Problème

① On demande un script Python permettant d'afficher les points $M_n = (f_n(x) ; g_n(x))$ où $x \in \{\frac{k}{100}, k \in [\![0, 80]\!]\}$

On commence par le calcul de $f_n(x)$ et $g_n(x)$:

```
def f(n: int, x: float) -> float:
    p = 1+x
    for k in range(2, n+1): # k∈[[2, n]].
        p *= 1+x**k
    return p
```

On a utilisé que $f_k(x) = (1+x^k) \cdot f_{k-1}(x)$ $\forall k \geq 2$ et $f_1(x) = 1+x$

```
def g(n: int, x: float) -> float:
    p = 1-x
    for k in range(2, n+1):
        p *= 1 - x**(2k-1)
    return p
```

En utilisant que $g_1(x) = 1 - x$ et $g_k(x) = (1 - x^{2k-1})\, g_{k-1}(x)$ $\forall k \geq 2$

Dès lors, pour obtenir les $f_n(\frac{k}{100})$ où $k \in [\![0, 80]\!]$, ainsi que les $g_n(\frac{k}{100})$, on écrira :

```
n=100
x = [f(n, k/n) for k in range(81)]
y = [g(n, k/n) for k in range(81)]
```

Quant à l'affichage graphique, il suffit d'exécuter :

```
plt.plot(x, y, 'r.', lw=4)
plt.grid()
plt.show()
```

② Sur le graphique, il semble que les points M_n soient positionnés sur la courbe d'équation $y = 1/x$ ce qu'on teste en exécutant :

```
z = [1/x for x in x]
plt.plot(x, z, 'b')
```

<u>Conjecture</u> : $g(x) = 1/f(x)$ car pour $n = 100$, on a $f_n(x) \approx f(x)$; $g_n(x) \approx g(x)$

② Soit $x \in [0,1[$;

$$f_{n+1}(x) = \prod_{k=1}^{n+1} (1+x^k) = (1+x^{n+1}).f_n(x)$$

D'où $\quad f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1}.f_n(x)$

Comme $x \geq 0$, il est clair que $f_n(x) > 0$ et $x^{n+1} \geq 0$.
Donc $\quad f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (f_n(x))_{n\geq 1} \text{ est croissante si } x \in [0,1[}$

De même,

$$g_{n+1}(x) = (1-x^{2n+1}).g_n(x) \Rightarrow g_{n+1}(x) - g_n(x) = -x^{2n+1}.g_n(x)$$

or $0 \leq x < 1$ donc $0 \leq x^k < 1 \quad \forall k \in [\![1,n]\!]$
et donc $\quad 0 < 1 - x^k \leq 1$
d'où $\quad 0 < g_n(x) \leq 1 \quad$ (Produit de termes dans $]0,1]$...)

Par ailleurs, $-x^{2n+1} < 0$
Donc,

$$\forall x \in [0,1[, \; g_{n+1}(x) - g_n(x) < 0$$

Conclusion $\boxed{\text{la suite } (g_n(x))_{n\geq 1} \text{ est décroissante si } x \in [0,1[}$

Remarque : Il était évidemment possible de calculer $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ et $\dfrac{g_{n+1}(x)}{g_n(x)}$ pour les comparer à 1, à condition de ne pas oublier de prouver que $f_n(x) > 0$ et $g_n(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1[, \forall n \in \mathbb{N}^*$!

③ a) Plusieurs méthodes ont été vues dont l'étude de $h : t \mapsto e^t - t - 1$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $h'(t) = e^t - 1 > 0 \Leftrightarrow e^t > 1 \Leftrightarrow t > 0$
Soit :

t	$-\infty$		0		∞
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$	$+\infty$	↘	0	↗	∞

Conclusion $h(t) \geq 0 \; \forall t \in \mathbb{R}$
ou : $\boxed{e^t \geq 1 + t \quad \forall t \in \mathbb{R}}$

Remarque : Pour une application du théorème des accroissements finis appliqué à $\exp : x \mapsto e^x$ sur $[0,x]$, on se rapportera à l'ex 7, ① a) du TD 2.

