SUJETS DE MATHEMATIQUES PRATIQUES ET INFORMATIQUE

Question de cours.

Soient a et b deux réels tels que $a^2 - 4b = 0$. Quelles sont les solutions de $y'' + ay' + b = 0$?

Exercice 40 (oral 2018) :

Soit $n \geq 1$. Dans une étable de $n+1$ vaches avec $n+1$ places, les vaches sont numérotées de 0 à n et ont leur place attitrée en fonction de leur numéro. Marguerite, qui a le numéro 0, entre la première dans l'étable mais choisit sa place au hasard. Les autres vaches rentrent chacune dans l'ordre et vont se placer à leur place habituelle si celle-ci n'est pas prise, sinon elles prennent une autre place au hasard.
On note X la place choisie par Marguerite.
On note $A_{i,n}$ l'événement : « la vache i est à sa place »(pour $i \in [\![1, n]\!]$).
On note enfin $p_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n,n})$ la probabilité que la dernière vache ait sa place.

① a) Quelle est la loi de X ?
   b) Calculer la probabilité de $A_{1,n}$ et $A_{2,n}$.
   c) Calculer p_2 et p_3.

② a) Écrire une fonction Python permettant de donner la liste des boxes restant libres après le choix de Marguerite.
   b) Écrire une fonction permettant, prenant en entrée un entier i et la liste L des boxes libres, de simuler le choix de la vache numéro i et modifiant la liste L en conséquence ;
   c) Écrire une fonction permettant de simuler le choix successif des n vaches et renvoyant le numéro du boxe choisi par la vache numéro n.
   d) Écrire une fonction permettant d'estimer p_n. Que constatez-vous ?

③ Pour $n \geq 2$, montrer que $p_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{(X=i)}(A_{n,n})$.

④ Si $(X = i)$ est réalisé, quel est le choix des vaches numéro 1 à $i-1$?

⑤ Montrer que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathbb{P}_{(X=i)}(A_{n,n}) = \mathbb{P}(A_{n-i,n-i})$.

⑥ En déduire que pour $n \geq 1$: $p_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{j=2}^{n} p_j$.

⑦ Conclure par récurrence sur la valeur de p_n pour $n \geq 2$.

⑧ On admet que $\mathbb{P}(A_{i,n}) = \dfrac{n-i+1}{n-i+2}$ et on note $Z_{i,n}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si $A_{i,n}$ est réalisé et 0 sinon.
On note S_n le nombre de vache bien placées (sans compter Marguerite).
Déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ sous forme d'une somme qu'on calculera grâce à Python.

Question de cours.

Énoncer le théorème central limite.

Exercice 41 (oral 2017) :

X est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[0,1[$. On définit la variable $Y = 10^X$ et la variable $Z = [Y]$ (partie entière de Y).

① a) Donner $Y(\Omega)$ et en déduire $Z(\Omega)$.

b) Calculer $\mathbb{P}(Y \leq t)$ pour tout t réel. En déduire que Y admet une densité f_Y qu'on calculera.

c) Déterminer $\mathbb{P}(Z = k)$ pour tout entier $k \in Z(\Omega)$.

d) Montrer que $\mathbb{E}(Z) = 10 - \dfrac{\ln(10!)}{\ln(10)}$.

② a) En simulant Y, écrire une programme de paramètre d'entrée n qui donne la n-ième décimale de Y notée A_n.

b) Écrire un programme de paramètres n, k et m (entier supposé grand) qui permet de calculer une valeur approchée de $\mathbb{P}(A_n = k)$ pour chaque entier $k \in [\![0,9]\!]$.

③ a) Montrer que pour tout $x \geq 0$:

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x$$

b) On admet que pour tout $k \in [\![0,9]\!]$:

$$\mathbb{P}(A_n = k) = \frac{1}{\ln(10)} \sum_{i=10^{n-1}}^{10^n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{10i+k}\right)$$

Donner un encadrement de $\mathbb{P}(A_n = k)$ sous forme de sommes.

c) Montrer que pour tout $k \in [\![0,9]\!]$ et pour tout $i \in [\![10^{n-1}, 10^n - 1]\!]$, on a :

$$\int_i^{i+1} \frac{1}{10t+k} dt \leq \frac{1}{10i+k} \leq \int_{i-1}^{i} \frac{1}{10t+k} dt$$

En déduire que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n = k) = \frac{1}{10}$$

Question de cours.

Définition d'une famille libre.

Exercice 42 (oral 2018 non publié) :

Dans cet exercice, le temps est mesuré de manière discrète $t = 0, 1, 2 \cdots$ etc.
On considère une population donnée qui va occuper successivement des sites numérotés $0, 1, \cdots, n$.
Initialement le site 0 est occupé par la population, les autres sont vides et se rempliront au fur et à mesure selon l'hypothèse suivante :
A partir du moment où le site $i-1$ est occupé, le temps d'attente de remplissage du site voisin numéro i correspond à une variable aléatoire G_i suivant une loi géométrique de paramètre $1/2$.
On suppose les variables $G_1, G_1, \cdots, G_n$ indépendantes.
On note T_n la variable égale au temps nécessaire pour que le site n soit occupé.

① Justifier que $T_n = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$.

② Écrire une fonction Python qui prend en argument un nombre n et qui simule la variable aléatoire T_n.

③ Pour tout entier $j \in \mathbb{N}^*$, on note Z_j le nombre de sites occupés à l'instant $t = j$ (sans compter le site 0).
Déterminer la loi de Z_j, son espérance et sa variance.

④ Montrer que pour tout entier $k \geq n$, $\mathbb{P}(T_n = k) = \binom{k-1}{n-1} \frac{1}{2^k}$.

⑤ a) Pour tout $x \in]0, \ln(2)[$, calculer $\mathbb{E}\left(e^{xG_1}\right)$.
b) En déduire $\mathbb{E}\left(e^{xT_n}\right)$.

⑥ Montrer que pour tout $x \in]0, \ln(2)[$, et pour tout réel y, $\mathbb{P}(T_n \geq y) \leq \dfrac{\mathbb{E}(e^{xT_n})}{e^{xy}}$.

⑦ Donner le DL à l'ordre 2 de $2e^{-x} - 1$ au voisinage de 0. En déduire le DL à l'ordre 2 de $\ln(2e^{-x} - 1)$.

⑧ Déterminer $\underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{P}(T_n \geq y)$. Interpréter ce résultat.

Question de cours.

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire soit injective.

Exercice 43 (oral 2019 publié) :

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, suivant chacune une même loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout$n \geq 2$, on note $Y_n = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ et on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

① a) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1]$. Vérifier que $-\ln(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.

b) En déduire une fonction Python qui prend un entier n en entrée et renvoie une simulation de la variable aléatoire Y_n.

c) En admettant que la variable Y_n admet une espérance, à l'aide de la fonction Python précédente, conjecturer la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{S_n}$.

Dans toute la suite de l'exercice, on fixe n un entier tel que $n \geq 2$.

② On note F_n la fonction de répartition de Y_n.
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1-e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En déduire que la variable Y_n est une variable à densité, et déterminer une densité f_n de Y_n.

③ a) Montrer que pour tout u de $[0,1]$, on a :

$$(1-u)^n \geq 1 - nu$$

b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} (1 - F_n(x))dx$ est convergente et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(1 - F_n(x)) = 0$.

④ a) Pour tout $A > 0$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_0^A x f_n(x)dx = \int_0^A (1 - F_n(x))dx - A(1 - F_n(A))$$

b) En déduire que la variable Y_n admet une espérance vérifiant : $\mathbb{E}(Y_n) = \displaystyle\int_0^{\infty} (1 - F_n(x))dx$.

⑤ A l'aide du changement de variable $t = 1 - e^{-x}$, montrer que : $\mathbb{E}(Y_n) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}dt$.
Et en déduire finalement que :

$$\mathbb{E}(Y_n) = S_n$$

Question de cours.

Définition de la fonction partie entière.

Exercice 44 (oral 2018) :

On prendra comme convention : $x\ln(x) = 0$ pour $x = 0$.
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1, n]\!]$.
On définit : $H(X) = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i)\ln(\mathbb{P}(X = i))$.

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}((X = i)\cap(Y = j))\ln(\mathbb{P}((X = i)\cap(Y = j))) \text{ et } H_X(Y) = H(X,Y) - H(X)$$

① Que vaut $H(X)$ lorsque X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$?

② Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A_{i,j} = \mathbb{P}((X = i)\cap(Y = j))$.

a) Écrire une fonction Python `H` qui prend en argument la matrice A et qui renvoie $H(X,Y)$.
b) Écrire une fonction Python `K` qui prend en argument la matrice A et qui renvoie $H_X(Y)$.
c) Tester ces deux fonctions pour $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$

③ Retour au cas général : Quel est le signe de $H(X)$?

④ Que vaut $H(X,Y)$ lorsque X et Y sont indépendantes ?

⑤ Soit f une application définie sur $[\![1, n]\!]$ et à valeurs dans $[\![1, n]\!]$.
Que vaut $H(X, f(X))$?

⑥ Des propriétés de $H_X(Y)$?

a) En comparant $\mathbb{P}(X = i)$ et $\mathbb{P}((X = i)\cap(Y = j))$, que vaut $H_X(Y)$?
b) Est-il possible d'avoir $H_X(Y) = 0$?

Question de cours.

Définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité.

Exercice 45 :

Partie 1 : Intégrales et inégalités. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

① Rappeler la nature de la série $\sum \frac{1}{n}$

② Montrer :
$$\forall k \geq 2, \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$$
En déduire :
$$1 + \int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t}$$

③ Montrer que $\ln(n+1) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$.
En déduire un équivalent de S_n pour n au voisinage de l'infini.

Partie 2 : Probabilités.
Une urne contient initialement une boule noire et une boule blanche. On tire successivement une boule avec remise et on ajoute après chaque tirage une boule noire de l'urne.
Soit X la variable aléatoire donnant le numéro du tirage d'apparition de la première boule noire, et Y la variable aléatoire donnant le numéro du tirage d'apparition de la première boule blanche.

① Ecrire une fonction Python effectuant une simulation de l'expérience et qui renvoie la valeur de X.

② Déterminer la loi de probabilité de X.

③ X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

④ Déterminer la loi de probabilité de Y.

⑤ Etudier l'existence de l'espérance et la variance de Y.

⑥ Donner un équivalent de la somme $\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(Y = k)$ pour n au voisinage de $+\infty$.

Question de cours.

DL 5 de sin

Exercice 46 (oral 2019) :

On dispose de N boules numérotées de 1 à N, indiscernables au toucher, et de 2 urnes A et B.

On répartit initialement les boules entre les deux urnes, puis on effectue une série illimitée d'étapes selon le protocole suivant : à chaque étape, on tire au hasard un nombre entre 1 et N et on change d'urne la boule portant le numéro correspondant.
On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes initialement dans l'urne A et pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne A après n étapes.

1. Soit $k \in [\![1, N-1]\!]$. Déterminer $P(X_{n+1} = k)$ en fonction de $P(X_n = k-1)$ et $P(X_n = k+1)$.
2. a) Écrire une fonction `etape` prenant en arguments `k` (nombre de boules dans A à un instant donné) et `N` et renvoyant la valeur nombre de boules dans A à l'instant suivant .
   b) Écrire une fonction renvoyant sous forme d'une liste les valeurs successivement prises par $X_0, ..., X_n$.

   A partir de maintenant et dans toute la suite, on suppose $N = 3$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$; on note aussi $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$,
   a) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$.
   b) Montrer que 1 est valeur propre de M et donner le sous espace propre associé .
   c) On suppose que X_0 suit une loi binomiale de paramètres 3 et 1/2. Quelle loi suit alors X_n ?
   d) Quel est l'ensemble des lois que pourrait suivre X_0 pour que X_n ait la même loi que X_0 ?
4. On suppose que l'urne A est initialement vide. On appelle D la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour que l'urne A soit à nouveau vide.
   a) Ecrire une fonction python simulant D.
   b) i. Calculer $P(D = 2)$ et $P(D = 4)$.
      ii. Pourquoi D ne peut-il prendre que des valeurs paires ?
      iii. Montrer que $P(X_{2k+2} = 0) = \frac{1}{9}P(X_{2k} = 0) + \frac{2}{9}$.
      (Question non posée et non indispensable pour la suite, mais que je pose pour les révisions : calculer $P(X_{2k} = 0)$ en fonction de k.)
      iv. On note désormais $u_k = P(X_{2k} = 0)$ et $d_k = P(D = 2k)$.
      Montrer que $(X_{2k} = 0) = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{k} ((X_{2k} = 0) \cap (D = 2j))$.
      v. En déduire que $d_k = u_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} d_j u_{k-j}$.

c) A l'aide des relations $u_{k+1} = \frac{1}{9}u_k + \frac{2}{9}$ et $d_k = u_k - \sum_{j=1}^{k-1} d_j u_{k-j}$, écrire une fonction Python renvoyant la liste $[d_1, \ldots, d_n]$.
S'il reste du temps, pour $n = 5$, comparer les résultats obtenus par simulation de D avec les résultats de la fonction précédente.

Question de cours.

définition du produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 47 (oral 2019) :

Soient $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et de même loi telle que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(X_k = -1) = \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2}$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. a) Calculer l'espérance et la variance de $\frac{S_n}{n}$.
   b) Montrer que $\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$.
   c) Écrire un programme Python de paramètres n et ε qui simule S_n et renvoie 1 si $\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon$ et 0 sinon.
   d) Ecrire un programme Python renvoyant une valeur approchée de $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right)$. le tester pour $n = 100$, $n = 1000$, $n = 10000$.
   apporter un regard critique par rapport à la question 1)b).
2. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \geq 0 \quad \mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) = \left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^n$.
   b) Montrer que $\forall t \geq 0 \quad \frac{e^t+e^{-t}}{2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$, puis montrer que $\frac{e^t+e^{-t}}{2} \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.
   c) Montrer que $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \leq 2\exp\left(\frac{nt^2}{2} - nt\varepsilon\right) \leq 2\exp\left(\frac{-n\varepsilon^2}{2}\right)$.
   (On étudiera les variations sur $\mathbb{R}^+$ de $t \mapsto \frac{nt^2}{2} - nt\varepsilon$).
   apporter un regard critique par rapport à la question 1)b).

Question de cours.

Définir ce qu'est une racine d'un polynôme puis une racine multiple.

Exercice 48 (oral 2019) :

On rappelle qu'une permutation de $[\![1,n]\!]$ est une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même .
On définit un dérangement de $[\![1,n]\!]$ comme étant une permutation de $[\![1,n]\!]$ sans point fixe . (rappel : on dit que k est un point fixe de la permutation p ssi $p(k) = k$).
On rappelle qu'on représente usuellement une permutation p de $[\![1,n]\!]$ par la n-liste des images $[p(1), p(2), \dots, p(n)]$. Dans une telle liste, tout entier de $[\![1,n]\!]$ apparaît une fois et une seule.

