Devoir : Révisions d'analyse (1h30)

Le devoir se compose d'exercices rapides, d'un exercice proche du cours et d'un sujet issu des oraux de l'agro. A titre indicatif, on consacrera respectivement 20 mn, 30 mn et 40 mn à chacun d'entre eux.
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
L'usage de la calculatrice ***n'est pas*** *autorisé au cours de l'épreuve.*

Exercices rapides :

① **Ex 1 :** Donner la valeur des sommes suivantes : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^k}$; $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} \frac{1}{2^k}$

② **Ex 2 :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 1/2$.

a) Que vaut sont dixième terme ?
b) Calculer la somme S_{10} de ses dix premiers termes.

③ **Ex 3 :** Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = 2v_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer v_2 et v_3.
b) Plus généralement, exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

④ **Ex 4 :** Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) on suppose que $w_0 = 2$. Déterminer w_{100}.
b) On suppose que $w_0 = 1$. Calculer w_1 et w_2 puis exprimer w_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
✐ *On pourra penser à faire apparaître une suite arithmético-géométrique*

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$.

① a) Donner l'ensemble de définition de f et préciser ses ensembles de continuité et de dérivabilité.
b) Montrer que le point $\Omega(\frac{1}{2}, 0)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.
c) Donner un tableau de variation de f et tracer la courbe représentant f dans un repère bien choisi.

② Montrer que f admet une application réciproque notée g.
Donner son sens de variation, montrer qu'elle est dérivable et calculer $g'(0)$.
Exprimer $g(y)$ en fonction de y pour tout y réel.

③ Soit h définie par $h(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.
Montrer que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ qu'on notera a.

④ On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par : $\begin{cases} u_{n+1} & = h(u_n) \\ u_0 & = 1/2 \end{cases}$

a) Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis et montrer que :

$$\forall (x, x') \in]0,1[^2,\ |h(x) - h(x')| \leq \frac{1}{3}|x - x'|$$

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|u_{n+1} - a| \leq \dfrac{1}{3}|u_n - a|$.
c) En déduire la convergence de la suite (u_n).
d) Écrire une fonction Python permettant le calcul de a à ε près, fourni en paramètre d'entrée.

Problème : (oral agro-véto 2018)

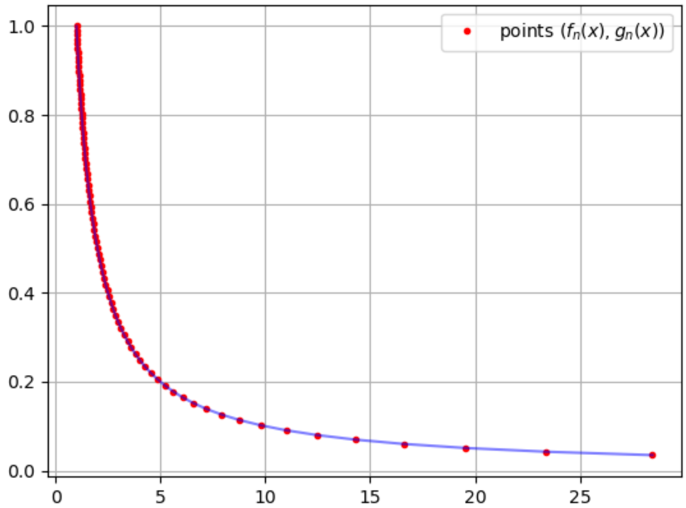
Soit x un réel de l'intervalle $[0;1[$ fixé. On définit les suites $(f_n(x))_{n\geq 1}$, $(g_n(x))_{n\geq 1}$ et $(h_n(x))_{n\geq 1}$ par :

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+x^k),\ g_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1-x^{2k-1}) \text{ et } h_n(x) = f_n(x)g_n(x).$$

On pose, sous réserve d'existence, $f(x) = \underset{n\to\infty}{lim} f_n(x)$, $g(x) = \underset{n\to\infty}{lim} g_n(x)$ et $h(x) = f(x)g(x)$.

① Écrire un script Python qui affiche dans un repère les points de coordonnées $(f_n(x); g_n(x))$ lorsque x prend les valeurs $\frac{k}{100}$ avec $k \in \{0; \cdots; 80\}$ et $n = 100$.

② L'exécution de votre script vous permet d'obtenir la figure ci-dessous.
Faire une conjecture d'une relation simple entre $f(x)$ et $g(x)$ en admettant leurs existences.



③ Montrer que pour tout $x \in [0;1[$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est croissante et que la suite $(g_n(x))_{n\geq 1}$ est décroissante.

④ a) Établir que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ 1+t \leq e^t.$$

En déduire que, pour tout $x \in [0;1[$, $f(x)$ existe et vérifie :

$$1 \leq f(x) \leq \exp\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

b) Montrer que f est continue en 0.

⑤ a) Justifier l'existence de $g(x)$ pour tout $x \in [0;1[$.

b) Montrer que pour tout $t \in [0;1[$ et $x \in [0;1[$, $1-(1-x)^t \geq xt$.
(on pourra étudier une fonction de x ou utiliser la formule des accroissements finis.)

c) En déduire l'encadrement suivant, pour tout $x \in [0;1[$:

$$\exp\left(\frac{\ln(1-x)}{1-x^2}\right) \leq g(x) \leq \exp\left(-\frac{x}{1-x^2}\right).$$

puis la continuité de g en 0.

⑥ a) Montrer que, pour tout $x \in [0;1[$: $f_n(x^2)g_n(x^2) = f_{2n}(x)g_n(x)$.
En déduire que $h(x^2) = h(x)$.

b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $h(x^{2^n}) = h(x)$.
Conclure alors que pour tout $x \in [0;1[$, $h(x) = 1$.

c) Ce dernier résultat confirme-t-il votre conjecture ?