# Planches d'oraux

## Planche 1

① **a.** On considère l'équation $(E) : x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0$.
Trouver les racines de $(E)$ et montrer qu'elles sont absolument inférieur à 1

**b.** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n$.
Montrer que $\underset{n\to\infty}{lim} u_n = 0$ pour tout $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$.

② Soit $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. On considère cette fois la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 & = a \\ v_1 & = b \\ v_{n+2} & = \sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{v_n} \end{cases}$$

**a.** Créer un programme Python avec $a$, $b$ et $n$ en paramètres et qui retourne la liste des $n$ premiers termes $(n \geq 2)$ de la suite. Que peut-on conjecturer ?

**b.** On suppose que $a > 1$ et $b > 1$.

i. Montrer que $v_n$ est strictement supérieur à 1.

ii. On pose $w_n = \frac{1}{2}\sqrt{v_n} - 1$. Montrer que :

$$w_{n+2} = \frac{w_{n+1} + w_n}{2w_{n+2} + 4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

iii. En déduire que $|w_{n+2}| \leq \frac{1}{3}|w_{n+1}| + \frac{1}{3}|w_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

iv. Pouvez-vous valider la conjecture faite en 2.a) ?

**c.** Que se passe-t-il si $a \leqslant 1$ et $b \leqslant 1$ ?

## Planche 2

Soit $a$ un réel strictement supérieur à 0.
On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + a^n u_n,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \text{avec } u_0, u_1 \in \mathbb{R}_+^*$$

① Étudier les variations de la suite $(u_n)$.

② $\forall a \in [1, +\infty[$, prouver que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

③ On suppose désormais que $a \in ]0, 1[$.

**a.** Écrire un programme Python permettant le calcul de $u_n$ pour tout entier naturel fourni en paramètre d'entrée.
On le testera avec $u_0 = 1$, $u_1 = 5$, $a = 0.1$, $a = 0.5$ et $a = 0.9$.

**b.** Montrer que pour tout entier naturel non nul : $u_{n+2} \leq u_{n+1}(1 + a^n)$.

**c.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $1 + x \leq e^x$.

**d.** En déduire la convergence de la suite $(u_n)$

## Planche 3

On se place sur $I = [0, 1]$ et on définit une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$f_0(x) = 1 \text{ et } f_{n+1}(x) = 2\int_0^x \sqrt{f_n(t)}dt,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

① Déterminer pour tout $x \in I$, $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

② Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in I$, $f_n(x) = a_n x^{b_n}$.
On vérifiera que $a_{n+1} = \dfrac{4\sqrt{a_n}}{b_n + 2}$ et $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}b_n + 1$.

③ Écrire une fonction Python `suites` d'argument $n$ qui calcule et affiche les $n + 1$ premiers termes de ces suites.
Faites une conjecture sur leurs limites respectives.

④ Déterminer $b_n$ en fonction de $n$ et en déduire sa limite.

⑤ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 1$.

⑥ On pose $w_n = 2^n \ln(a_n)$. Montrer que $\underset{n\to\infty}{lim}(w_{n+1} - w_n) = 1$.

⑦ En déduire $\exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geq n_0, w_{n_0} \leq w_n \leq 2(n - n_0) + w_{n_0}$. En déduire la limite de $(a_n)$.

## Planche 4

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $u_1 \in ]0;\pi[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\sin(u_n)$.

① Montrer que pour tout $n \geq 3 : 0 < u_n < \dfrac{\pi}{2}$

② Déterminer le seul réel vers lequel la suite $(u_n)$ peut converger.

③ Représenter graphiquement $u_n$ en fonction de $n$ pour plusieurs valeurs de $u_1$, puis émettre une conjecture sur la monotonie de la suite $(u_n)$.

④ Montrer que s'il existe un entier $n_0 \geq 4$ tel que $u_{n_0} \leq u_{n_0-1}$, alors la suite décroît strictement à partir du rang $n_0$.
*On pourra pour cela, utiliser une expression de* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *en fonction de* $u_n$ *et* $u_{n-1}$.

⑤ Est-il possible que pour tout entier $n \geq 4$, $u_n > u_{n-1}$ ?

⑥ Conclure en établissant la convergence de $(u_n)$.

⑦ Émettre une conjecture sur la limite de $\sqrt{n}u_n$.

⑧ En posant pour $n \geq 1$, $x_n = \dfrac{u_n}{n}$,
montrer que :

$$(x_{n+1} - x_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{-n^2}{6}x_n^3, \text{ puis que } \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{3}$$

⑨ En admettant que le résultat précédent permet d'établir la relation suivante : $\dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3}$, vérifier la conjecture faite à la question 7.