1. En utilisant la fonction `randint` du module random, écrire une fonction Python permettant de simuler une permutation de $[\![1,n]\!]$.
2. Écrire une fonction Python prenant en argument une permutation P de $[\![1,n]\!]$, et renvoyant `True` si c'est un dérangement, `False` sinon.
3. En déduire une estimation de la probabilité qu'une permutation de $[\![1,50]\!]$ soit un dérangement.
4. On note D_n le nombre de dérangements de $[\![1,n]\!]$.
   a) Justifier que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$.
   b) Montrer que si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v_k$, alors $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} u_k$
      ✐ *On montrera au préalable que :* $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}$.
   c) En déduire la probabilité d_n qu'une permutation de $[\![1,n]\!]$ prise au hasard soit un dérangement.
   d) Donner $\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_n$. Ce résultat est-il en accord avec celui de la question 3) ?
5. On appelle F_n le nombre de points fixes d'une permutation de $[\![1,n]\!]$.
   a) Exprimer F_n à l'aide de variables aléatoires de Bernoulli.
      En déduire l'espérance de F_n.
   b) Donner la loi de F_n.

Question de cours.

A quelle(s) condition(s) sur sa fonction de répartition une variable aléatoire X admet-elle une densité de probabilité ? Comment détermine-t-on alors une densité de X ?

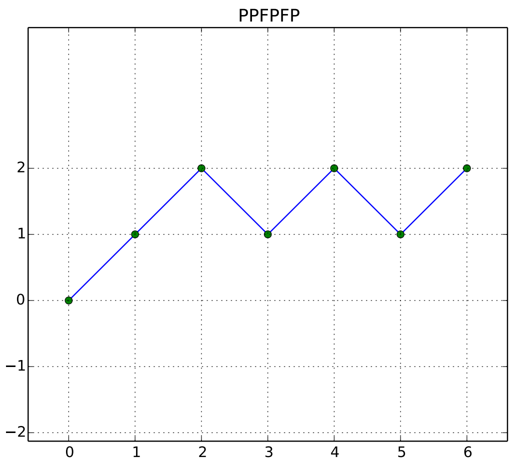
Exercice 49 (oral 2019) :

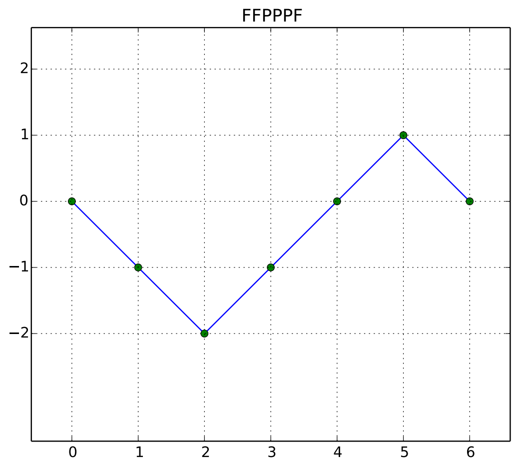
On effectue $2n$ tirages d'une pièce de monnaie équilibrée . On appelle X_{2n} la variable aléatoire égale au nombre de "pile" obtenus. On note A_{2n} l'événement « au cours des $2n$ lancers, le nombre de "pile" obtenus a toujours été strictement supérieur au nombre de "face" obtenus ».

1. Si $n = 2$, quelle est la probabilité de A_{2n} ?
2. a) Écrire une fonction Python simulant $2n$ lancers de la pièce et renvoyant 1 si A_{2n} est réalisé, 0 sinon.

   b) A l'aide de la fonction précédente, estimer la probabilité de A_{2n} pour $n = 2$ et $n = 5$.

   Dans la suite, on représente chaque suite des $2n$ lancers de la pièce par un chemin partant du point $O(0, 0)$, tel que, pour chaque lancer de la pièce, on progresse d'une unité vers la droite et d'une unité vers le haut si l'on obtient pile, et on progresse d'une unité vers la droite et d'une unité vers le bas si l'on obtient face. Voici par exemple, pour $n = 3$, les chemins



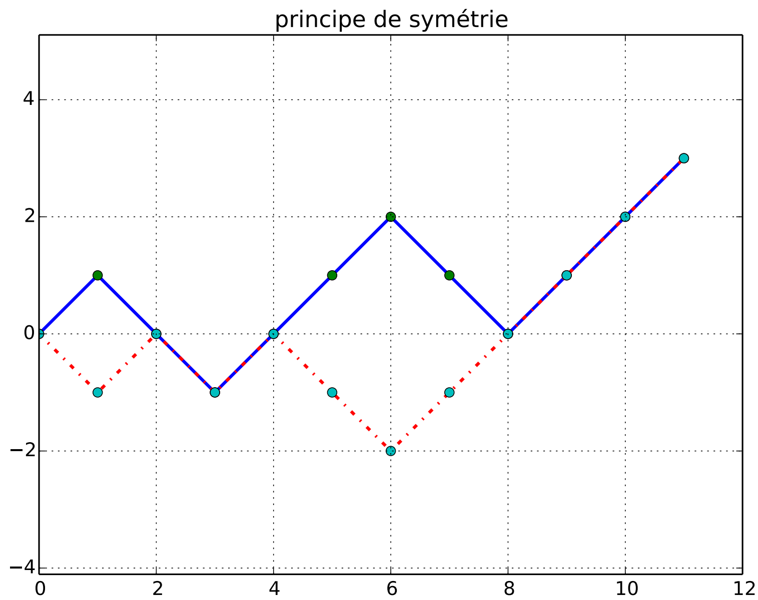


3. Combien y a-t-il de chemins possibles ?
4. Pour $i \in [\![0, 2n]\!]$, combien de chemins réalisent $(X_{2n} = i)$?
5. Quelle est la loi de X_{2n} ?
6. On admet dans un premier temps que, pour $i > n$, $P_{(X_{2n}=i)}(A_{2n}) = \frac{i-n}{n}$.

   a) Justifier que $\mathbb{P}(A_{2n}) = \dfrac{1}{2^{2n}}\left(\underbrace{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=n+1}^{2n} i\binom{2n}{i}}_{S_1} - \underbrace{\displaystyle\sum_{i=n+1}^{2n}\binom{2n}{i}}_{S_2}\right)$.

   b) En calculant séparément les deux sommes intervenant dans l'expression ci-dessus, donner $\mathbb{P}(A_{2n})$.

7. Le but de cette question est de démontrer la propriété admise précédemment, à savoir que pour $i > n$, $\mathbb{P}_{(X_{2n}=i)}(A_{2n}) = \frac{i-n}{n}$.
   On suppose donc dans toute cette question $(X_{2n} = i)$ réalisé. On s'intéresse en conséquence uniquement aux chemins partant de O et pour lesquels, parmi les $2n$ pas effectués vers la droite, il y en a eu i qui montaient . On note $Z(2n, 2i-2n)$ le point d'arrivée commun à ces chemins.
   a) Combien y a-t-il de ces chemins au total ?
   b) Combien y a-t-il de ces chemins passant par $A(1, 1)$?
   c) Montrer que parmi ces chemins il y a en a exactement $\binom{2n-1}{i}$ passant par $B(1, -1)$.
   d) On remarque que l'événement A_{2n} est réalisé ssi le chemin obtenu ne coupe pas l'axe Ox. On cherche donc à dénombrer les chemins partant de O et arrivant en Z et ne coupant pas l'axe Ox.
   Pour celà, on dénombre tout d'abord ceux qui coupent l'axe Ox.
      i. En utilisant une symétrie axiale d'axe Ox, comme dans le dessin suivant, justifier qu'il y a autant de chemins passant par A et coupant l'axe Ox, que de chemins passant par B .



      ii. En déduire le nombre de chemins passant par A et ne coupant pas l'axe Ox.
      iii. Retrouver ainsi que pour $i > n$, $P_{(X_{2n}=i)}(A_{2n}) = \frac{i-n}{n}$.

Question de cours.

Représentation graphique de la fonction sinus.

Exercice 50 (oral 2019) :

Deux personnes, Antoine et Brigitte, décident de vider une urne de n beignets. Elle contient 1 beignet au chocolat et $n-1$ beignets aux pommes mais Brigitte n'aime que les beignets aux abricots...
Quand Antoine pioche un beignet, il le mange, quand Brigitte pioche un beignet, elle le remet dans l'urne.
Tous deux tirent à tour de rôle et c'est Antoine qui commence.

1. a) Combien de tirages sont nécessaires pour vider l'urne ?
   b) Soit i appartenant à $[\![1, n-1]\!]$. Combien reste-t-il de beignets dans l'urne après le $2i$-ième tirage ? Après le $2i+1$-ième tirage ?
2. Écrire une fonction Python prenant n en argument, simulant l'expérience et renvoyant le numéro du tirage où le beignet au chocolat a été mangé. (On pourra utiliser au choix la fonction `random` ou la fonction `randint`).
3. On note X_i la variable aléatoire égale à 1 si le beignet au chocolat est tiré au i ème tirage (que ce soit ou non pour la première fois) . On note X le nombre total d'apparitions du beignet au chocolat alors que l'urne est vide.
   Justifier que X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/n$.
4. Trouver l'espérance de X après avoir exprimé X en fonction des X_i.
5. Soit Y variable aléatoire égale au tirage pour lequel Antoine mange le beignet au chocolat. Donner la loi de Y et déterminer son espérance.
6. Écrire des fonctions Python permettant de valider les réponses obtenues en 4. et en 5.

Question de cours.

Représenter une densité d'une loi normale centrée réduite.

Exercice 51 (oral 2019) :

On dispose d'un dé équilibré à n faces avec lequel 2 joueurs (nommés A et B) prennent part à un jeu . A lance le dé et verse 3 euros à B
B lance le dé et tant qu'il n'obtient pas un nombre supérieur ou égal à celui obtenu par A il relance le dé. À chaque lancer il verse 1 euro à A.
On note : X : la variable aléatoire égale au nombre obtenu par A.
M : la variable aléatoire égale à la somme versée à A.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Écrire une fonction Python permettant de simuler M. (L'emploi de la fonction `randint` est conseillé.)
3. Calculer la probabilité que $(M = j)$ sachant que $(X = 1)$.
4. Soit $k \geq 2$. Calculer la probabilité que $(M = j)$ sachant que $(X = k)$, ainsi que $(M \geq j)$ sachant que $(X = k)$.
5. Calculer $\mathbb{P}(M \geq j)$ pour tout $j \geq 1$.
6. On admet que $\mathbb{E}(M) = \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(M \geq j)$. Calculer $\mathbb{E}(M)$.
   Donner sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
7. Déterminer l'espérance de G, gain algébrique de A, ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
8. Déterminer l'espérance du gain lorsque le dé utilisé est un dé équilibré à 6 faces.
   Déterminer le nombre de faces que doit posséder le dé pour que l'espérance du gain devienne positive pour A.

Question de cours.

DL 4 en 0 de $\ln(1+x)$.

Exercice 52 (oral 2019) :

Un fabricant de poudre chocolatée met dans chacune de ses boîtes une image à collectionner. Il y a en tout n images différentes , et une seule par boîte.
On note T la variable aléatoire correspondant au nombre de boîtes nécessaires pour avoir toute la collection d'images.
Pour tout i appartenant à $[\![2, n]\!]$, on note T_i la variable aléatoire égale au nombre de boîtes à acheter pour obtenir une $i$ème image différente des $i-1$ déjà obtenues.
On définit également une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $u_n = -\ln(n) + 1 + 1/2 + ... + 1/n$. On admet qu'elle est convergente.

1. Faire un programme prenant en argument epsilon (supposé réel strictement positif) et qui renvoie u_n tel que l'écart $u_{n+1} - u_n$entre deux termes consécutifs soit inférieur à epsilon.
2. a) Pour $i \in [\![2, n]\!]$, donner la loi de T_i
   b) Exprimer T en fonction de $T_2, T_3, ..., T_n$.
   c) Montrer que $\mathbb{E}(T) = n * (1 + 1/2 + ... + 1/n)$.
   d) c étant un réel strictement positif, montrer que $\mathbb{P}(T > n * c * \ln(n)) \leq 1/c + u_n/(c * \ln(n))$
3. a) Pour i, k dans $\mathbb{N}^*$, on pose $A_{i,k}$:" on n'a pas obtenu l'image i lors des k premiers tirages". Calculer $\mathbb{P}(A_{i,k})$.
   b) c étant un réel strictement positif, montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{i,k}\right) \leq n * \exp(-k/n)$.
   (indication : $1 + t \leq exp(t)$).
   c) Montrer que $\mathbb{P}(T > n * c * ln(n)) \leq 1/(n^{c-1})$.
4. Comparer les deux inégalités des questions 2.d) et 3.c) (Question un peu vague......)

Question de cours.

Définition d'une application surjective.

Exercice 53 (oral 2019) :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Écrire une fonction Python qui renvoie une liste de n valeurs comprises entre a et b pour une variable aléatoire centrée réduite.
   On utilisera l'instruction random.randn() du module numpy.
2. Donner la valeur moyenne obtenue pour $a = \frac{1}{2}$, $b = 10^4$ et $n = 1000$.

   Soit X suivant une loi normale d'espérance μ et de variance θ^2, et $U = \frac{X-\mu}{\theta}$. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et pour tout réel x on pose $F_{\mu,\theta}(x) = P_{(a<X\leq b)}(X \leq x)$.
3. a) Donner la loi de U. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\theta}\right)$.

   b) Montrer que $F_{\mu,\theta}$ est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
4. Soit Y admettant $F_{0,1}$ comme fonction de répartition.

   a) Donner une densité de Y.

   b) Donner, en fonction de a, b et $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, l'espérance de Y.

   c) Que devient-elle si a tend vers 0 et b tend vers $+\infty$? Cela est-il confirmé par la fonction écrite à la question 1. ?

Question de cours.

Définition d'une valeur propre et d'un sous espace propre pour une matrice.

Exercice 54 (oral 2019) :

On fixe une origine des temps et on s'intéresse aux appels reçus par un vétérinaire de campagne à partir de cet instant.
On considère que le temps écoulé entre cet instant initial et l'appel du vétérinaire par le k-ième propriétaire de chevaux suit une variable aléatoire X_k dont une densité est f_k et que le temps écoulé entre cet instant initial et l'appel du vétérinaire par le $k$ième propriétaire de vaches suit une variable aléatoire Y_k dont une densité est g_k définies par :

$$f_k(t) = \begin{cases} \lambda^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } g_k(t) = \begin{cases} \mu^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

λ et μ étant des réels strictement positifs fixés.
On suppose également que les variables aléatoires X_i sont indépendantes des variables aléatoires Y_j et on admet qu'on ne reçoit jamais deux appels au même instant.

On appelle également U_n la variable aléatoire égale au nombre de propriétaires de chevaux parmi les n premiers appels reçus par ce vétérinaire.

