Devoir : Révisions d'analyse

Exercice :

① **Ex 1 :**

a) $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^k} = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n - 1$

Conclusion : $\boxed{S_1 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n - 1}$.

b) $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \frac{1}{2^k} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{2^k} = \frac{n}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \frac{1}{2^i} = \frac{n}{2}(1 + \frac{1}{2})^{n-1}$

Conclusion : $\boxed{S_2 = \dfrac{n}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}}$

② **Ex 2 :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 1/2$.

a) *Que vaut sont dixième terme ?* On rappelle que $u_0 = 3$ est son premier terme.
Il s'agissait donc de calculer u_9, à savoir :

Conclusion : $\boxed{u_9 = u_0 q^9 = \dfrac{3}{2^9} = \dfrac{3}{512}}$

b) *Calculons la somme S_{10} de ses dix premiers termes :* $S_{10} = \displaystyle\sum_{k=0}^{9} u_k = 3 \sum_{k=0}^{9} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 3 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}}$

Conclusion : $\boxed{S_{10} = 6\left(1 - \dfrac{1}{2^{10}}\right) = 6\dfrac{1023}{1024} = \dfrac{3069}{512}}$

③ **Ex 3 :** Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 2v_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) *Calculons v_2 et v_3 :*
$v_0 = 1$ donc $v_1 = 2v_0 + 3 = 5$
Conclusion : $\boxed{v_2 = 2v_1 + 3 = 13 \text{ et } v_3 = 2v_2 + 3 = 29}$

b) *Exprimons v_n en fonction de n pour tout entier naturel n :* On a reconnu une suite arithmético-géométrique.
Un raisonnement possible est le suivant :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = 2u_n + 3 \\ l & = 2l + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+1} - l & = 2(u_n - l) \\ l = -3 & \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \end{matrix}$$

La suite $(u_n - l)_{n\geq 0} = (u_n + 3)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique. D'où :

$$u_n + 3 = 2^n(u_0 + 3), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Conclusion : $\boxed{u_n = 4 \cdot 2^n - 3 = 2^{n+2} - 3, \ \forall n \in \mathbb{N}}$
✐ Notez que ce résultat est confirmé par le calcul de u_2 et de u_3...

④ **Ex 4 :** Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) on suppose que $w_0 = 2$. *Déterminons w_{100} :* Il suffisait ici de noter que $w_1 = \dfrac{1}{2}w_0^2 = \dfrac{4}{2} = 2 = w_0$.
Une récurrence immédiate permet alors de montrer que la suite (w_n) est constante égale à ^{2}.
Conclusion : $\boxed{\text{Si } w_0 = 2, \text{ alors } w_{100} = 2...}$

b) On suppose que $w_0 = 1$.

Calculons w_1 et w_2 : $w_1 = \dfrac{1}{2}$ et $w_2 = \dfrac{w_1^2}{2} = \dfrac{1}{8}$.

Exprimons maintenant w_n en fonction de n pour tout entier naturel n : On ne reconnait pas une suite usuelle mais l'énoncé nous aide en nous demandant de faire apparaître une suite arithmético-géométrique...

— On commence par montrer que tous les termes de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont strictement positifs. C'est une récurrence et il faut l'écrire.

— On passe au logarithme népérien de chaque côté de l'égalité. Dès lors :

$$\ln(w_{n+1}) = \ln\left(\frac{w_n^2}{2}\right) = 2\ln(w_n) - \ln(2)$$

La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $s_n = \ln(w_n)$ est donc une suite arithmético-géométrique et on raisonne comme dans la question 3. A savoir :

$$\begin{cases} s_{n+1} & = 2s_n - \ln(2) \\ l & = 2l - \ln(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_{n+1} - l & = 2(s_n - l) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ l = \ln(2) & \quad L_2 \end{cases}$$

Dès lors :

$$s_n - l = 2^n(s_0 - l) \Leftrightarrow s_n = 2^n(\ln(1) - \ln(2)) + \ln(2)$$

ou encore :

$$s_n = \ln(2) - 2^n\ln(2) = \ln(2)\,(1 - 2^n) = \ln\left(2^{1-2^n}\right)\text{n } \forall n \in \mathbb{N}$$

Conclusion : $\boxed{w_n = e_n^s = 2^{1-2^n} = \dfrac{2}{2^{2^n}}}$

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$.

① a) *Donnons l'ensemble de définition de f et préciser ses ensembles de continuité et de dérivabilité :*

On note que $\dfrac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$ donc $\boxed{\mathcal{D}_f =]0,1[}$.

