text{car } a \geq 1} = \frac{\ell - \ell}{\ell} = 0 \quad : \text{Absurde}$$

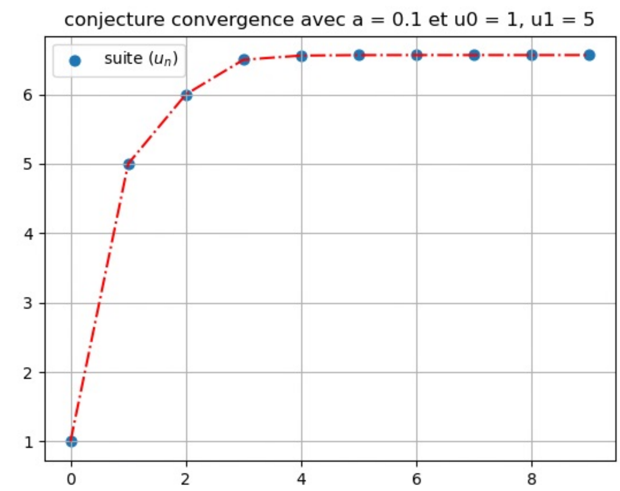
<u>Conclusion</u> $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty}$

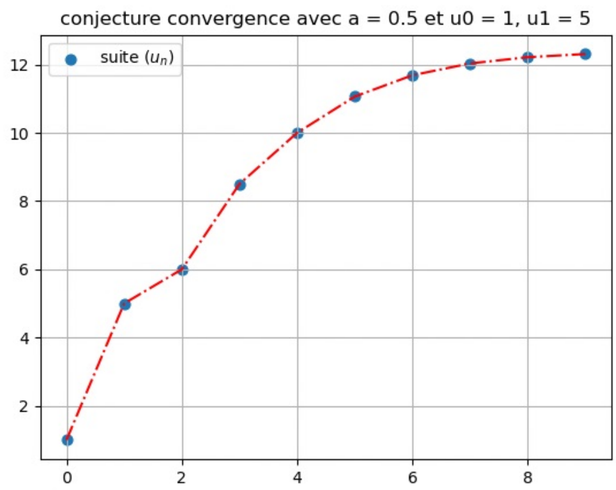
③ On suppose désormais que $0 < a < 1$

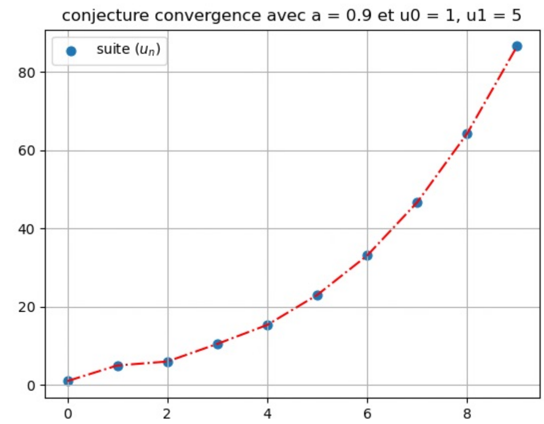
a) Une rédaction possible est la suivante :

```
def suiteU(u, v, a: float, n: int) -> list:
    LU = [u, v]
    for i in range(2, n):
        c = v + a**(i-2)*u
        LU.append(c)
        u, v = v, c
    return LU
```

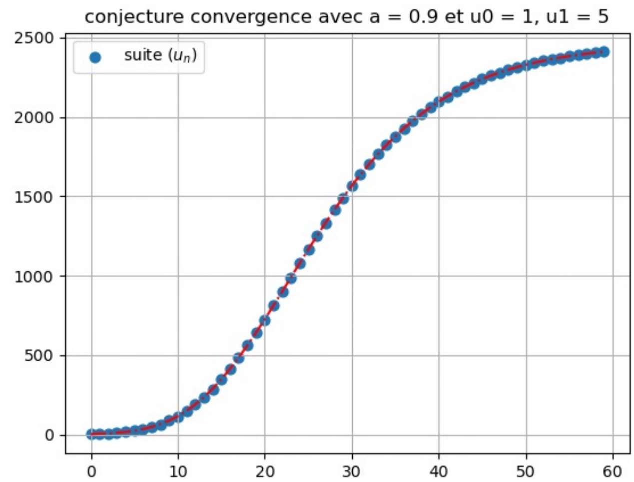
On fixe $u_0 = 1$, $u_1 = 5$ et on nous demande d'observer le comportement de la suite lorsque $a = 0.1$, $a = 0.5$ puis $a = 0.9$







$\longrightarrow$



On conjecture que si $0 < a < 1$ alors la suite (u_n) converge vers une limite d'autant plus importante que a est proche de 1.

b) Sachant que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante, on a :

$u_n \leq u_{n+1}\ \forall n \geq 1$ et donc $\boxed{u_{n+2} \leq (1+a^n)\, u_{n+1} \quad \forall n \geq 1}$

c) Plusieurs méthodes sont possibles mais dans ce cas le théor. des accroissements finis permet d'aboutir à peu de frais en montrant sa connaissance du programme...

$t \mapsto e^t \in C^1([0,x])\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

Donc $\exists c \in]0,x[\ /\ e^x - e^0 = e^x - 1 = xe^c$

or $0 < c < x$ donc $1 < e^c$ [exp $\nearrow$] donc $x < xe^c$ (car $x>0$)

Soit $e^x - 1 > x\ \forall x > 0$

Par ailleurs, pour $x = 0$, $e^x - 1 = 0 = x$

Conclusion $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ e^x - 1 \geq x \Leftrightarrow 1 + x \leq e^x}$

d) On a obtenu en ③ b) : $u_{n+2} \leq u_{n+1}(1+a^n)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

D'où, $\forall n \geq 1$, $u_{n+2} \leq u_2 \cdot \prod_{k=1}^{n} (1+a^k)$

Cela se démontre par récurrence...

- $u_3 \leq u_2(1+a)$ d'après ③ b)
- On suppose que $u_{n+2} \leq u_2 \prod_{k=1}^{n} (1+a^k)$ pour n fixé $(n \geq 1)$
- Alors $u_{n+3} \leq u_{n+2}(1+a^{n+1})$ [Toujours d'après ③ b)]

$$\leq u_2 \prod_{k=1}^{n} (1+a^k)(1+a^{n+1}) \quad \text{(grâce à l'hypothèse)}$$

$$\leq u_2 \prod_{k=1}^{n+1} (1+a^k)$$

D'où, $\forall n \geq 1$:

$$u_{n+2} \leq u_2 \prod_{k=1}^{n} (1+a^k)$$

or, d'après c) : $1+a^k \leq e^{a^k}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$ (puisque $a^k > 0$)

donc, $\forall n \geq 1$:

$$u_{n+2} \leq u_2 \prod_{k=1}^{n} e^{a^k} = u_2 e^{S_n}$$

où

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a^k = a \frac{1-a^n}{1-a} \leq \frac{a}{1-a} \quad \text{(puisque } 0 < a < 1\text{)}$$

et donc $e^{S_n} \leq e^{\frac{a}{1-a}}$ (exp est ↗ sur $\mathbb{R}$)

Dès lors, $\forall n \geq 1$:

$$u_{n+2} \leq u_2 e^{\frac{a}{1-a}}$$

La suite (u_n) est donc croissante et majorée.

Conclusion $\boxed{\text{Si } a \in]0,1[\text{, la suite } (u_n) \text{ converge}}$