1. a) On suppose qu'un jour donné, les valeurs prises par les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 ont été respectivement 2, 4, 4.1 et les valeurs prises par les variables aléatoires Y_1, Y_2, Y_3 ont été 2.5, 3.2, 4.2. Quelle est la valeur prise par U_4 ?
   b) Écrire une fonction Python `U(n,X,Y)`, où X représente la liste des valeurs de $X_1, \dots, X_n$ et Y représente la liste des valeurs de $Y_1, \dots, Y_n$ et qui renvoie U_n. (On rappelle que tous les instants des appels sont distincts.)
2. a) Justifier que $(U_n \geq k) = (X_k < Y_{n-k+1})$. (On pourra s'aider d'un schéma.)
   b) On note $p_k = \mathbb{P}(X_k < Y_{n-k+1})$.
   Pour k compris entre 1 et $n-1$, donner $\mathbb{P}(U_n = k)$ en fonction de p_k et p_{k+1}, puis $\mathbb{P}(U_n = n)$.
3. On suppose que $\lambda + \mu = 1$.
   a) En utilisant f_k comme une densité, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-\lambda t} dt = \frac{(k-1)!}{\lambda^k}$.
   b) Montrer qu'une densité de $-X_k$ est $t \mapsto f_k(-t)$.
   c) Soit h_k une densité de $Y_{n+1-k} - X_k$; à l'aide de la formule du produit de convolution, montrer que, si $x \geq 0$,
   $$h_k(x) = \frac{\lambda^k \mu^{n+1-k}}{(k-1)!(n-k)!} e^{\lambda x} \int_x^{+\infty} (t-x)^{k-1} t^{n-k} e^{-t} dt \text{ ou bien}$$
   $$= \frac{\lambda^k \mu^{n+1-k}}{(k-1)!(n-k)!} e^{-\mu x} \int_0^{+\infty} u^{k-1} (u+x)^{n-k} e^{-u} du.$$
   d) Montrer que, si $x \geq 0$, $h_k(x) = \dfrac{\lambda^k \mu^{n+1-k}}{(k-1)!(n-k)!} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} (n-i-1)!\, x^i e^{-\mu x}$.
   e) En déduire une expression de p_k.
   f) Montrer que $\mathbb{P}(U_n = k) = \dbinom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k}$. Quelle est la loi de U_n ?

Question de cours.

Covariance de deux variables aléatoires discrètes.

Exercice 55 (oral 2019) :

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $c_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx$.

1. a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2 \quad c_{n+1} \leq c_n \leq c_{n-1}$.
   b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1 \quad c_{n+1} + c_n = \frac{1}{n}$.
   c) En déduire que $c_n \sim \frac{1}{2n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Déterminer c_1.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \quad c_n = (-1)^n \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 \right)$.
3. Écrire une fonction Python de paramètre n renvoyant la valeur de c_n.
4. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{c_n(1+x)} & si \quad x \in [0,1] \\ 0 & sinon \end{cases}$.
   a) Montrer que f_n est une densité . On note désormais X_n une variable à densité f_n.
   b) Montrer que X_n a une espérance et donner la limite de cette espérance lorsque n tend vers $+\infty$.
   c) On note F_n la fonction de répartition de X_n et $F(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x \geq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$.
   Montrer que pour tout réel x, la suite $(F_n(x))$ a pour limite $F(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

Question de cours.

Rappeler la formule des accroissements finis.

Exercice 56 : Publié (2019)

Rappel : *La fonction ci-dessous permet de représenter graphiquement la loi d'une variable aléatoire à valeurs dans* $[\![0, n]\!]$, $(n \in \mathbb{N})$, *loi étant la liste* $[\mathbb{P}(X_n = 0), \mathbb{P}(X_n = 1), \cdots, \mathbb{P}(X_n = n)]$.

```python
from matplotlib.pyplot import *
def graphe(loi):
    lx = [i for i in range(len(loi))]
    bar(lx,loi)
    ylim(0,0.5)
    show()
```

Pour se rendre d'un endroit à un autre, les individus d'une fourmilière ont le choix entre deux trajets disjoints, que nous nommerons A et B. A chaque fois qu'une fourmi emprunte l'un des deux chemins, elle y dépose une certaine quantité de phéromone qui peut éventuellement dépendre de la quantité de phéromone déjà présente sur le chemin.

Notations : Pour chaque $n \geq 1$, α_n (respectivement β_n) désigne la quantité de phéromone présente sur le chemin A (resp. B) après le n-ième trajet. A_n (resp. B_n) désigne l'événement : « la n-ième fourmi choisit le trajet A (resp. B) ». Nous supposerons que chaque fourmi choisit de façon aléatoire le chemin qu'elle emprunte, en affectant à chacun une probabilité proportionnelle à la quantité de phéromone qui y est présente.

On a donc : $\mathbb{P}_{(\alpha_n = a)\cap(\beta_n = b)}(A_{n+1}) = \dfrac{a}{a+b}$ et $\mathbb{P}_{(\alpha_n = a)\cap(\beta_n = b)}(B_{n+1}) = \dfrac{b}{a+b}$

Enfin, X_n désignera le nombre de fourmis ayant choisi le trajet A lors des n premiers trajets.

Nous supposerons qu'initialement $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ et qu'à chaque trajet une fourmi multiplie par un facteur $r > 1$ la quantité de phéromone déjà présente sur le chemin qu'elle emprunte.

① Déterminer la loi des variables X_1, X_2 et X_3.

② Rédiger une fonction `simulX` qui reçoit un entier n et un réel r, simule les déplacements de n fourmis suivant la règle énoncée et renvoie le nombre X_n de fois où le chemin A a été emprunté.

③ a) Rédiger une fonction `loiX` qui reçoit un entier n et un réel r et renvoie, sous forme de liste, des valeurs approchées des probabilités $[\mathbb{P}(X_n = 0), \mathbb{P}(X_n = 1), \cdots, \mathbb{P}(X_n = n)]$ obtenues en faisant 1000 simulations de la variable X_n.

b) Représenter graphiquement la loi de la variable X lorsque $n = 100$ et $r = 2$. Commenter.

④ Exprimer en fonction de n et de r la probabilité $\mathbb{P}(X_n = n)$.
On ne tentera pas de simplifier l'expression obtenue.

⑤ On pose $\forall n \geq 1$, $p_n(r) = \dfrac{r}{1+r}\dfrac{r^2}{1+r^2}\cdots\dfrac{r^n}{1+r^n}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$q_n(r) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 - \frac{1}{r^3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{r^{2n+1}}\right).$$

Démontrer que pour tout $r > 1$, les suites $(p_n(r))_{n\geq 1}$ et $(q_n(r))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
On notera $p(r)$ et $q(r)$ leurs limites respectives.

⑥ En remarquant que $\forall n \geq 1, p_n(r) = \dfrac{1}{1+r^{-1}} \cdot \dfrac{1}{1+r^{-2}} \cdots \dfrac{1}{1+r^{-n}}$, montrer que $p(r) \geq \exp\left(-\dfrac{1}{r-1}\right)$.
On pourra admettre sans le démontrer l'inégalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$.

⑦ Démonter que $\forall r > 1,\ q(r) \leq \exp\left(-\dfrac{r}{r^2-1}\right)$.

⑧ On admet que $\forall r > 1,\ p(r) = q(r)$. Déduire des questions précédentes un encadrement de la limite de la probabilité $\mathbb{P}(X_n = n)$ en fonction de r.

Question de cours.

Si f est la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x)=\sqrt{1-x}$, déterminer l'expression de sa dérivée f'.

Exercice 57 : Publié (2019)

On souhaite estimer un paramètre $p\in]0,1[$. on note $q=1-p$.
Soit un entier $n\geq 1$ fixé. On considère $X_1, X_2, \cdot, X_n$ des variables aléatoires, indépendantes, suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et définies sur un même espace probabilisé.
On note $\overline{X_n}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

① a) Justifier que $p(1-p)\leq \dfrac{1}{4}$.

b) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que l'intervalle $\left[\overline{X_n}-\sqrt{\dfrac{5}{n}}, \overline{X_n}+\sqrt{\dfrac{5}{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0.95.

② Écrire une fonction Python `test(n,p,a,b)` qui prend en arguments un entier n, une probabilité p, deux flottants a et b, simule une réalisation de $\overline{X_n}$ et qui retourne 1 si $\overline{X_n}$ appartient à $[a,b]$ et 0 sinon.
Utiliser cette fonction pour valider la réponse obtenue en 1.b).
On cherche par la suite un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0.95 d'amplitude plus petite.

③ On fixe un réel strictement positif t quelconque et ε un réel strictement positif quelconque.

a) Établir l'égalité : $\mathbb{P}\left(\overline{X_n}-p\geq\varepsilon\right)=\mathbb{P}\left(e^{nt\overline{X_n}}\geq e^{nt(p+\varepsilon)}\right)$.

b) En utilisant l'inégalité de Markov, établir l'inégalité suivante : $\mathbb{P}\left(\overline{X_n}-p\geq\varepsilon\right)\leq e^{n(\ln(pe^t+q)-t(p+\varepsilon))}$.

④ On admet l'inégalité : $\ln(pe^t+q)-tp\leq\dfrac{t^2}{8}$. Ainsi, on a l'inégalité suivante :

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}(\overline{X_n}-p\geq\varepsilon)\leq e^{n\left(\frac{t^2}{8}-t\varepsilon\right)}$$

En déduire l'inégalité : $\mathbb{P}(\overline{X_n}-p\geq\varepsilon)\leq e^{-2n\varepsilon^2}$

⑤ Déduire des questions 3.c) et 4. l'inégalité :

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \mathbb{P}\left(|\overline{X_n}-p|\geq\varepsilon\right)\leq 2e^{-2n\varepsilon^2}$$

⑥ Comment choisir ε pour obtenir un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0.95 ? L'amplitude de l'intervalle de confiance est-elle plus réduite que celle obtenue à la question 1.b) ?

Question de cours.

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire soit injective.

Exercice 58 : Publié (2019)

Soient $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, suivant chacune une même loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout $n \geq 2$, on note $Y_n = max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, et on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

① a) Soit U une variable aléatoire, de loi uniforme sur $[0,1]$. Vérifier que la variable $-\ln(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.

b) En déduire une fonction Python qui prend un entier n en entrée, et renvoie une simulation de la variable aléatoire Y_n.

c) En admettant que la variable aléatoire Y_n admet une espérance, à l'aide de la fonction Python précédente, conjecturer la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{S_n}$.

Dans toute la suite de l'exercice, on fixe n un entier tel que $n \geq 2$.

② On note F_n la fonction de répartition de Y_n.
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1-e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

En déduire que la variable Y_n est une variable à densité, et déterminer une densité f_n de Y_n.

③ a) Montrer que pour tout réel $u \in [0,1]$, on a :

$$(1-u)^n \geq 1 - nu$$

b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} (1 - F_n(x))dx$ est convergente et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(1 - F_n(x)) = 0$.

④ a) Pour tout $A > 0$, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_0^A x f_n(x)dx = \int_0^A (1 - F_n(x))dx - A(1 - F_n(A))$$

b) En déduire que la variable Y_n admet une espérance, vérifiant :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(x))dx$$

⑤ A l'aide du changement de variables $t = 1 - e^{-x}$, montrer que :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}dt$$

En déduire finalement que :

$$\mathbb{E}(Y_n) = S_n$$

Question de cours.

Définition d'une famille génératrice dans un espace vectoriel E.

Exercice 59 : Publié (2019)

Dans tout l'exercice, les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$.
Si X *est une variable aléatoire, on notera* $\mathbb{E}(X)$ *son espérance et* $\mathbb{V}(X)$ *sa variance.*
Soient $a \in]0, 1]$ et f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a} exp\left(-\dfrac{x^2}{2a}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

① Montrer que f est une densité.

② On considère dorénavant X une variable aléatoire de densité f.
Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

③ On considère la variable aléatoire Y donnée par : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$.

a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.
b) On pose $U = 1 - e^{-Y}$. Montrer que U suit la loi uniforme sur $[0, 1[$.
c) En déduire une fonction Python `Y()` qui simule la variable Y.
d) Écrire une fonction Python `X(a)` qui prend en entrée un réel $a \in]0, 1]$ et qui simule X.

④ a) Donner une densité, qu'on notera g, d'une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance nulle et de **variance** a.
b) A l'aide d'une intégration par parties, en déduire que X possède une espérance et la calculer.
c) En utilisant la variable Y, montrer que X^2 possède une espérance et la calculer.
d) En déduire que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(4 - \pi)a}{2}$.

⑤ On considère désormais que le paramètre $a \in]0, 1]$ est inconnu et on souhaite l'estimer.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n variable aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ indépendantes ayant toutes la même loi que X. On note :

$$S_n = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2$$

a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a.
b) Montrer que X^2 admet une variance et montrer que $\mathbb{V}(X^2) = 4a^2$.
c) Montrer que $\mathbb{V}(S_n) \leq \dfrac{1}{n}$. Puis, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur de n à partir de laquelle $\left]S_n - \dfrac{1}{10}, S_n + \dfrac{1}{10}\right[$ est un intervalle de confiance pour a avec un niveau de confiance au moins égale à 95%.
Utiliser les fonctions Python écrites à la question 3. pour valider votre réponse.

Question de cours.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer sur $]0, +\infty[$ l'expression d'une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$.

Exercice 60 : Publié (2019)

Une compagnie fait passer des entretiens d'embauche à n candidats. On suppose que la compétence de chaque candidat est quantifiée par une variable aléatoire X_i suivant une loi uniforme sur $[0,1]$, d'autant plus élevée que le candidat est compétent. De plus, on suppose que les variables $(X_1, \cdots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes. A la fin de chaque entretien, la compagnie doit immédiatement donner sa décision : soit elle embauche le candidat, soit elle passe au suivant, sans possibilité de revenir sur ses pas.
La compagnie cherche à élaborer une stratégie qui lui permettrait de maximiser l'espérance de la compétence du candidat qu'elle choisira. Pour ce faire, elle décide de fixer un seuil $s \in [0,1]$. Si, parmi les $n-1$ premiers candidats, aucun ne dépasse le seuil, la compagnie embauchera le dernier candidat. Sinon, elle choisira le premier candidat qui dépasse le seuil.
Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note A_k l'événement : « pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, $X_i < s$ et $X_k \geq s$ », et B l'événement : « pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $X_s < s$.
On définit par conséquent la variable aléatoire $Z_{n,s}$ compétence du candidat retenu, comme suit :

$$Z_{n,s} = \begin{cases} X_n & \text{si } B \text{ est réalisé} \\ X_k & \text{si } A_k \text{ est réalisé } (1 \leq k \leq n-1) \end{cases}$$

① a) Écrire un programme Python qui prend en argument un réel $s \in [0,1]$, un entier naturel non nul n, et retourne une réalisation de $Z_{n,s}$.

b) En déduire un programme qui retourne une valeur approchée de la compétence moyenne du candidat recruté via ce protocole.

② Calculer $\mathbb{E}(Z_{n,0})$ et $\mathbb{E}(Z_{n,1})$.

③ Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, on a : $\mathbb{P}(B \cap (Z_{n,s} \leq t)) = s^{n-1}t$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $0 < s < 1$.

④ Soit $t \in [0,1]$. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, montrer que :

$$\mathbb{P}(A_k \cap (Z_{n,s} \leq t)) = \begin{cases} (t-s)s^{k-1} & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases}$$

⑤ En déduire que la valeur de la probabilité de $\mathbb{P}(Z_{n,s} \leq t)$ en fonction de $t \in [0,1]$.