✐ *Remarque :* On pouvait aussi écrire :

$$\frac{1}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in]0,1[\text{ grâce à un tableau de signe.}$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x} - 1$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs strictement positives si $0 < x < 1$.
Or ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue et dérivable sur }]0,1[\text{ par composition de fonction continue et dérivables sur }]0,1[}$

b) *Montrons que le point $\Omega(\dfrac{1}{2}, 0)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$:* Soit $h \in [0, \frac{1}{2}[$:

$$f(\frac{1}{2} + h) = \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+h} - 1\right) = \ln\left(\frac{2}{2h+1} - 1\right) = \ln\left(\frac{1-2h}{1+2h}\right)$$
$$f(\frac{1}{2} - h) = \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{2}-h} - 1\right) = \ln\left(\frac{2}{1-2h} - 1\right) = \ln\left(\frac{1+2h}{1-2h}\right)$$

On a donc : $f(\dfrac{1}{2} + h) = -f(\dfrac{1}{2} - h)$

Conclusion : $\boxed{\Omega(\frac{1}{2}, 0) \text{ est centre de symétrie de } \mathcal{C}_f}$

✐ Pour rappel, $\Omega(a,b)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$ si $\dfrac{f(a-h) + f(a+h)}{2} = b, \forall h \in \mathbb{R}/a-h, a+h \in \mathcal{D}_f$...

c) *Donnons un tableau de variation de f et traçons la courbe représentant f dans un repère bien choisi :*
On a vu en 1.a) que f est dérivable sur $]0,1[$. Pour tout $x \in]0,1[$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = -\frac{1}{x^2}\frac{x}{1-x} = -\frac{1}{x(1-x)}$$

Donc,

$$\forall x \in]0,1[\ f'(x) < 0$$

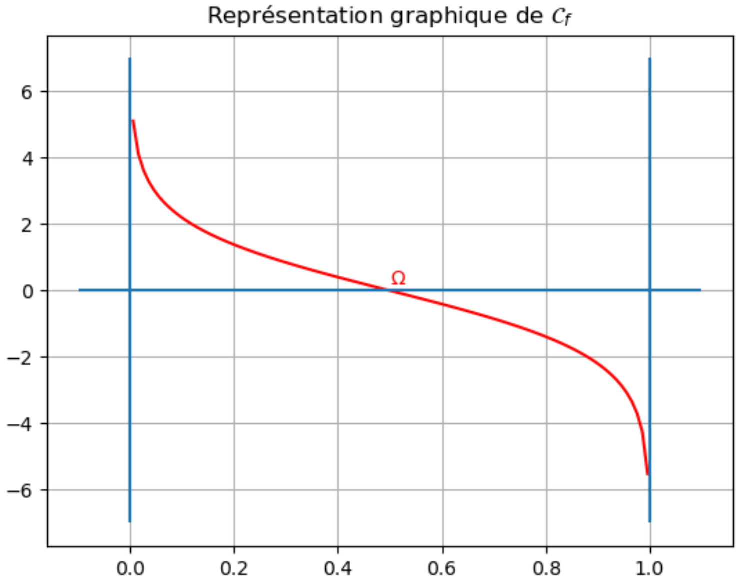
La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
On a : $\underset{x \to 0}{lim} f(x) = +\infty$ et $\underset{x \to 1^-}{lim} f(x) = -\infty$, d'où le tableau de variation :

x	0		1
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	$\|\|$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

On trouvera sa représentation graphique page suivante...

② *Montrons que f admet une application réciproque notée g :*
f est continue sur $]0,1[$, strictement décroissante sur $]0,1[$, avec $f(]0,1[) = \mathbb{R}$.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est une bijection de }]0,1[\text{ sur } \mathbb{R}.}$

f admet une application réciproque g, de même sens de variation de g, de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.



g est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $f'(g(x)) \neq 0$. Or f' ne s'annule pas sur $]0,1[$.
Donc $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$, avec :

$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(1/2)} = -\frac{1}{4}$$

Exprimons $g(y)$ en fonction de y pour tout y réel : $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in]0,1[/ f(x) = y$ avec

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 = e^y$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 + e^y \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+e^y}$$

Conclusion : $\boxed{\forall y \in \mathbb{R},\, g(y) = \frac{1}{1+e^y}}$

③ Soit h définie par $h(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.
Montrons que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ qu'on notera a :

— On pose $k(x) = h(x) - x = g(-x) - x$.
g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc k est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et somme de fonctions continues est dérivables sur $\mathbb{R}$.