Soit $x \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $1 \leq 1+x^k \leq e^{x^k}$
Donc, par produit de réels positifs :

$$1 \leq f_n(x) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{x^k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)$$

avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = x\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{x}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$

or $0 \leq x < 1$ donc $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k \leq \frac{x}{1-x}$

Dès lors, grâce à la croissance de la fonction exp :

$$\boxed{1 \leq f_n(x) \leq \exp\left(\frac{x}{1-x}\right)} \quad (*)$$

On a presque fini...

La suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par $e^{\frac{x}{1-x}}$ donc elle converge.

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existe et par passage à la limite dans la double inégalité $(*)$, on a :

$$\boxed{1 \leq f(x) \leq e^{\frac{x}{1-x}} \quad \text{si } x \in [0,1[.}$$

b) Montrons que f est continue en 0.

→ Dans le cas particulier $x = 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n(0) = \prod_{k=1}^{n} 1 = 1$$

La suite $(f_n(0))_{n\geq 1}$ est la suite constante égale à 1. Elle converge vers 1.

D'où $f(0) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 1$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{x}{1-x}} = e^0 = 1$. Donc, d'après le théorème d'encadrement des limites appliqué à la double inégalité obtenue en ③ a).

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$$

Conclusion $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$

④ a) Justifions l'existence de $g(x)$ pour $x \in [0,1[$:

On a vu en ② que la suite $(g_n(x))_{n\geq 1}$ est décroissante

Par ailleurs $0 < g_n(x) \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

la suite $(g_n(x))_{n\geq 1}$ est donc décroissante et minorée. Elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } x \in [0,1[,\ g(x) \text{ existe et } 0 \leq g(x) \leq 1.}$

④ b) Soit $t \in [0,1]$ et $x \in [0,1[$. Appliquons cette fois le théorème des accroissements finis :

Soit k définie ici par $k(x) = (1-x)^t$

k est continue sur $[0,x]$, dérivable sur $]0,x[$, $\forall x \in]0,1[$.

avec $k'(x) = -t(1-x)^{t-1}$.

D'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c \in]0,x[\;/\; k(x) - k(0) = (x-0).k'(c)$$
$$\Leftrightarrow k(x) - 1 = -xt(1-c)^{t-1}$$

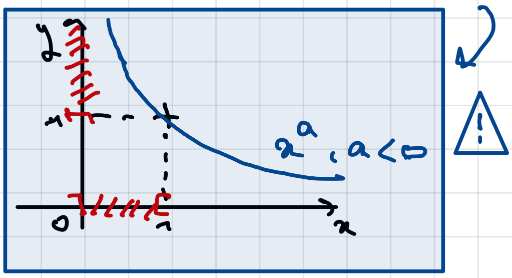
ou encore : $\exists c \in]0,x[\;/\; 1-(1-x)^t = xt(1-c)^{t-1}$

$$0 < c < x \Leftrightarrow -x < -c < 0 \Leftrightarrow 0 < 1-x < 1-c < 1$$

En conséquence, parce que $\underline{t-1 \leq 0}$, on a : $(1-c)^{t-1} \geq 1$

Et comme $xt \geq 0$, on a :

$$xt(1-c)^{t-1} \geq xt$$



Cette égalité est encore vraie pour $x = 0$

Conclusion $\boxed{\forall t \in [0,1], \forall x \in [0,1[, \text{ on a : } 1-(1-x)^t \geq xt}$

c) On suppose que $x \in [0,1[$.
Montrons que : $$e^{\frac{\ln(1-x)}{1-x^2}} \leq g(x) \leq e^{-\frac{x}{1-x^2}}$$

ou encore : $$\frac{\ln(1-x)}{1-x^2} \leq \ln(g(x)) \leq -\frac{x}{1-x^2}$$ $g(x) > 0$ $\forall x \in [0,1[$.

avec $\ln[g_n(x)] = \sum_{k=1}^{n} \ln(1-x^{2k-1})$ $\forall n \geq 1$

Or :
$$(1-x)^t \leq 1-xt \leq e^{-xt}$$ [D'après (3) a) et (4) b)]