⑥ Montrer que $Z_{n,s}$ est une variable à densité, et en donner une densité.

⑦ En déduire que $\mathbb{E}(Z_{n,s}) = \dfrac{1}{2}(1 + s - s^n)$.

⑧ Déterminer le seuil s_n^* qui maximise la compétence moyenne du candidat embauché en fonction de n.

⑨ A l'aide de la fonction programmée en 1.b), tracer sur un graphique l'évolution de la valeur de $\mathbb{E}(Z_{n,s})$ en fonction de s pour $n = 5, 10, 50$ et vérifier les conclusions de la question précédente dans ces cas.

Question de cours.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 61 : (oral 2018 non publié)

Un jeu de Memory est constitué d'un paquet de n paires de cartes numérotées de 0 à $n-1$. Il y a 2 cartes numérotées i pour chaque entier i compris entre 0 et $n-1$ et ces cartes sont mélangées dans le paquet.
On tire simultanément deux cartes à chaque tirage.
Si on tire deux cartes de même numéro (une paire), on retire cette paire du paquet puis on mélange le paquet. Sinon, on remet les deux cartes dans le paquet.
On note T_n le nombre de tirages nécessaires pour obtenir les n paires.
Pour $i \geq 1$, on note C_i l'événement : « on obtient une paire au i-ième tirage ».

① a) Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et qui retourne la liste des $2n$ cartes.

b) Écrire une fonction qui simule le tirage de deux cartes, renvoyant `True` si une paire est obtenue et `False` sinon.

c) Écrire une fonction qui retourne le nombre de tirages nécessaires pour vider la liste.

② Déterminer la loi et l'espérance de T_1.

③ Montrer que $\mathbb{P}(C_1) = \dfrac{1}{2n-1}$.

④ Pour chaque entier $k \geq 2$, exprimer l'événement $(T_2 = k)$ en fonction des événements C_i puis calculer $\mathbb{P}(T_2 = k)$.

⑤ Montrer que $\mathbb{E}(T_2)$ existe et la calculer.

⑥ a) Justifier que $\mathbb{P}_{C_1}(T_n = k) = \mathbb{P}(T_{n-1} = k-1)$.

b) Exprimer de façon analogue $\mathbb{P}_{\overline{C_1}}(T_n = k)$.

c) On admet l'existence de $\mathbb{E}(T_n)$ pour tout n entier ≥ 1.
A l'aide des relations précédentes, montrer que $\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}(T_{n-1}) + 2n - 1$ et en déduire l'expression de $\mathbb{E}(T_n)$.
Utiliser vos fonctions Python pour valider votre réponse.

Question de cours.

Sommes de Riemann

Exercice 62 : (oral 2018 non publié)

On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur $[0,1]$.
On pose, pour tout entier naturel n, $M_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$.

① Montrer que M_n est une variable à densité et en donner une densité f_n.

② Montrer que M_n admet une espérance et la calculer.

③ Calculer $\mathbb{P}(M_n > \mathbb{E}(M_n))$ et donner sa limite quand n tend vers $+\infty$.

④ Simuler M_n à l'aide de Python.

⑤ Écrire une fonction qui, à l'aide de 10000 simulation de la variable aléatoire M_n donne une estimation de $\mathbb{P}(X_{n+1} > M_n)$.

⑥ a) Quelle est la loi de $-X_{n+1}$?

b) *On rappelle que si X et Y sont deux variables indépendantes de densité f_X et f_Y, alors $X+Y$ est une variable à densité de densité f définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(t-u)du$$

Déterminer une densité de $M_n - X_{n+1}$.

c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X_{n+1} > M_n)$

Question de cours.

Soient a et b deux réels tels que $a^2 - 4b > 0$. Quelles sont les solutions de $y'' + ay' + b = 0$?

Exercice 63 : (oral 2018 non publié)

Sur une plage, le drapeau permettant ou non la baignade peut être de trois couleurs : vert, orange ou rouge.
Une étude statistique sur une grande période a permis de montrer que :

- Si le drapeau est vert un jour donné, alors il est encore vert le jour suivant avec la probabilité $1/2$ ou orange ou rouge de façon équiprobable.
- Si le drapeau est orange un jour donné, alors il est vert le jour suivant avec la probabilité $1/2$ ou orange avec la probabilité $1/4$ ou encore rouge.
- Si le drapeau est rouge un jour donné, alors il est orange le jour suivant avec la probabilité $2/3$ ou rouge avec la probabilité $1/3$.

On note V_n l'événement : « le drapeau est vert le jour numéro n » et $v_n = \mathbb{P}(V_n)$. On définit de même O_n et o_n, ainsi que R_n et r_n.

① Déterminer v_{n+1}, o_{n+1} et r_{n+1} en fonction de v_n, o_n et r_n.

② Déterminer une matrice M carrée d'ordre 3 à coefficients réels telle que, si l'on note $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ o_n \\ r_n \end{pmatrix}$ on a : $X_{n+1} = MX_n$.

③ Quel est le rang de M ? Que peut-on en déduire ?

④ Calculer $M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Qu'en déduire pour M en terme de valeurs propres ?

⑤ Justifier que 1 est valuer propre de M et donner les vecteurs propres associés.

⑥ Montrer qu'il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$ et préciser ces matrices.
Vérifier avec Python que P est inversible (*On rappelle l'instruction* `inv` *du package* `numpy.linalg` *qui permet de calculer un tel inverse*)

⑦ Exprimer X_n en fonction de X_1 et P, D et n.

⑧ On suppose que le jour numéro 1 le drapeau est vert. Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de v_n, o_n et r_n.

⑨ Écrire une fonction Python prenant en argument v_1, o_1, r_1 et n et renvoyant les prévisions de la couleur du drapeau pour le jour numéro n.

Question de cours.

Courbes représentatives de exponentielle et logarithme.

Exercice 64 : (oral 2018 non publié)

Rappel. Algorithme de dichotomie
On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

— $a_0 = a$ et $b_0 = b$

— Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On montre alors que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.

Une course comporte n coureurs. Les temps de parcours des coureurs sont dees variables aléatoires à densité $(Y_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$, indépendantes, de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

① On note T_1 le temps de parcours du gagnant.
  a) Montrer que T_1 est une variable à densité et en donner une densité.
  b) Quel est le temps moyen mis par le gagnant ?

② On note X_k le temps de parcours du coureurs arrivé en k-ième position et, pour tout réel $x \in [0, 1]$, N_x le nombre de coureurs ayant fini au plus tard à l'instant x.
  a) Simuler X_k à l'aide de Python (*Indication : Si L est une liste Python, sorted(L) est une nouvelle liste comportant les éléments de L triés par ordre croissant).*
  b) Utiliser cette fonction pour valider la réponse obtenue en 1.b).
  c) Soit $x \in [0, 1]$, montrer que $(X_k \leq x) = (N_x \geq k)$.
  En déduire que $\mathbb{P}(X_k \leq x) = \displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$.

③ On s'intéresse au 3-ième coureur.
  a) Montrer que $\mathbb{P}(X_3 \leq x) = 1 - \Big((1-x)^n + nx(1-x)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^2(1-x)^{n-2}\Big)$. On note $G(x)$ cette expression.
  b) Justifier que G est strictement croissante.
  c) A l'aide de la méthode de dichotomie, trouver le temps de parcours qui permet d'être sur le podium (c'est-à-dire au pire 3-ième) dans 95% des cas. Quelle est la valeur obtenue pour $n = 10$?

Question de cours.

Que signifie « f est négligeable devant g ».

Exercice 65 : (oral 2018 non publié)

On considère un groupe de n personnes, chacune ayant la probabilité p d'être malade. On réalise des tests sanguins pour savoir si ces personnes sont malades et, si oui, qui sont-elles.
Pour cela, on fait un mélange avec la moitié de chacun des n échantillons et on réalise un test sur le mélange. S'il est positif alors on réalise un test individuel sur chaque moitié d'échantillon restant. Sinon, on s'arrête là.
On appelle X la variable aléatoire égale au nombre total de tests effectués.

① a) Trouver le suprobort, la loi et l'espérance de X.
   b) Montrer que cette méthode de tests est rentable « en moyenne » si, et seulement si, $p < p_n$ où $p_n = 1 - (1/n)^{1/n}$
   c) Donner un équivalent de p_n quand n tend vers $+\infty$.

② Cette fois-ci, on réalise des groupes de m personnes (m divise n). On effectue le test comme précédemment sur chaque groupe ; s'il est positif, on réalise ensuite le test pour chaque membre du groupe.
On appelle Z le nombre de groupes dont le test est positif.

   a) Donner la loi de Z.
   b) Exprimer X en fonction de Z et en déduire que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n}{m} + n(1 - (1-p)^m)$.
   c) Grâce à l'outil informatique, trouver la valeur de m qui minimise cette espérance pour $p = 0.01$ et $n = 25$.
   d) Montrer que cette valeur de m minimise $\dfrac{1}{m} - (1-p)^m$.
   e) On pose $u_m = \dfrac{1}{m} - (1-p)^m$. Montrer que si $p > 1/2$, la suite (u_m) est décroissante. En déduire une stratégie pour minimiser le nombre de tests dans ce cas.
   f) A l'aide de l'outil informatique, étudier l'existence et l'unicité de ce minimum pour $n = 25$ et p dans $\{0.1; 0.2; 0.3; \cdots; 0.9\}$. Conclure sur la meilleure stratégie à adopter.

Question de cours.

Inégalité de Cauchy-Schwartz dans $E = \mathbb{R}^n$.

Exercice 66 : (oral 2018 non publié)

Trois joueurs A, B et C participent à un tournoi qui consiste en une succession de manches ne faisant intervenir que deux des joueurs et se déroule de la façon suivante :

— A chaque manche, chacun des deux protagonistes a la même probabilité $1/2$ de gagner.

— Un joueur gagne le tournoi si, et seulement si, il gagne deux manches de suite, et alors le tournoi prend fin.

— A et B s'affrontent lors de la 1-ère manche ; le gagnant de cette manche affronte alors C pour une deuxième manche. Si le tournoi n'est pas alors terminé, le gagnant de cette deuxième manche reste en lice et affronte celui qui avait été éliminé lors de la première manche.

— Et ainsi de suite... après chaque manche, il y a donc soit un vainqueur du tournoi, soit le gagnant de la manche affronte celui qui n'y avait pas participé.

On note X le nombre de manches nécessaires pour terminer le tournoi, et pour tout entier naturel non nul i, A_i l'événement « A gagne la manche numéro i ».

On note également GA l'événement : « A gagne le tournoi ». On utilise des notations semblables pour B et C.

① Écrire un programme pour simuler un tournoi, qui retourne le joueur gagnant et le nombre de manches jouées (on pourra faire appel à `rdm.choice(L)`, `L.pop(a)` et `L1 = L[:]` qui copie la liste `L`).

② Détermine $\mathbb{P}(X = 2)$ et $\mathbb{P}(X = 3)$.

③ Pour $i \geq 2$, on note E_i l'événement : « le joueur entrant à la manche i gagne cette manche ».

a) Exprimer $(X > 3)$ en fonction de $(X > 2)$ et des E_i.

b) Soit $k \geq 3$. Exprimer $(X > k)$ en fonction de $(X > 2)$ et des E_i.
En déduire $\mathbb{P}(X > k)$, puis $\mathbb{P}(X = k)$ pour $k \geq 2$.

c) Vérifier que X est bien une variable aléatoire.

d) Étudier l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$ (on pourra s'aider de la loi de $X - 1$).

④ Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(GA_i)$ que le joueur A remporte le tournoi à l'issue de la i-ième manche pour i variant de 1 à 6, de même pour B et C (on pourra s'aider d'un arbre). ✐ Pour alléger les notations, on s'autorise à ne pas noter certains signes $\cap$. Ainsi $A_1 \cap B_2 \cap C_3$ pourra être noté plus simplement $A_1B_2C_3$.

⑤ Montrer que $GA \cap B_1 = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(\left(\bigcap_{i=0}^{n} B_{3i+1}C_{3i+2}A_{3i+3} \right) \cap A_{3n+4} \right)$. En déduire $\mathbb{P}(GA \cap B_1)$.

⑥ Montrer que $GA \cap A_1 = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_{3i+1}C_{3i+2}B_{3i+3} \right) \cap A_{3n+4}A_{3n+5} \right) \Cup A_1A_2$. En déduire $\mathbb{P}(GA \cap A_1)$.

⑦ Déduire des questions précédentes : $\mathbb{P}(GA)$, $\mathbb{P}(GB)$ puis $\mathbb{P}(GC)$.

Question de cours.

Distance à un sous-espace vectoriel.

Exercice 67 : (oral 2017 non publié)

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}$$

① **Étude d'une variable aléatoire**.

a) Montrer que f_a est une densité de probabilité.
X est une variable aléatoire admettant f_a pour densité. On dit que X suit une loi de Cauchy de paramètre a.

b) Donner une expression de la fonction de répartition F_a de X.

c) X admet-elle une espérance ?

d) Y est une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy de paramètre 1. On pose $X = aY$. Donner la loi de X.