— $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$k'(x) = h'(x) - 1 = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} - 1 = \frac{e^{-x} - (1+e^{-x})^2}{(1+e^{-x})^2} = -\frac{e^{-2x} - e^{-x} - 1}{(1+e^{-x})^2} < 0$$
✐ On pouvait aussi faire :
$$k'(x) = -g'(-x) - 1 = -\frac{1}{f'(g(-x))} - 1 = g(-x)(1-g(-x)) - 1 = -g^2(-x) + g(-x) - 1$$
et comme l'équation $-t^2 + t - 1 = 0$ a un discriminant $\Delta = -3 < 0$, elle reste donc négative sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]0,1[$, on a : $k'(x) < 0$ pour tout x réel...

— Quoiqu'il en soit, on conclut que k est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ avec $k(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. C'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Conclusion : $\boxed{\exists! a \in \mathbb{R} / k(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = x}$

④ On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par : $\begin{cases} u_{n+1} & = h(u_n) \\ u_0 & = 1/2 \end{cases}$

a) *Rappelons l'énoncé du théorème des accroissements finis :*
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq b$. Si f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, alors :
$$\exists c \in]a,b[/f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$
Dès lors, puisque h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, à fortiori sur tout $[x,x'] \subset]0,1[$, on a :
$$\exists c \in]x,x'[\subset]0,1[/h(x) - h(x') = h'(c)(x-x')$$
et donc
$$\forall (x,x') \in]0,1[^2,\ |h(x) - h(x')| = |h'(c)| \cdot |x-x'| \leq M \cdot |x-x'|$$
où $M = \underset{t\in]0,1[}{sup} |h'(t)|$.

Il nous reste donc à montrer que $|h'(t)| \leq \dfrac{1}{3}$ sur $]0,1[$:
$$\begin{aligned} |h'(t)| \leq \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \leq \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow 3e^{-t} \leq 1 + 2e^{-t} + \left(e^{-t}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow X^2 - X + 1 \geq 0 \text{ en posant : } X = e^{-t} \end{aligned}$$
et comme $\Delta = -3 < 0$, on déduit que $X^2 - X + 1 \geq 0$ pour tout X réel.
On a donc bien $|h'(t)| \leq \dfrac{1}{3}$, $\forall t \in]0,1[$.

Conclusion : $\boxed{\forall (x,x') \in]0,1[^2,\ |h(x) - h(x')| \leq \frac{1}{3}|x-x'|}$

b) *Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :* $|u_{n+1} - a| \leq \dfrac{1}{3}|u_n - a|$.
On se souvient que $h(a) = a$ et $h(u_n) = u_{n+1}$.
Comme $u_0 \in]0,1[$, une récurrence rapide ($h(\mathbb{R}) =]0,1[$) montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.
Donc pour pouvoir exploiter la question précédente, il reste à montrer que $a \in]0,1[$:
On rappelle que a est l'unique antécédent de 0 par k sur $]0,1[$ avec k est strictement décroissante.
Or $k(0) = h(0) = \dfrac{1}{2} > 0$ et $k(1) = \dfrac{1}{1+e^{-1}} - 1 = -\dfrac{e^{-1}}{1+e^{-1}} < 0$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $a \in]0,1[$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } |u_{n+1} - a| = |f(u_n) - f(a)| \leq \frac{1}{3}|u_n - a|}$

c) Commençons par montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n |u_0 - a|$. En effet :

i. $|u_0 - a| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 |u_0 - a|$ puisque $\left(\dfrac{1}{3}\right)^0 = 1$ et d'après 4.b) : $|u_1 - a| \leq \dfrac{1}{3}|u_0 - a|$.

ii. On suppose que : $|u_n - a| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^n |u_0 - a|$ pour n fixé ($n \in \mathbb{N}$).

iii. Alors, toujours d'après 4.b) :
$$|u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{3}|u_n - a| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} |u_n - a|$$

iv. ***Conclusion*** : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |u_0 - a|}$

Or $\underset{n\to\infty}{lim} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$, donc par application du théorème d'encadrement des limites, on a : $\underset{n\to\infty}{lim} |u_n - a| = 0$.

Conclusion : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } a.}$

d) On souhaite écrire une fonction Python permettant le calcul de a à ε près, fourni en paramètre d'entrée. En utilisant la question 4.c), on sait que u_n est une valeur approchée de a à ε près dès que $\left(\frac{1}{3}\right)^n |u_0 - a| \leq \varepsilon$.
Et comme u_0 et a sont dans l'intervalle $]0,1[$, on a $|u_0 - a| \leq 1$.
En conséquence u_n est une valeur approchée de a dès que

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{1}{3}\right) \leq \ln(\varepsilon) \Leftrightarrow n \geq -\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(3)}$$

D'où la fonction Python suivante :

```python
def estimVA_a(eps:float) -> float:
    u = 1/2
    n = int(-np.log(eps)/np.log(3))+1
    for k in range(1, n+1):
        u = 1/(1+np.exp(-u))
    return u, n
```