Exercice maison : suites récurrentes

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$. On définit ensuite la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour $\forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

① a) Étudier les variations de f.

b) Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

② a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution . On l'appelle a.

b) Monter que $\frac{1}{e} < a < 1$.

c) Écrire une fonction donnant une valeur approchée de a à 10^{-3} près.
(La méthode de dichotomie est rappelée ci-dessous.)

③ a) Montrer que $a < u_0 < u_2$ et $u_3 < u_1 < a$.

b) Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones .
Peuvent-elles converger vers une même limite ?
Qu'en déduit-on concernant la convergence de (u_n) ?

④ On pose, pour $x \geq 0$, $h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$.

a) Expliciter $h(x)$ pour $x > 0$. Montrer que h est continue en 0.

b) Résoudre $h(x) = x$.

c) Montrer que la suite (u_{2n+1}) est convergente et préciser sa limite.

d) Montrer que la suite (u_{2n}) diverge vers $+\infty$.

Algorithme de dichotomie

On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

— $a_0 = a$ et $b_0 = b$

— Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.