② a) U est une variable aléatoire dont la loi est uniforme sur $[0, 1[$. On pose $Z = \tan\left(\pi U - \dfrac{\pi}{2}\right)$.
Montrer que Z est presque sûrement définie et donner la loi de Z.

b) Écrire une fonction Python `cauchy(a)` donnant en sortie un résultat aléatoire coïncidant avec une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy de paramètre a.

c) on considère le code Python suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt

def histogrammeCauchy(a, xmin, xmax, n, N):
    '''
    L'intervalle [xmin, xmax] est divise en n parties
    On lance N simulations de loi de Cauchy puis
    on calcule la fréquence d'apparition dans chacune des n pa
    '''
    Y = [0]*n
    h = (xmax-xmin)/n
    for i in range(N):
        k = floor((cauchy(a)-xmin)/h)
        if k >= 0 and k < n:
            Y[k]... # A COMPLETER
    X = []
    for i in range(n):
        X.append(xmin+i*h)
    plt.bar(X, Y, alpha=0.5) # pour la transparence
    return X, Y
```

Compléter cette fonction pour obtenir un histogramme représentant pour chaque intervalle $I_k = \left[x_{min} + \frac{k}{n}, x_{min} + \frac{k+1}{n}\right]$ la proportion des résultats (parmi les N simulations de loi de Cauchy de paramètre a) contenus dans I_k.

d) Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Cauchy de paramètre a et une loi de Cauchy de paramètre b. On émet l'hypothèse suivante :

$$Z = X + Y \text{ suit une loi de Cauchy de paramètre } a + b$$

Écrire un programme Python permettant de visualiser sous forme de diagrammes la loi de $X + Y$ ainsi qu'une loi de Cauchy de paramètres $a + b$. Quelle conclusion peut-on faire ?

③ Autour de la loi faible des grands nombres.

a) Énoncer le théorème de la loi faible des grands nombres.

b) Si $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Cauchy de paramètre 1, on note $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i$. Quelle hypothèse peut-on formuler quand à la loi de Z_n ? Un résultat de loi faible des grands nombres peut-il être énoncé dans ce cadre ?

Question de cours.

Allure de la représentation graphique de la fonction arctan en précisant ses asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 68 : (oral 2021 non publié)

On désigne par X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 et X_6 des variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi uniforme sur l'ensemble des entiers de 0 à 9.

① a) Écrire en Python une fonction `tirage()` qui simule une réalisation des variables X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 et X_6 et qui retourne `True` si l'événement $(X_1 + X_2 + X_3 = X_4 + X_5 + X_6)$ est réalisé, `False` sinon.

b) Estimer alors la probabilité de l'événement $(X_1 + X_2 + X_3 = X_4 + X_5 + X_6)$.

② A l'aide du théorème de transfert, exprimer sous forme d'un quotient les quantités $\mathbb{E}(t^{X_1})$ pour $t \in]-1, 1[$ et $\mathbb{E}(t^{-X_1})$ pour $t \in]-1, 0[\cup]0, 1[$.

③ On note $Y = 27 + X_1 + X_2 + X_3 - X_4 - X_5 - X_6$. Montrer que $Y(\Omega) \subset [\![0, 54]\!]$
On introduit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \mathbb{E}(t^Y)$.
Justifier que f est une fonction polynomiale et en donner le degré.

④ Montrer que :

$$\forall t \in]-1, 0[\cup]0, 1[, \; f(t) = \frac{1}{10^6}\frac{(1-t^{10})^6}{(1-t)^6}$$

puis vérifier que la formule est valable pour $t = 0$.

⑤ Exprimer l'événement $(X_1 + X_2 + X_3 = X_4 + X_5 + X_6)$ à l'aide de la variable Y. Expliquer pourquoi la probabilité de cet événement est un coefficient de la fonction polynômiale f.

⑥ En vous intéressant à un développement limité de la fonction f en 0, déterminer la probabilité de cet événement.

Question de cours.

Si α est un réel fixé, rappeler les solutions de l'équation : $\tan(x) = \tan(\alpha)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 69 (oral 2021)

Soit X une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

① Vérifier que f est une densité de variable aléatoire réelle.

② Déterminer la fonction de répartition F de X.

③ a) Justifier que F est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$ et que sa fonction réciproque est donnée par :

$$\forall y \in]0,1[,\ F^{-1}(y) = \ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$

b) En déduire que si U est une loi uniforme sur $]0,1[$, alors X a même loi que $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$.

c) En déduire un programme Python permettant d'obtenir une estimation de l'espérance de X en cas d'existence.

④ a) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} tf(t)dt$ est convergente.

b) Montrer que la fonction est paire.

c) En déduire que X admet une espérance et déterminer $\mathbb{E}(X)$.

⑤ On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t}{1+e^t}dt$ est convergente et on note I sa valeur.
Montrer que X admet une variance $\mathbb{V}(X)$, et l'exprimer en fonction de I à l'aide d'une intégration par parties.

⑥ Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variable aléatoires réelles mutuellement indépendantes, toutes de densité f.
On note pour tout $n \geq 1$: $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|M_n| \geq \varepsilon) = 0$$

Question de cours.

Minorant et minimum d'une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Exercice 70 (oral 2021)

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

① a) Vérifier que f est une densité de probabilité de variable aléatoire réelle.
On dit qu'une variable aléatoire réelle suit la loi *logistique standard* si elle admet f pour densité.
On notera dans la suite de l'exercice X une variable aléatoire suivant la loi logistique standard.

b) Déterminer la fonction de répartition de X.

② a) Soit U une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $]0,1[$.
Montrer que $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$ suit la loi logistique standard.

b) Écrire une fonction Python `logis()` qui simule la variable aléatoire X.

c) Écrire une fonction `esp_logis()` qui renvoie une valeur approchée de l'espérance de X.
Que peut-on conjecturer ?

d) En supposant cette conjecture comme exacte, écrire une fonction Python `var_logis()` qui renvoie une valeur approchée de la variance de X.

③ Montrer que X admet une espérance et que : $\mathbb{E}(X) = 0$.

④ On admet que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que X admet une variance et que :

$$\mathbb{V}(X) = 4\int_0^{\infty} \frac{x}{1+e^x}dx = 4\int_0^{\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x}dx + I_n \text{ où } I_n = (-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-(n+2)x}}{1+e^{-x}}dx$$

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x}dx$

d) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

e) Déterminer $\mathbb{V}(X)$.

Question de cours.

Transposée d'une somme de matrices. Transposée d'un produit de matrices.

Exercice 71 (oral 2021)

Soient $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ et f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \lambda \dfrac{x^{\lambda-1}}{\alpha^\lambda} & \text{si } x \in]0, \alpha[\\ 0 & \text{si } x \notin]0, \alpha[\end{cases}$.

① a) Montrer que f est une densité.

b) On considère dorénavant X une variable aléatoire de densité f. On dit que X suit la loi puissance de paramètres α et λ.
Déterminer la fonction de répartition F de X.

c) On pose $U = \left(\dfrac{X}{\alpha}\right)^\lambda$. Montrer que U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

d) Exprimer X en fonction de U puis écrire une fonction Python `X(alpha,lamb)` qui prend en entrée deux réels strictement positifs `alpha` et `lamb` et qui simule X pour $\alpha =$`alpha` et $\lambda =$`lamb`.

② Soit $n \geq 2$. O, considère $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X, $Y_n = max\{X_1, \cdots, X_n\}$ la plus grande des valeurs $X_1, \cdots, X_n$ et Z_n la deuxième plus grande des valeurs $X_1, \cdots, X_n$.
Écrire une fonction Python `DeuxPlusGrands(a,lamb,n)` qui prend en entrée deux réels strictement positifs `a` et `lamb`, et un entier `n`, qui simule $n =$`n` fois X, pour $\alpha =$`a` et $\lambda =$`lamb`, et qui renvoie le couple (Y_n, Z_n).

③ a) Détermine la fonction de répartition G_n puis une densité g_n de Y_n. En déduire que Y_n suit aussi la loi puissance dont on déterminera les paramètres.

b) Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$.

④ a) Si $x \in]0, \alpha[$, justifier que :

$$(Z_n \leq x) = \left(\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leq x)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} \left((X_i > x) \cap \left(\bigcap_{k=1, k\neq i}^{n} (X_k \leq x)\right)\right)\right)$$

b) En déduire la fonction de répartition H_n de Z_n en fonction de G_n et G_{n-1} ainsi qu'une densité h_n de Z_n en fonction de g_n et g_{n-1}.

c) Montrer que $\mathbb{E}(Z_n) = n\mathbb{E}(Y_{n-1}) - (n-1)\mathbb{E}(Y_n)$.

Question de cours.

Donner la définition d'une v. propre ainsi que d'un sous-espace propre pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 72 (oral 2021)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.
Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé du plan, on note A, B, C, M, N, P et Q les points de coordonnées respectives $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, (X,X), (X,Y), (Y,Y) et (Y,X).
On rappelle que si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes admettant pour densité respectives f et g, alors la fonction h définie par :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

est une densité de la variable $T = U + V$.

① On note U la variable de Bernoulli qui vaut 1 si et seulement si l'événement « 1/2 est compris strictement entre X et Y est réalisé ».
Ecrire une fonction `simulU` qui simule la variable U et une fonction `espU` qui estime l'espérance de U.

② On note Z l'aire du carré $MNPQ$ (éventuellement réduit à un point, auquel cas on convient que son aire est nulle).

a) Exprimer Z en fonction de X et de Y.
b) Calculer l'espérance de Z.
c) Donner une densité de $X - Y$.
d) En déduire une densité de Z et confirmer la réponse obtenue en 2.b).

③ On note I le centre du carré $OABC$
a) Quelle est la probabilité que I soit le centre du carré $MNPQ$?
b) Quelle est la probabilité que I soit à l'intérieur du carré $MNPQ$?

④ Soit E un point de coordonnées $(a,b) \in [0,1]^2$. On note $p(a,b)$ la probabilité que E soit à l'intérieur du carré $MNPQ$.
a) Exprimer $p(a,b)$ en fonction de a, et b si $a \geq b$.
b) Déterminer $p(a,b)$ si $a \leq b$.
c) Justifier que cette probabilité est maximale pour $a = b = \dfrac{1}{2}$.
d) Préciser la ligne de niveau $k \in]0, 1/2[$ de $(a,b) \longmapsto p(a,b)$.
Tracer les lignes de niveau k pour $k \in \left\{ \dfrac{i}{40}, 1 \leq i \leq 9 \right\}$ à main levée ou au moyen d'un script Python.

Question de cours.

Définition et convergence de la somme de Riemann d'une fonction f continue sur $[0,1]$.

Exercice 73 (oral 2021)

Un forain propose un jeu utilisant une pièce donnant Pile avec la probabilité p ($p \in]0,1[$) et Face avec la probabilité $1-p$. Ce jeu se déroule en deux étapes :

— On lance la pièce jusqu'à obtenir Pile pour la première fois et on garde en mémoire le nombre de lancers qu'il a fallu pour obtenir ce Pile. On notera N ce nombre.

— On lance à nouveau la pièce N fois et on reçoit un cadeau à chaque fois qu'on obtient un nouveau Pile.

On notera N la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier Pile dans la première phase de jeu et S la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de Pile obtenus lors de la deuxième phase de jeu (S ne compte pas le Pile obtenu lors de la première phase de jeu).

① a) Reconnaître la loi de N ainsi que la loi conditionnelle de S sachant $(N = n)$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

b) En déduire la loi conjointe de (N, S).

② a) Écrire une fonction Python `S(p)` qui prend en entrée un flottant $p \in]0,1[$, qui simule le jeu du forain et renvoie la valeur de S.

b) Écrire une fonction Python `espS(p)` qui prend en arguement un flottant $p \in]0,1[$, et qui renvoie une valeur approchée de $\mathbb{E}(S)$

c) Écrire une fonction Python `trace_espS()` qui ne prend aucun argument et qui trace $E(S)$ en fonction de p. Que peut-on conjecturer ?

✐ *On fixera la plage des y à l'aide de* `plt.ylim(0,2)` *juste avant d'afficher le graphique. Attention à ne pas évaluer S(0) et S(1).*

③ a) Calculer $\mathbb{P}(S = 0)$.

b) On admet que $\forall x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$

En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(S = k) = \dfrac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}}$

c) Calculer $\mathbb{E}(S)$. Est-ce que cela correspond à la conjecture de la question 2.c) ?

④ a) Écrire deux fonctions Python `varS(p)` et `trace_varS()` calculant une valeur approchée de la variance de S pour la première et traçant la variance de S en fonction de p pour la deuxième. Que peut-on conjecturer ?

b) Calculer $\mathbb{E}(S(S-1))$.

c) En déduire $\mathbb{V}(S)$. Est-ce que cela correspond à la conjecture de la question a) ?

Question de cours.

Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 74 (oral 2021 publié)

Deux amis Anna et Benoît jouent au jeu suivant : ils possèdent une machine qui, à chaque sollicitation, leur donne aléatoirement un entier naturel X.
Si cet entier X est impair, Anna donne X euros à Benoît, on considère que Benoît a gagné.
Si X est nul, on considère que la manche est nulle.
Si X est pair non nul, Benoît donne X euros à Anna et on considère que Anna a gagné.
On pose G le gain algébrique de Anna.
On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre a ($a > 0$).
On note enfin :

— A l'événement : « Anna gagne » et $p = \mathbb{P}(A)$.
— B l'événement : « Benoît gagne » et $q = \mathbb{P}(B)$.
— C l'événement : « La manche est nulle » et $r = \mathbb{P}(C)$.

① Écrire une programme Python permettant de simuler la variable aléatoire G.
✐ *On rappelle que* `np.random.poisson(a)` *permet de simuler une variable aléatoire de Poisson de paramètre a mais on privilégiera une modélisation à l'aide de la seule fonction* `rdm.random()`

② a) Déterminer r et exprimer p et q sous forme d'une somme.
b) Exprimer $p + q$ et $p - q$ en fonction de a.
c) En déduire les valeurs de r, p et q en fonction de a.

③ Compléter le programme de la question 1. pour qu'il permette de donner une estimation de la valeur de l'espérance du gain de Anna d'une part et de la probabilité pour Anna de gagner, d'autre part.

④ D'après les simulations effectuées, d'après vous, à qui le jeu donne-t-il l'avantage ? *On pourra tester les valeurs de gain et de la probabilité qu'Anna gagne pour* $a = 2$.

⑤ a) Exprimer G en fonction de X.
b) Calculer l'espérance du gain G de Anna.

⑥ On suppose désormais que X suit une loi géométrique de paramètre α. On garde les mêmes notations que précédemment.
a) Déterminer p, q, r.
b) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(G)$ de G après avoir justifié son existence.
c) Comment interpréter le signe de $\mathbb{E}(G)$?

Question de cours.

Donner 2 conditions suffisantes mais non nécessaires de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle.

Exercice 75 (oral 2021 publié)

① Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

a) Montrer que la variable aléatoire $Y = X + 1$ suit une loi géométrique et préciser son paramètre.

b) En déduire que X admet une espérance et une variance, et préciser leur valeur.

c) Écrire une programme Python renvoyant une simulation de la variable aléatoire X.

d) Montrer que pour tout réel s de $[0, 1]$, la variable aléatoire s^X admet une espérance, et montrer que :

$$\mathbb{E}\left(s^X\right) = \frac{1}{2 - s}.$$

On notera dans la suite f la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall s \in [0, 1],\ f(s) = \frac{1}{2 - s}.$$

② On considère une population qui évolue de génération en génération.
On part de $Z_0 = 1$ individu, et on note pour tout $n \geqslant 1$, Z_n le nombre d'individus à la $n^{\text{ième}}$ génération, en supposant que, après avoir donné naissance, les individus de la $(n-1)^{\text{ième}}$ génération meurent.
À chaque génération $n \in \mathbb{N}$, on suppose que chaque individu i engendre une portée d'individus de la génération suivante, de taille $X_{n+1,i}$, suivant la même loi que X, et indépendamment du nombre de descendants des autres individus existants ou ayant existé auparavant.

a) Écrire une fonction Python qui, prenant un entier n en entrée, simule l'expérience, et renvoie la liste $[Z_0, Z_1, \ldots, Z_n]$ des nombres de descendants de la population jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ génération.
Conjecturer le comportement de la population au cours d'un grand nombre de générations.

b) On note pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$ la probabilité que la population soit éteinte à la génération n. Justifier que la suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ.

c) Préciser la valeur de u_1 et vérifier que $u_1 = f(u_0)$.

d) Calculer pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}(Z_2 = 0)$.
En déduire que $u_2 = f(u_1)$.

e) Démontrer plus généralement que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

f) En déduire la valeur de ℓ.

Question de cours.

Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de $\mathbb{R}^n$, définition de la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.

Exercice 76 (oral 2021)

soit α un réel strictement positif. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

① a) Vérifier que f est bien une densité d'une variable aléatoire réelle.

b) Établir que la fonction de répartition F associée à f est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^\alpha} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

② Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0,1]$. Montrer que $X = U^{-\frac{1}{\alpha}}$ admet F pour fonction de répartition.

③ On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes ayant F comme fonction de répartition.

On note $Z = max(X,Y)$. On souhaite estimer $\dfrac{\mathbb{P}(Z > t)}{\mathbb{P}(X+Y > t)}$ pour de grandes valeurs de t $(t > 2)$.

En utilisant la question précédente, écrire un script Python qui réalise cette estimation pour $\alpha = 0.5$ et $t = 200$, $t = 300$ et $t = 400$. Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

④ Soit $\beta \in]0,1[$ et $t > 2$.

a) Déterminer la fonction de répartition de $Z = max(X,Y)$ puis un équivalent de $\mathbb{P}(Z > t)$ quand $t \to +\infty$.

b) Etablir l'inégalité $\mathbb{P}(Z > t) \leq \mathbb{P}(X+Y > t)$.

c) Démontrer que si $(X+Y > t)$ est réalisé, alors on au au moins un des deux événements suivants qui est aussi réalisé : $(Z > \beta t)$ ou $(X > (1-\beta)t) \cap (Y > (1-\beta)t)$.

En déduire que $\mathbb{P}(X+Y > t) \leq \dfrac{2}{\beta^\alpha t^\alpha} - \dfrac{1}{\beta^{2\alpha} t^{2\alpha}} + \dfrac{1}{(1-\beta)^{2\alpha} t^{2\alpha}}$.

d) Si $\beta = 1 - t^{-1/3}$, démontrer que $\dfrac{2}{\beta^\alpha t^\alpha} - \dfrac{1}{\beta^{2\alpha} t^{2\alpha}} + \dfrac{1}{(1-\beta)^{2\alpha} t^{2\alpha}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{t^\alpha}$.

En déduire que $\underset{t\to+\infty}{lim} \mathbb{P}_{(X+Y>t)}(Z > t) = 1$.

Question de cours.

Formules d'Euler et de Moivre.

Exercice 77 (oral 2021)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $T = max(X, Y)$ et $X = \dfrac{1}{T}$.
L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de la variable aléatoire W.

① Justifier que la fonction Python écrite ci-dessous permet de renvoyer un nombre de façon aléatoire en suivant la loi exponentielle de paramètre 1 :

