Planche 1 — Suites récurrentes.

① a) (E) $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 12 = 13$; 2 solutions réelles $\begin{cases} x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{6} \\ x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{6} \end{cases}$

or $9 < 13 < 16$ donc $3 < \sqrt{13} < 4$

Soit

$-4 < -\sqrt{13} < -3$

$\Leftrightarrow -3 < 1 - \sqrt{13} < -2$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x_1 < -\frac{1}{3}$

$4 < 1 + \sqrt{13} < 5$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3} < x_2 < \frac{5}{6} < 1$

conclusion $\boxed{|x_1| < 1 \text{ et } |x_2| < 1}$

b) $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est donnée en ① a) avec $\Delta > 0$

D'où

$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \;/\; u_n = \alpha . x_1^n + \beta x_2^n \;, \forall n \in \mathbb{N}$

comme $|x_1|^n < 1$ et $|x_2|^n < 1$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} x_1^n = 0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_2^n$

conclusion $\boxed{(u_n) \text{ converge et } \lim\limits_{\infty} u_n = 0}$

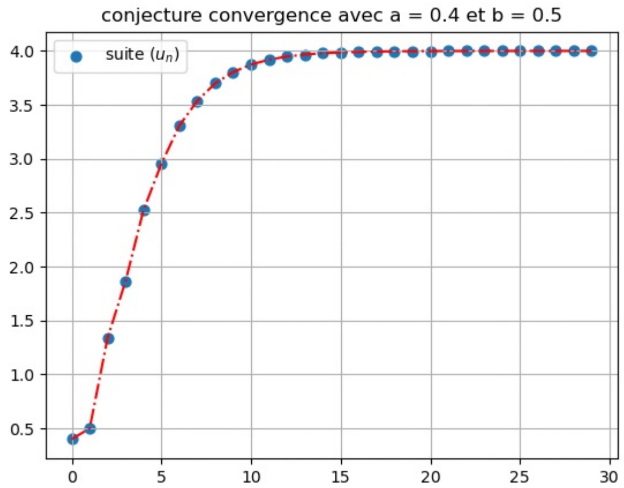
② a) c'est une question classique. Une rédaction possible est la suivante (on demande les n premiers termes... donc de u_0 à u_{n-1}).

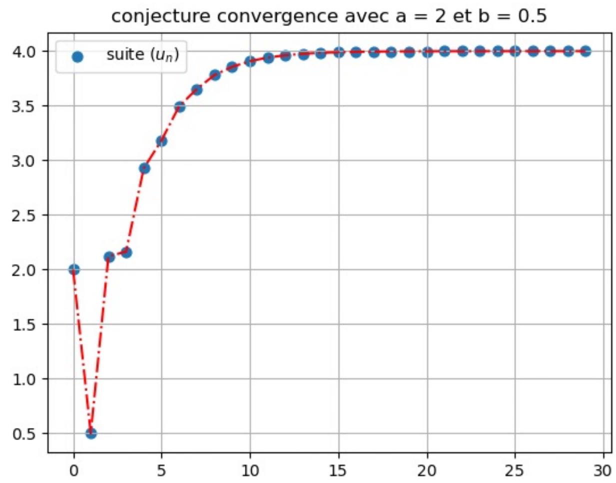
```
def suiteU(a, b: float, n: int) -> list:
    U = [a, b]
    for i in range(2, n):       # i=2 -> u2
        c = sqrt(b) + sqrt(a)   # i=n-1 -> un-1
        U.append(c)
        a, b = b, c
    return U
```

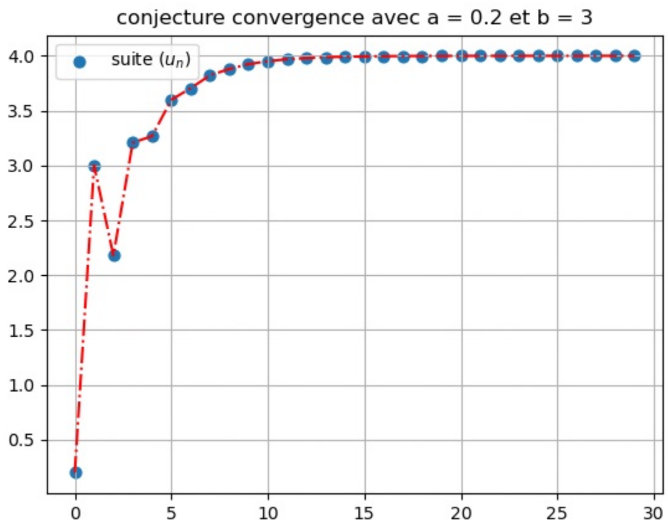
On donne page suivante une représentation graphique des n premiers termes de la suite (u_n) en prenant successivement :

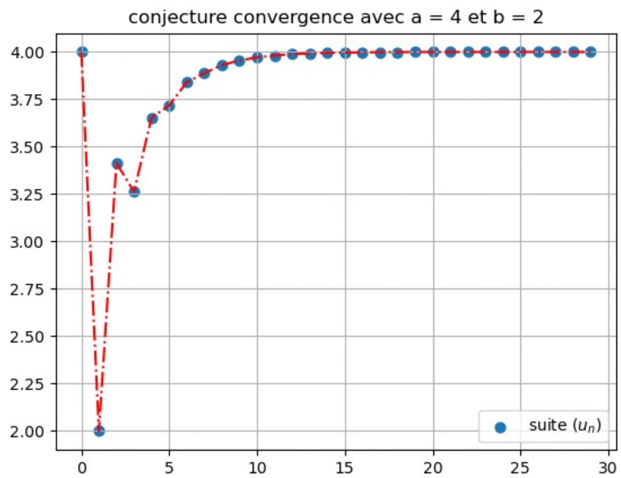
a, b = 0.4, 0.5 ; a, b = 2, 0.5

a, b = 0.2, 3 ; a, b = 4, 2









Conjecture : $\forall (a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4$ (et éventuellement) (u_n) monotone si $a<1, b<1$.

b) On suppose désormais que $a>1$ et $b>1$

(i) On montre par récurrence que : $\forall n\geq 0$, $v_n>1$.