Donc : $$0 < (1-x)^{x^{2k-2}} \leq 1-x^{2k-1} \leq e^{-x^{2k-1}}$$ (avec $t = x^{2k-2} \in [0,1[$ si $x \in [0,1[$, $k \in [\![1,n]\!]$)

$$\Leftrightarrow x^{2k-2}\ln(1-x) \leq \ln(1-x^{2k-1}) \leq -x^{2k-1}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-x)\sum_{k=1}^{n} x^{2k-2} \leq \ln(g(x)) \leq -\sum_{k=1}^{n} x^{2k-1}$$

où
$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{2k-2} = \sum_{k=1}^{n}(x^2)^{k-1} \underset{i=k-1}{=} \sum_{i=0}^{n-1}(x^2)^i = \frac{1-x^{2n}}{1-x^2} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^{2k-1} = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n}(x^2)^k = \frac{x^2}{x}\cdot\frac{1-x^{2n}}{1-x^2} = x\cdot\frac{1-x^{2n}}{1-x} \end{cases}$$

Soit :
$$\ln(1-x)\frac{1-x^{2n}}{1-x^2} \leq \ln(g_n(x)) \leq -x\frac{1-x^{2n}}{1-x}$$

Et comme $x^2 \in [0,1[$, on a $\lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0$. Donc par passage à la limite (on sait que $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ existe)

$$\ln(1-x)\cdot\frac{1}{1-x^2} \leq \ln(g(x)) \leq -x\frac{1}{1-x}$$

Puis en composant par la fonction exp, croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient :

conclusion $$\boxed{e^{\frac{\ln(1-x)}{1-x^2}} \leq g(x) \leq e^{-\frac{x}{1-x}}}$$

Enfin $g(0) = 1$ puisque $g_n(0) = 1$ pour tout $n \geq 1$

Et $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{1-x^2} = 0 = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{x}{1-x}}$$

Donc $$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1-x)}{1-x^2}} = 1 = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{x}{1-x}}$$

Et par encadrement : $\lim_{x\to 0} g(x) = 1 = g(0)$.

Conclusion $\boxed{g \text{ est continue en } 0}$

⑤ a) $\forall x \in [0,1[$, on a :

$$f_n(x^2) = \prod_{k=1}^{n} (1+x^{2k}) \; ; \quad g_n(x^2) = \prod_{k=1}^{n} (1-x^{4k-2})$$

Soit

$$g_n(x^2) = \prod_{k=1}^{n} (1-(x^{2k-1})^2)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} (1-x^{2k-1})(1+x^{2k-1})$$

Donc :

$$f_n(x^2).g_n(x^2) = \prod_{k=1}^{n} (1+x^{2k})(1+x^{2k-1})(1-x^{2k-1})$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left((1+x^{2k-1})(1+x^{2k})\right) \underbrace{\prod_{k=1}^{n} (1-x^{2k-1})}_{= g_n(x)}$$

$$= \left((1+x)(1+x^2)\right)\left((1+x^3)(1+x^4)\right)\dots\left((1+x^{2n-1})(1+x^{2n})\right). g_n(x)$$

$$= \prod_{k=1}^{2n} (1+x^k) . g_n(x)$$

conclusion $\boxed{\forall x \in [0,1[, \; f_n(x^2).g_n(x^2) = f_{2n}(x).g_n(x)}$

Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$:

$f(x^2).g(x^2) = f(x).g(x)$; Soit $\boxed{h(x^2) = h(x) \quad \forall x \in [0,1[}$

b) on montre par récurrence que $h(x^{2^n}) = h(x) \; \forall n \geq 1$

(i) $h(x^2) = h(x)$ d'après ⑤ a)

(ii) on suppose $h(x^{2^n}) = h(x)$ pour n fixé $(n \geq 1)$.

(iii) Alors $h(x^{2^{n+1}}) = h[(x^{2^n})^2] = h(x^{2^n})$ d'après ⑤ a) puisque $x^{2^n} \in [0,1[$ ...

(iv) conclusion $\boxed{\forall n \geq 1, \; h(x^{2^n}) = h(x)}$

on a $x \in [0,1[$ donc $\lim_{n\to\infty} x^{2^n} = 0$ et comme f et g sont continues en 0, le produit $h = f.g$ est continue en 0 et $\lim_{n\to\infty} h(x^{2^n}) = h(0) = f(0).g(0) = 1$

Et comme $h(x^{2^n}) = h(x) \; \forall n \geq 1$, on a $\boxed{h(x) = 1 \; \forall x \in [0,1[}$

c) Confirmation de $f(x).g(x) = 1 \Leftrightarrow \boxed{g(x) = 1/f(x)}$ ...