```python
def expo():
    return -log(random())
```

② Écrire un script en langage Python qui permette de conjecturer l'existence et la valeur de l'espérance de W.

③ Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T.
Démontrer alors que T admet une densité, et déterminer une des ses densités.

④ Démontrer que la variable aléatoire W admet une espérance si et seulement si $I = 2\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$ converge.

⑤ a) Justifier que pour tout réel u, $e^u \geq 1 + u$.

b) En déduire que : $\forall t > 0$, $0 \leq \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \leq e^{-t}$.

c) Démontrer que l'intégrale I est convergente.

⑥ A l'aide du changement de variable $u = 2t$, démontrer que :

$$\forall x > 0, \int_x^{\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt = \int_{2x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

✏*On admettra que les intégrales de l'égalité sont bien convergentes.*

⑦ Démontrer alors que $I = \lim\limits_{x \to 0} \left(2 \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)$.

⑧ En utilisant le théorème des gendarmes, démontrer que l'espérance de W vaut $2\ln(2)$.

Question de cours.

Rappeler les deux expressions de la dérivée de la fonction tan.

Exercice 78 (oral 2021 publié)

On lance indéfiniment une pièce équilibrée.
On s'intéresse au rang du lancer auquel on obtient pour la première fois la succession des résultats « Pile, Pile, Face » dans cet ordre. On note alors X la variable aléatoire égale au rang du lancer où, pour la première fois, on obtient cette configuration. Si celle-ci n'est jamais obtenue, on conviendra que X vaut -1.
Par exemple, si on obtient dans cet ordre : Pile, Face, Face, Pile, Pile, Pile, Face, alors X prend la valeur 7.
Pour tout entier naturel n non nul, on pose F_n : « Obtenir Face au n-ième lancer »et P_n : « Obtenir Pile au n-ième lancer ».
Pour tout entier naturel supérieur ou égale à 3, on pose :

— B_n l'événement défini par $B_n = P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$.

— U_n l'événement défini par $U_n = \displaystyle\bigcup_{k=3}^{n} B_k$.

— $u_n = \mathbb{P}(U_n)$.

① a) Écrire une fonction Python sans argument qui simule les lancers de dés jusqu'à l'apparition de la séquence « Pile, Pile, Face » et qui renvoie sous forme de liste les résultats de tous les lancers réalisés.

b) Utiliser la fonction précédente pour émettre une conjecture quand à l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de X.

② a) Pour tout entier naturel $n \geq 3$, calculer $\mathbb{P}(B_n)$ et justifier que les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

b) Calculer u_3, u_4 et u_5 et démontrer que : $\forall n \geq 3$, $u_{n+3} = u_{n+2} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{8}u_n$.

c) Démontrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = -1)$.

③ On admettra dans cette question le résultat suivant : *Pour toute variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, si la série de terme générale $\mathbb{P}(Y > n)$ converge, alors Y admet une espérance et*

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y > n)$$

Pour tout entier naturel n, on note $v_n = \mathbb{P}(X > n)$.

a) Donner la valeur de v_0, v_1, v_2 et v_3.

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} - v_{n+3} = \dfrac{1}{8}v_n$

c) Montrer que X admet une espérance et déterminer cette espérance.

Question de cours.

Pour θ un réel, exprimer $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exercice 79 (oral 2021)

On considère n composants identiques montés en parallèle sur une machine ($n \geq 2$). La durée de vie, en jours, de chaque composant est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$. La machine tombe en panne uniquement lorsque les n composants cessent de fonctionner. Les durées de vie des n composants sont indépendantes. Notons pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, X_i la variable aléatoire égale à la durée de vie du composant numéro i en jours. On définit la variable aléatoire M_n égale à la durée de fonctionnement en jours de la machine.

① On admet que si U est une variable qui suit une loi uniforme sur $[0, 1[$, alors $-\dfrac{\ln(1-U)}{\alpha}$ est une variable qui suit une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$.
Écrire une fonction en Python `duree_machine(n, alpha)` qui prend en argument un entier naturel non nul `n` et le paramètre `alpha` (strictement positif) et retourne une réalisation de la variable M_n.
En déduire le moyen d'estimer l'espérance de M_n si elle existe.

② Déterminer la fonction de répartition F_n de M_n.

③ En déduire que M_n est une variable aléatoire à densité et en donner une densité f_n.

④ On pose de façon générale, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $F_k(x) = (1 - e^{-\alpha x})^k$ si $x \geq 0$ et 0 sinon.
On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, tout entier $k \geq 1$, $D_k(x) = \displaystyle\int_0^x F_k(t)dt$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, tout entier $k \geq 2$, on a :
$$D_k(x) = D_{k-1}(x) - \frac{1}{\alpha} \times \frac{F_k(x)}{k}$$

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :
$$D_n(x) = x - \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k(x)}{k}$$

c) Justifier que F_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :
$$\int_0^x t f_n(t)dt = xF_n(x) - \int_0^x F_n(t)dt$$

e) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :
$$\int_0^x t f_n(t)dt = x(F_n(x) - 1) + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k(x)}{k}$$

f) En déduire que M_n admet une espérance et que $\mathbb{E}(M_n) = \dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Question de cours.

Allure de la représentation graphique de la fonction sin sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$

Exercice 80 (oral 2021)

Une urne contient initialement une boule numérotée 0 et une boule numérotée 1.
On effectue des tirages successifs, le n-ième tirage se déroulant de la manière suivante :

— On pioche une boule dans l'urne et on note son numéro.
— On remet la boule tirée dans l'urne et on rajoute une boule portant le numéro $n+1$.
L'urne, contenant les boules 0 à $n+1$, est alors prête pour le tirage $n+1$.

Pour tout entier naturel n, on note :

— X_n le numéro de la boule tirée au n-ème tirage.
— Y le numéro du tirage où la boule 0 est obtenue pour la première fois.
— Z le numéro du tirage où la boule 0 est obtenue pour la deuxième fois.

① Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, la loi de X_n. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$.

② a) Proposer une programme informatique qui simule la variable aléatoire Y.
b) Proposer un programme informatique qui simule la variable aléatoire Z.

③ a) Pour tout entier naturel n non nul, exprimer l'événement $(Y = n)$ à l'aide d'événements liés aux variables aléatoires X_1, $X_2, \cdot, X_n$.
b) En déduire que la loi de Y est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.
c) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? une variance ?

④ a) Établir que : $\forall i \in [\![1, j-1]\!]$, $\mathbb{P}_{(Y=i)}(Z = j) = \dfrac{i+1}{j(j+1)}$.
b) Écrire, pour tout entier naturel $j \geq 3$, on a : $1 + \displaystyle\int_2^j \frac{1}{t}dt \leq \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i} \leq 1 + \int_1^{j-1} \frac{1}{t}dt$.
c) En déduire un équivalent simple de $\mathbb{P}(Z = j)$ lorsque j tend vers $+\infty$.

Question de cours.

Énoncer le théorème du range pour une application linéaire $f : E \to F$.

Exercice 81 (oral 2021 publié)

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.
Soit $X_1, \cdots, X_n$, n variables aléatoires à densité, indépendantes et de même fonction de répartition F , définies sur une espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on ordonne les valeurs $X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $Y_k(\omega)$ la k-ième plus petite valeur. On a donc $Y_1(\omega) \leq Y_2(\omega) \leq \cdots \leq Y_n(\omega)$.
En particulier, on a : $Y_1 = min(X_1, \cdots, X_n)$, $Y_n = max(X_1, \cdots, X_n)$.

① Dans cette question uniquement, on suppose que les variables $X_1, \cdots, X_n$ suivent la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Calculer $\mathbb{P}(Y_1 > x)$ pour tout réel x positif et en déduire la fonction de répartition de Y_1. Reconnaître une loi usuelle dont on donnera l'espérance et la variance.

b) Montrer que si U suit la loi uniforme sur $]0, 1]$, alors $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(U)$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

c) Écrire un programme qui, pour un $n \in \mathbb{N}$ et un $i \in [\![1, n]\!]$ donnés, permet de simuler la variable la variable aléatoire Y_i lorsque les variables $X_1, \cdots, X_n$ suivent indépendamment la même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pourra utiliser pour cela l'instruction `B = sorted(A)` qui fournit un tableau `B` contenant les valeurs du tableau `A` rangées dans l'ordre croissant.

On retourne maintenant dans le cas général.

② Exprimer la fonction de répartition de Y_n à l'aide de F.

③ Les variables Y_1 et Y_n sont-elles indépendantes ?

④ On souhaite maintenant obtenir la fonction de répartition de Y_i, pour n'importe quel i dans $[\![1, n]\!]$. On fixe donc i dans $[\![1, n]\!]$ et x dans $\mathbb{R}$ et on cherche à calculer ¶$(Y_i \leq x)$. C'est la probabilité qu'au moins i variables parmi $X_1, \cdots, X_n$ soient inférieures ou égales à x.

a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note Z_k la variable telle que $Z_k(\omega) = 1$ si $(X_k(\omega) \leq x)$ est réalisé et $(Z_k(\omega) = 0)$ sinon.
Reconnaître la loi de Z_k (on exprimera le(s) paramètre(s) à l'aide de $F(x)$).

b) On note $S = \sum_{k=1}^{n} Z_k$. Que représente S ? Reconnaître sa loi.

c) Montrer que $\mathbb{P}(Y_i \leq x) = \mathbb{P}(S \geq i)$ et en déduire l'expression de $\mathbb{P}(Y_i \leq x)$ sous la forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à simplifier.

Question de cours.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Exercice 82 (oral 2021)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes.
On suppose que chacune suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{-1, 1\}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

L'objectif de cet exercice est de démontrer que pour tout réel $\alpha > 1/2$, la série de terme général $\mathbb{P}(S_n \geq n^\alpha)$ converge.

① Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument un entier n, simule une réalisation de la variable aléatoire S_n et renvoie la valeur obtenue.

② Dans cette question $\alpha = 0.8$. Écrire un script utilisant la fonction précédente qui affiche sous forme de liste les valeurs approchées de $\mathbb{P}(S_n \geq n^\alpha)$ pour les valeurs de n allant de 1 à 10.

③ Soit t un réel strictement positif.
Calculer l'espérance de la variable e^{tX_k} pour tout entier naturel k non nul. Montrer alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \, \mathbb{E}(e^{tS_n}) = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^n$$

④ a) Démontrer que pour tout entier naturel k, $(2k)! \geq 2^k k!$.

b) En utilisant l'écriture de e sous forme de somme d'une série, établir alors l'inégalité :

$$\forall t > 0, \, \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \leq e^{t^2/2}$$

⑤ En appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire e^{tS_n}, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \, \forall t > 0, \, \forall s > 0, \, \mathbb{P}(S_n \geq s) \leq exp\left(\frac{nt^2}{2} - ts\right)$$

⑥ Justifier l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \, \forall s > 0, \, \mathbb{P}(S_n \geq s) \leq exp\left(-\dfrac{s^2}{2n}\right)$.

✐ *On pourra étudier les variations sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $t \longmapsto \dfrac{nt^2}{2} - ts$ pour $s > 0$ fixé.*

⑦ Soit $\alpha > 1/2$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \, \mathbb{P}(S_n \geq n^\alpha) \leq e^{-\frac{1}{2}n^{2\alpha-1}}$, puis calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\mathbb{P}(S_n \geq n^\alpha)$.

⑧ Justifier qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que :

$$\forall n \geq N, \, \mathbb{P}(S_n \geq n^\alpha) \leq \frac{1}{n^2}$$

puis conclure.

Question de cours.

Si f est une fonction définie sur un intervalle I, et si $a \in I$, définition de la continuité de f en a.

Exercice 83 (oral 2021)

Max et Jojo disposent d'une urne contenant une boule blanche et une boule noire. Max effectue des tirages selon le protocole suivant : Il commence par tirer au hasard une boule de l'urne.

— Si elle est noire, il arrête de tirer et la partie est terminée.
— Si elle est blanche, il la remet dans l'urne et il y rajoute une boule noire ; puis il poursuit les tirages selon la même règle.

On admet que toute partie s'arrête avec une probabilité égale à 1 et qu'on peut donc définir la variable X suivante : On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués par Max lors de l'arrêt de la partie.
Si X est impair et vaut n, Max donne n euros à Jojo. Le gain en euros de Jojo vaut $G = n$.
Si X est pair et vaut n, Jojo donne n euros à Max. Le gain en euros de Jojo vaut $G = -n$.

① Écrire une fonction `tirage()` qui simule une partie et retourne la valeur prise par X.

② Déterminer la loi de X.

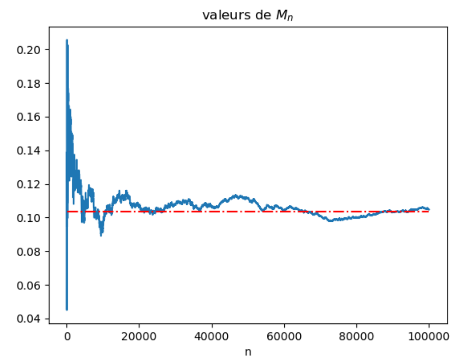
③ Exprimer la variable aléatoire G simplement en fonction de X. Justifier que G admet une espérance (✐ *Le calcul effectif de l'espérance est traité à la question suivante*).

④ a) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout entier naturel n : $n^2 = an(n+1)+b(n+1)+c$.

b) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(G)$.

⑤ Max et Jojo décident de jouer un grand nombre de parties.

On désigne par G_n le gain en euros de Jojo à la n-ième partie. On représente ci-contre les moyennes successives M_n des gains au cours des 100000 parties où $M_n = \dfrac{G_1 + \cdots + G_n}{n}$. Commenter le graphique. Celui-ci vous semble-t-il cohérent ?



⑥ On admet que les variables G_n ont une variance non nulle. On note m l'espérance de G_n et σ l'écart-type de G_n. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n^* = \dfrac{M_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}$

a) Donner pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, l'approximation de la probabilité $\mathbb{P}(-\alpha < M_n^* < \alpha)$ donnée par le théorème central limite.

b) En déduire une valeur de n à partir de laquelle l'intervalle $[M_n - 0.01; M_n + 0.01]$ est un intervalle de confiance de m au seuil de risque de 95%. ✐ *On admettra que* $\sigma \approx 1.93$.

⑦ Changeons les règles en modifiant le protocole. Max commence par tirer au hasard une boule de l'urne.

— Si elle est noire, il arrête de tirer et la partie est terminée.

— Si elle est blanche, il la remet dans l'urne et il y rajoute une boule blanche, puis il poursuit les tirages selon les mêmes règles.

On désigne par X' la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués par Max lors de l'arrêt de la partie et par G' le gain. Déterminer la loi de X', puis à l'aide d'un programme Python, représenter les moyennes successives M'_n des gains au cours de 50000 parties où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M'_n = \dfrac{G'_1 + \cdots + G'_n}{n}$

Qu'observez-vous en faisant plusieurs simulations ? Proposer une explication.

Question de cours.

Définition d'une application $f : E \to F$ injective.

Exercice 84 (oral 2021)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).
On admet que $M_n = max(X_1, \cdots, X_k, \cdots, X_n)$ est une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

① a) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer la fonction de répartition de M_n.

b) En déduire que M_n est une variable à densité et en déterminer une densité.

② Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[0, 1[$.

a) Montrer que la variable $X = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - U)$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.

b) Écrire une fonction python `SimulM(n, L)` renvoyant une réalisation de M_n où `L` désigne λ.

③ Soit $F_{x_0,a}$ la fonction $x \longmapsto e^{-e^{-a(x-x_0)}}$ où x_0 est un réel et a un réel strictement positif.

a) Étudier la fonction $F_{x_0,a}$ et déterminer sa dérivée $f_{x_0,a}$

b) Justifier que $f_{x_0,a}$ peut-être une densité de probabilité.

c) On admet que si G admet $f_{x_0,a}$ pour densité, alors $\mathbb{E}(G)$ existe et vaut $x_0 + \dfrac{\gamma}{a}$ et $\mathbb{V}(G)$ existe et vaut $\dfrac{\pi^2}{6a^2}$ où γ est la constante d'Euler dont une valeur approchée est 0.577.
Écrire en Python une fonction nommée `dens(x, x0, a)` de la densité $f_{x_0,a}$.
Écrire une fonction permettant de réaliser des tracés de cette fonction pour différentes valeurs de x_0 et de a.
Comparer alors pour les couples $(x_0, a) \in \{(0, 1), (5, 2)\}$ la courbe de $f_{x_0,a}$ avec celle de la densité d'une loi normale d'espérance $x_0 + \dfrac{\gamma}{a}$ et de variance $\dfrac{\pi^2}{6a^2}$

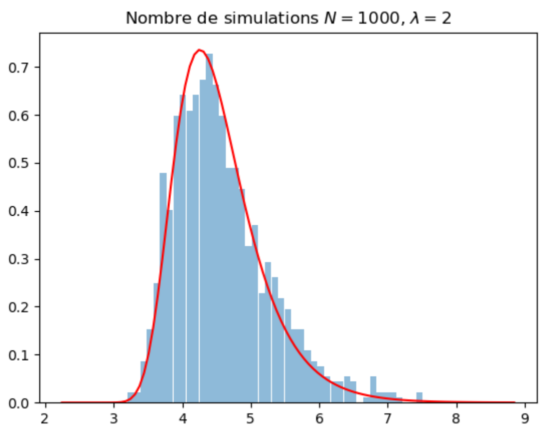
④ a) Montrer que pour tout réel x, $\underset{n\to\infty}{lim}\mathbb{P}(\lambda M_n - \ln(n) \leq x) = F_{0,1}(x)$.

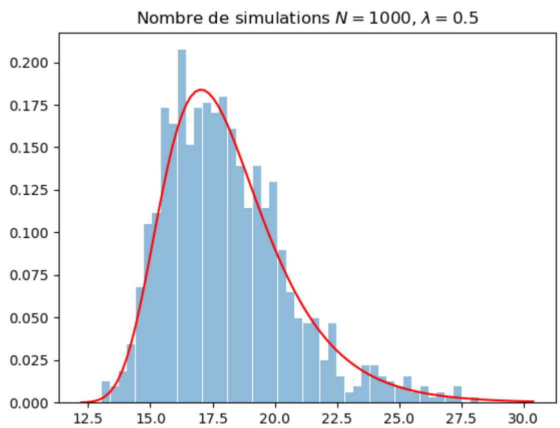
b) En déduire pour n assez grand et u réel, que $\mathbb{P}(M_n \leq y) \approx F_{\frac{\ln(n)}{\lambda},\lambda}(y)$.

c) On considère le script ci-dessous.