- $v_0 = a>1$; $v_1 = b>1$
- On suppose que $u_n>1$ et $u_{n+1}>1$ pour n fixé $(n\geq 0)$
- Alors $v_{n+1} = \sqrt{v_{n+1}}+\sqrt{v_n} > 2 > 1$ car $x>1 \Rightarrow \sqrt{x}>1$
- Conclusion $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ v_n>1}$

(ii) $w_n = \frac{1}{2}\sqrt{v_n} - 1$;

$w_{n+1} + w_n = \frac{1}{2}\left[\sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{v_n}\right] - 2 = \frac{1}{2}u_{n+2} - 2 = \frac{1}{2}(v_{n+2} - 4)$

et $2w_{n+2} + 4 = \sqrt{v_{n+2}} + 2$

D'où

$$\frac{w_{n+1}+w_n}{2w_{n+2}+4} = \frac{1}{2}\,\frac{v_{n+2}-4}{\sqrt{v_{n+2}}+2} = \frac{1}{2}\,\frac{(\sqrt{v_{n+2}}-2)\cancel{(\sqrt{v_{n+2}}+2)}}{\cancel{\sqrt{v_{n+2}}+2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{v_{n+2}} - 1 = w_{n+2}$$

<u>Conclusion</u> $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = \dfrac{w_{n+1}+w_n}{2w_{n+2}+4}}$

(iii) $v_n \geq 1$ donc $\frac{1}{2}\sqrt{v_n} - 1 \geq -\frac{1}{2}$ donc $w_n \geq -\frac{1}{2}$

et $2w_{n+2}+4 \geq 3$ ou encore $\dfrac{1}{2w_{n+2}+4} \leq \dfrac{1}{3}$

Dès lors,

$$|w_{n+2}| \leq \frac{1}{3}|w_{n+1}+w_n| \leq \frac{1}{3}|w_{n+1}| + \frac{1}{3}|w_n|$$

[inégalité triangulaire]

<u>Conclusion</u> $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |w_{n+2}| \leq \frac{1}{3}|w_{n+1}| + \frac{1}{3}|w_n|}$

(iv) Posons $u_0 = |w_0|$, $u_1 = |w_1|$ et $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n$ $\forall n \geq 0$.

On démontre par récurrence double que $|w_n| \leq u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

- $|w_0| \leq u_0$; $|w_1| \leq u_1$ par hypothèse.
- on suppose $|w_n| \leq u_n$ et $|w_{n+1}| \leq u_{n+1}$ pour n fixé $(n \geq 0)$
- Alors

$$|w_{n+2}| \leq \frac{1}{3}|w_{n+1}| + \frac{1}{3}|w_n| \leq \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n$$
$$\leq u_{n+2}.$$

<u>Conclusion</u> $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |w_n| \leq u_n}$

Donc $0 \leq |w_n| \leq u_n$ avec, d'après (1) : $\lim\limits_{\infty} u_n = 0$

<u>Conclusion</u> (th. des gendarmes) $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}|w_n| = 0 \text{ et donc } \lim\limits_{n\to\infty} w_n = 0}$

On peut aussi conclure, puisque $w_n = \frac{1}{2}\sqrt{v_n} - 1$ que

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{v_n} = 2$ ou encore $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 4}$

(continuité de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$)

c) On suppose ici que $v_0 = a \leq 1$ et $v_1 = b \leq 1$.

Montrons par l'absurde que $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, v_{n_0} > 1$

→ Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq 1$, alors $\sqrt{v_n} \geq v_n$

$[\sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1-\sqrt{x}) \geq 0$ si $0 \leq x \leq 1]$

$v_{n+1} = \sqrt{v_n} + \sqrt{v_{n-1}} \geq \sqrt{v_n} \geq v_n$ donc $(v_n)_{n\geq 2}$ croissante et majorée par 1.

Dès lors, (v_n) converge vers $\ell \in [0,1] \,/\, \ell = \sqrt{\ell} + \sqrt{\ell}$

$\Leftrightarrow \ell = 2\sqrt{\ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 4\ell \Leftrightarrow \begin{cases} \ell = 0 \\ \text{ou} \\ \ell = 4 \end{cases}$

or $\ell = 4$ est exclus car $v_n \leq 1 \;\forall n \in \mathbb{N}$

$\ell = 0$ est exclus car $\forall n \geq 2$, $v_n \geq v_2 > 0$ et donc $\ell \geq v_2 > 0$.

→ Contradiction … Donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, v_{n_0} > 1$

On montre alors que $\forall n \geq n_0 + 2$, $v_n \geq 1$

et en posant $\begin{cases} u_{n_0} = |w_{n_0}| \,;\, u_{n_0+1} = |w_{n_0+1}| \\ u_n = \frac{1}{3} u_{n-1} + \frac{1}{3} u_{n-2} \quad \forall n \geq n_0 + 2 \end{cases}$

on montre comme en 2 b) que $\lim\limits_{\infty} w_n = 0$

Conclusion $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 4}$