```python
n, N = 5000, 1000
L = 2

S = []
for k in range(N):
    S.append(simulM2(n, L))

a, b = min(S), max(S)
NR = 50
pas = (b-a)/NR
R = np.zeros(NR)

for j in range(NR):
    for k in range(N):
        if a+j*pas <= S[k] < a+(j+1)*pas:
            R[j] += 1/N

x1 = np.linspace(a, b+pas, NR)
x2 = np.linspace(a-1, b+1, 100)

y = []
for j in range(100):
    y.append(dens(x2[j], 1/L*log(n), L))

plt.figure()
plt.title('Nombre de simulations $N=1000$, $\lambda=$'+str(L))
plt.bar(x1, R*(NR/(b-a)), width=pas, alpha=0.5)
# la surface de chaque rectangle vaut R[j]
plt.plot(x2, y, 'r')
plt.show()
```

A son exécution, on obtient des figures similaires à celles ci-dessous :





Que représente la variable R ? Que dire du tracé obtenu ?

Question de cours.

Formule du binôme.

Exercice 85 (oral 2021)

Soit X v.a.r admettant pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}}$.

① a) Vérifier que f est bien une densité.

b) Soit U une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0,1[$. Montrer que la variable $-\ln(-\ln(1-U))$ est une variable aléatoire à densité de densité f.

c) Proposer une fonction `simulX(N)` en Python prenant en entrée un entier $N \in \mathbb{N}^*$ renvoyant un vecteur comportant N simulations de X.

② Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2n^2}$.
✐ *On pourra étudier* $\varphi : t \longmapsto t - \ln(1+t)$ *et* $\psi : t \longmapsto \frac{t^2}{2} - t + \ln(1+t)$ *sur* $[0,1[$.

b) En déduire que la suite $\left(\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(1+t)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note γ sa limite.

c) Proposer un programme en Python donnant une valeur approchée de γ en calculant $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n+1)$ pour $n = 100$ puis pour $n = 1000$.

③ On **admet** $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt$ converge et que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt = \gamma$.

a) Montrer que pour tout $y > 0$, $\displaystyle\int_y^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge, puis que :

$$\int_y^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -\ln(y)e^{-y} + \int_y^{\infty} \ln(t)e^{-t} dt$$

b) En déduire que : $\forall y > 0$, $\displaystyle\int_y^{\infty} \ln(t)e^{-t} dt = y\ln(y)\frac{e^{-y}-1}{y} - \ln\left(1 - \frac{e^{-y}}{y}\right) - \int_y^{\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)$

c) En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{\infty} \ln(t)e^{-t} dt$.

d) Montrer que X admet une espérance et déterminer son espérance. (✐ *On pourra effectuer le changement de variable* $u = e^{-x}$).

④ a) Montrer que pour tout $t > 0$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{(n+2)t}}{t}\right)$ converge de somme $e^{-t}\left(\dfrac{1}{1-e^{-t}}\right.$

b) Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-t}-1}{t}$ admet une limite en 0. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t} dt$ converge.

Montrer que $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leq \dfrac{e^{-t}}{t} \leq \dfrac{1}{t^2}$. En déduire que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ converge.

c) Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t} dt = \lim_{a \to 0} \int_{(n+1)a}^{(n+2)a} \frac{e^{-t}}{t} dt - \lim_{A \to +\infty} \int_{(n+1)A}^{(n+2)A} \frac{e^{-t}}{t} dt = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

d) En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt$ est convergente et que :

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\infty} \left(e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-(n+1)t} - e^{-(n+2)t}}{t}\right) dt$$

démontrer alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) dt = \gamma$

Question de cours.

Définition du noyau d'une application linéaire $f : E \to F$.

Exercice 86 (oral 2021)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une équipe de $2n$ personnes participant à un jeu. Les noms des $2n$ personnes sont disposés au hasard dans $2n$ boites comportant chacune un unique nom. Chaque personne, sans avoir eu d'information sur le résultat des essais précédents, passe l'une après l'autre et a la possibilité d'ouvrir n boites au maximum. Si elle trouve son nom, elle permet à l'équipe de gagner un point.
L'équipe est déclarée gagnante si elle possède $2n$ points. On note T la variable aléatoire donnant le nombre de points obtenus par l'équipe et X_i la variable aléatoire de Bernoulli valant 1 si la i-ième personne trouve son nom, 0 sinon.

① Dans cette question on suppose que chaque joueur, à tour de rôle et indépendamment des autres joueurs, ouvre au hasard n boites parmi les $2n$ boites, on vérifie alors si son nom est présent dans une des boites ainsi ouvertes puis on les referme.

a) Écrire une fonction `permutation(n)` qui permet de construire une permutation de $[\![1, 2n]\!]$ de manière aléatoire.

b) Justifier que pour tout $i \in [\![1, 2n]\!]$, on a : $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$

c) En déduire la loi de la variable aléatoire T.

d) Quelle est la probabilité que l'équipe gagne au jeu ?

Dans la suite du sujet l'équipe adopte la stratégie suivante : les $2n$ personnes sont numérotées de 1 à $2n$. L'équipe décide de faire passer la persone portant le numéro 1 en premier, le numéro 2 en second, etc. Les boites sont arbitrairement numérotées de 1 à $2n$ et la personne portant le numéro i ouvre en premier la boite portant son numéro, si elle ne trouve pas son numéro elle ouvre la boite portant le numéro associé à la personne dont le numéro est dans la boite et ainsi de suite. Par exemple, la première personne ouvre en premier la boite portant le numéro 1 puis, si elle trouve le numéro 3, elle ouvre alors la boite portant le numéro 3 et ainsi de suite jusqu'à ouvrir au plus n boites.

② a) Écrire une fonction `jeu(n)` permettant, à partir d'une permutation aléatoire, de simuler le jeu comportant $2n$ personnes et qui renvoie le nombre de points de l'équipe.

b) Écrire une fonction permettant d'estimer la probabilité de gain du jeu et en donner une estimation pour $n = 20$.

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}(T = 2n) = 1 - \dfrac{1}{(2n)!} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} (k-1)!(2n-k)!$.

③ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{(2n)!} \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} (k-1)!(2n-k)!$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

b) Justifier que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

c) Justifier la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$.

d) Montrer que pour tout $k \in [\![2, +\infty[\![$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$ et en déduire un encadrement de a_n

e) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(T = 2n)$

Question de cours.

Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité pour une matrice carrée 2×2.

Exercice 87 (oral 2021)

① On note h la fonction définie par : $h(t) = \begin{cases} -t\ln(t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.
Justifier que la fonction h est continue sur $[0, +\infty[$.

Dans toute la suite de l'exercice, on désigne par X une variable aléatoire réelle admettant une densité notée f_X. Sous réserve d'existence, on pose :

$$H(X) = \mathbb{E}(-\ln(f_X(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h\left(f_X(t)\right) dt$$

Le réel $H(X)$, lorsqu'il existe, représente l'imprévisibilité moyenne de X et se nomme **l'entropie** de X.

② a) Écrire trois fonctions `ddpNor(x)`, `ddpExpo(x)` et `ddpUni(x)` qui renvoient respectivement, la valeur de la densité usuelle des lois, normale centrée réduite, exponentielle et paramètre 1 et uniforme sur $[0, 2\sqrt{2}]$.

b) En utilisant les fonctions précédentes et les fonctions `normal`, `exponential` et `uniform` de la bibliothèque `numpy.random`, écrire un script Python qui permet d'estimer l'entropie des lois, normale centrée réduite, exponentielle de paramètre 1, uniforme sur $[0, 2\sqrt{3}]$. Quelle est celle des trois qui a la plus grande entropie ?

③ On suppose dans la suite que U est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et on note f_U sa densité usuelle. Montrer que $H(U)$ existe et vaut :

$$H(U) = \frac{1}{2}(\mathbb{E}(U^2) + \ln(2\pi)) = \frac{1 + \ln(2\pi)}{2}$$

④ On suppose que la variable aléatoire X possède une variance non nulle σ^2. Soit Y la variable centrée réduite naturellement associée à X. Déterminer une densité f_Y de Y en fonction de f_X. En déduire que $H(X)$ existe si, et seulement si, $H(Y)$ existe et que si c'est le cas, on a la relation :

$$H(Y) = H(X) - \ln(\sigma)$$

⑤ On suppose dans cette question que X est centrée réduite et possède une entropie.

a) Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} -f_X(t)\ln(f_U(t))dt$ converge et déterminer sa valeur. Que remarque-t-on ?

b) Si $u > 0$ et $x \geq 0$, montrer que $h(x) \leq u - x - x\ln(u)$.
En déduire que : $H(X) \leq \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} -f_X(t)\ln(f_U(t))dt$.

c) Proposer des lois qui, parmi les lois à densité admettant une variance σ^2 et une entropie, maximisent l'entropie.

Question de cours.

Définition de la dérivée d'une fonction f en un point a.

Exercice 88 (oral 2021)

On rappelle que si V et W sont deux variables indépendantes de densité f_V et f_W, alors $V+W$ est une variable à densité, dont une densité h est définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t) f_W(x-t)dt$.

Trois clients, notés A, B et C arrivent simultanément aux deux caisses inoccupées d'un magasin. A et B occupent immédiatement (à l'instant $t=0$) les deux caisses, C attend la première caisse laissée libre par A ou B. On néglige le temps de changement de personne.
On suppose que les durées de passage à une caisse par A, B ou C sont des variables aléatoires indépendantes, suivante toutes la loi uniforme sur $[0,1]$ et notées respectivement X, Y et Z.

① A l'aide de simulations informatiques en Python estimer la probabilité que C soit le dernier à quitter les caisses parmi ces trois personnes.

② On désigne par la variable aléatoire U le temps attendu par C avant d'être pris en charge à la caisse.
Montrer que U admet une densité puis en donner une.

③ Déterminer l'espérance et la variance de U.

④ On note T le temps total passé aux caisses par C en comptant son temps d'attente et sa durée de passage à la caisse.

   a) Exprimer simplement la variable T en fonction des variables précédentes.

   b) Déterminer la loi de T.

   c) Déterminer l'espérance de T.

⑤ On admet que la variable $D = |X-Y|$ a la même densité que la variable U. Déterminer alors la probabilité que C soit le dernier à quitter les caisses parmi ces trois personnes.

Question de cours.

Quelles sont les solutions de l'équation différentielle $y' + a(t)y = 0$?

Exercice 89 (oral 2021)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On considère n variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$ indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on note $Y_{i,j} = |X_i - X_j|$.

① Soit X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli. Montrer que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1))$.

② Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et qui retourne la matrice aléatoire $(Y_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

③ Quelle est la probabilité que la matrice soit nulle ? Ecrire une fonction Python permettant de valider votre réponse.
✐ *On rappelle que, si N est une matrice contenant des booléens, l'instruction* `N.all()` *renvoie* `True` *si N ne contient que des* `True` *et renvoie* `False` *sinon.*

④ Déterminer la loi de $Y_{i,j}$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ en distinguant $i = j$ et $i \neq j$.

⑤ Déterminer la loi du couple $(Y_{1,2}, Y_{1,3})$. Les variables $Y_{1,2}$ et $Y_{1,3}$ sont-elles indépendantes ?

⑥ Déterminer $\mathbb{P}(Y_{1,2} = Y_{2,3} = Y_{1,3} = 1)$. Les variables $(Y_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ sont-elles mutuellement indépendantes ?

⑦ Soit (i, j) et (k, l) deux couples distincts tels que $i < j$ et $k < l$. Justifier que les variables $Y_{i,j}$ et $Y_{k,l}$ sont indépendantes.
✐ *On pourra distinguer le cas où les entiers i, j, k, l sont tous distincts et le cas où $i = k$.*

⑧ On pose $Z = \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} Y_{i,j}$.

a) Calculer $\mathbb{E}(Z)$. Sauriez-vous valider votre réponse grâce à une fonction Python ?

b) Justifier que $\mathbb{V}(Z) = \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{V}(Y_{i,j})$. En déduire une expression simple de $\mathbb{V}(Z)$ en fonction de n.

c) Montrer que $\mathbb{P}\left(\left|Z - \dfrac{n(n-1)}{4}\right| \geq n\right) \leq \dfrac{1}{8}$

⑨ On note $N = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$

a) Quelle est la loi de N ?

b) Exprimer Z en fonction de N. En déduire la plus grande valeur possible de Z.

c) Calculer $\mathbb{P}(Z = n - 1)$

Question de cours.

Loi faible des grands nombres.

---;

Exercice 22 : (oral 2019 non publié)

Soient $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ des nombres complexes (pas forcément distincts). on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \\ a_2 & & & & & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

1. Étude du cas $n = 2$. On a $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}$.
   a) Quelles sont les valeurs propres de A ?
   b) A est-elle diagonalisable ?
2. Écrire une fonction Python prenant en entrée une liste $L = [a_0, \dots, a_{n-1}]$ et renvoyant la matrice A.
3. On note P le polynôme $a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$, et ω un nombre complexe vérifiant $\omega^n = 1$.

   Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)} \end{pmatrix}$.

   Montrer que X est vecteur propre de A et donner la valeur propre associée.
4. Etude du cas $n = 4$.
   a) Déterminer tous les complexes z tels que $z^4 = 1$.
   b) Déduire de la question précédente 4 vecteurs propres de A .
   c) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$ et on note $\overline{P}$ la matrice conjuguée de P (c'est à dire la matrice carrée d'ordre 4 dont chaque terme de la ligne i colonne j est le conjugué du terme de la ligne i colonne j de P.

      i. Calculer $P\overline{P}$.
      ii. En déduire que les 4 vecteurs propres donnés précédement forment une famille libre.
      iii. Montrer que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres en fonction de P.
   d) Donner les valeurs propres et la dimension des sous-espaces vectoriels propres de

      $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Question de cours.

Définition de deux suites adjacentes. Théorème les concernant.

---;

Exercice 23 : (oral 2019 non publié)

On considère 2 applications linéaires f, allant de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, et g allant de $\mathbb{R}^p$ dans R^n, où $p < n$. On appelle A matrice de f et B matrice de g, relativement aux bases canoniques de leurs espaces de départ et d'arrivée respectifs.

1. Donner les tailles de A et B.
2. Montrer que $g \circ f$ est un endomorphisme.
3. a) Montrer que le rang de g vérifie $\text{Rg}(g) \leq p$.
   b) Montrer que $g \circ f$ n'est pas surjective.
4. On prend $n = 3$, $p = 2$ et $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   a) En utilisant l'instruction `eig` (qui était rappelée) montrer que AB est diagonalisable et la diagonaliser.
   b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ non nul.
   Montrer que BX est différent de 0.
   c) Montrer que si λ est valeur propre de AB alors λ est aussi valeur propre de BA.
   d) BA est-elle diagonalisable ?
5. On suppose maintenant $p = 3$ et $n > 3$. On note C la matrice carrée d'ordre 3 telle que $C = AB$.
   a) Ecrire une fonction python prenant A et B 2 matrices en argument et renvoyant les valeurs propres de AB et de BA.
   b) Montrer que si λ est une valeur propre non nulle de C, alors λ est une valeur propre non nulle de BA.
   c) On suppose $n = 4$ et que C a trois valeurs propres distinctes non nulles. Montrer que BA est diagonalisable

Question de cours.

;

Exercice 24 : (oral 2019 non publié)

Dans cet exercice , on considère une population de tortues.

1. Le nombre X d'oeufs pondus par une tortue chaque année suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chacun d'eux a une probabilité p d'éclore . On appelle Y le nombre d'oeufs éclos .
   a) Écrire une fonction Python simulant une ponte et donnant le nombre d'oeufs éclos.
   b) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = k)$.
   c) En déduire la loi de Y. Donner l'espérance de Y.
2. Des études sur ce type de tortue ont permis de déterminer que :
   — les tortues deviennent adultes à 2 ans, et que seules 20% parviennent à cet âge
   — 40% des tortues adultes de l'année n meurent avant la fin de l'année
   — les femelles composent la moitié de la population et donnent naissance à 4 bébés chaque année, de l'âge de 2 ans jusqu'à la fin de leur vie .

   On définit a_n comme le nombre d'adultes vivant l'année n, et b_n le nombre de bébés de cette même année.
   a) Déterminer la valeur de a_{n+2} en fonction de a_{n+1} et b_n ainsi que celle de b_{n+1} en fonction de a_n .
   b) On note $E = \{(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \quad tq \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} - 0.6u_{n+2} - 0.4u_n = 0\}$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de E.
   c) On considère que l'on a comme conditions initiales $a_0 = 8000$, $a_1 = 7700$ et $a_2 = 7400$.
   Écrire une fonction Python de paramètre n qui renvoie la liste `L = [a0,a1,a2,...,an]`.
   En donner une représentation graphique.
   La suite (a_n) semble-t-elle converger ?
   d) i. Donner les racines réelles et complexes du polynôme $P = X^3 - 0.6X^2 - 0.4$.
      ii. Prouver que si r est racine de P, la suite des puissances de r appartient à E.
      iii. Montrer que l'application ϕ, qui à toute suite u appartenant à E associe (u_0, u_1, u_2) est un isomorphisme de E sur $\mathbb{C}^3$.
      En déduire que E est de dimension 3.
      iv. Notons r_1, r_2, r_3 les trois racines de P. On admet que la famille $((r_1^n), (r_2^n), (r_3^n))$ est libre dans E. Montrer que c'est une base de E.
      v. En déduire la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (On ne demande pas la valeur explicite de la limite.)

Question de cours.

;

Exercice 25 : (oral 2019 non publié)

Soient deux matrices carrées A et B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ telles que :
$A \neq 0$, $B \neq 0$, $AB = BA = 0$, $A^2 = A$ et $B^2 = B$.

Soit $F = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \text{ telles que } M = xA + yB, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

1. Montrer que F est un espace vectoriel de dimension 2.
2. a) Trouver 2 matrices A et B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, où $n \geq 3$ telles que la matrice identité I_n n'appartienne pas à F.
   b) Trouver 2 matrices A et B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$, où $n \geq 3$ telles que la matrice identité I_n appartienne à F.
3. Faire un programme permettant de vérifier que 2 matrices A et B respectent les 3 conditions du début. (On rappelle la fonction produit matriciel `dot` et celle permettant de créer des matrices nulles `zeros` .)
4. On considère dans cette question seulement les deux matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
   Montrer qu'elles respectent les conditions $A \neq 0$, $B \neq 0$, $AB = BA = 0$, $A^2 = A$ et $B^2 = B$.
   Donner les coordonnées de la matrice identité dans la base (A, B) de F
5. On revient au cas général où A et B sont deux matrices carrées d'ordre n telles que $A \neq 0$, $B \neq 0$, $AB = BA = 0$, $A^2 = A$ et $B^2 = B$.
   a) On suppose que la matrice identité appartient à F . Donner ses coordonnées dans la base (A, B) de F.
   b) En déduire une CNS sur A et B pour que la matrice identité appartienne à F.
6. On suppose que la matrice identité appartient à F. Donner les conditions pour qu'une matrice de F soit inversible.
7. Déterminer toutes les matrices M de F qui vérifient $M^2 = M$.
8. Soit $M \in F$. A l'aide de la formule du binôme, calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.
9. On pose $n = 3$ et on souhaite trouver deux matrices A et B non triviales vérifiant $A \neq 0$, $B \neq 0$, $AB = BA = 0$, $A^2 = A$ et $B^2 = B$.
   a) Si A est diagonalisable , que peut-on dire de ses valeurs propres ? Donner les formes possibles de A.
   b) A l'aide de Python, proposer deux matrices A et B non triviales vérifiant les conditions.

Question de cours.

---;

Exercice 26 : (oral 2019 non publié)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 3\}$;
2. On donne les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $a_1 = (1, 1, 0), a_2 = (0, 0, 1), a_3 = (1, -1, 0)$.
   a) Montrer que (a_1, a_2, a_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Déterminer la matrice M de f dans cette base.
   c) Déterminer P tel que $A = PMP^{-1}$ et vérifier votre calcul avec Python.
   On rappelle ici comment calculer l'inverse d'une matrice en Python.
3. On considère le système d'équations différentielles linéaires :

$$\begin{cases} f'(t) &= 2f(t) + g(t) + h(t) \\ g'(t) &= f(t) + 2g(t) + h(t) \\ h'(t) &= 3h(t) \end{cases}$$

   a) Déterminer $h(t)$ en fonction de t.
   b) On pose $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}, Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, $X'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ h'(t) \end{pmatrix}$, $Y'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$ de sorte que $Y(t) = P^{-1}X(t)$. On admet qu'on a alors $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$.
   Vérifier qu'il existe λ réel tel que $u'(t) = 3u(t) + \lambda e^{3t}$.
   c) En déduire les formes de $f(t), g(t), h(t)$.
   d) On suppose que $f(0) = 1$, $g(0) = -1$ et $h(0) = 0.1$.
   Représenter graphiquement sur $[0, 1]$ les fonctions f, g et h.
   Vérifier vos solutions à l'aide de la méthode d'Euler explicite.

Question de cours.

Donner la définition d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.
Donner son tableau de variation.

---;

Exercice 27 (publié) :

Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$. On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$.

① On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^2, j^3 et j^4.

② a) Soit r et s deux nombres complexes non nuls.
Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & r^2 \\ s^2 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.
Donner une base de vecteurs propres de M.

b) La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & r^2 \\ s^2 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable lorsque $r = 0$ ou $s = 0$?

③ Écrire une fonction `decalage(L)` qui renvoie, si `L=[a1,...,an]`, la liste `[a2,...,an,a1]`.
Utiliser cette fonction pour écrire une fonction `matrice(a1,a2,a3)` qui renvoie la matrice A.
On pourra par exemple compléter le script suivant :

```python
def matrice(a1,a2,a3):
    A = ...
    L = ...
    for i in ...
        A.append(L[:])
        ...
    return ...
```

④ Si a_1, a_2, a_3 sont réels, la matrice A est-elle diagonalisable ?

⑤ Montrer que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A. Quelle est la valeur propre associée ?

⑥ On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$. On pourra utiliser sans le justifier que la famille (U, X_1, X_2) est libre.

a) Calculer AX_1 et AX_2.
En déduire qu'il existe des complexes r et s tels que $AX_1 = s^2 X_1$ et $AX_2 = r^2 X_1$.

b) Déterminer le spectre de A.
On pourra exprimer les valeurs propres à l'aide des complexes r et s introduits à la question 6. et utiliser la question 2.

⑦ Préciser si A est diagonalisable : (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ et (b) $A = \begin{pmatrix} j & 1 & 0 \\ 1 & 0 & j \\ 0 & j & 1 \end{pmatrix}$

Question de cours.

Définition de l'espérance d'une variable aléatoire X discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

;

Exercice 28 (publié) :

Dans tout l'exercice, on considère $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. On rappelle que si $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors leur produit scalaire est :

$$< u, v >= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

① La matrice A est-elle diagonalisable ?
Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}$ et déterminer les sous-espaces propres E_0 et E_1 de f.

② La matrice A est-elle inversible ?

③ Ecrire une fonction Python `proj` qui prend en argument une matrice carrée M (entrée par exemple sous la forme d'une liste de listes) et qui renvoie un booléen : `True` si $M^2 = M$, `False` sinon.
Tester cette fonction avec la matrice A.

④ Montrer que $\mathrm{Im}(f) = E_1$

⑤ Ecrire une fonction Python `ps` prenant en argument deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ codés sous forme de tableaux numpy ou de listes, et retournant leur produit scalaire.

⑥ a) Montrer que les deux sous-espaces propres E_0 et E_1 sont orthogonaux, c'est-à-dire que :

$$\forall u \in E_0, \forall v \in E_1, < u, v >= 0$$

b) En déduire que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$f(x) \in E_1 \text{ et } \forall y \in E_1,\ f(x) - x \text{ orthogonal à } y$$

On a donc montré que f était la projection orthogonale sur E_1.

⑦ Déterminer une base orthonormale de E_1. En déduire, en utilisant éventuellement la fonction `ps`, une valeur approchée de la distance du vecteur $t = (1, 2, 1)$ à l'espace E_1 à 10^{-2} près.

Question de cours.

Donner la définition du nombre dérivé d'une fonction f.

;

Exercice 29 (2018 non publié) :

Soit la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\Phi(P) = 9XP - (X^2 - 1)P'$.

① Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

② On modélise un polynôme par la liste de ses coefficients donnée par ordre croissant. Par exemple le polynôme $X + 2X^3 + X^4$ va être modélisé par `[0,1,0,2,1]`.

a) Écrire une fonction prenant en argument une liste de ce type représentant un polynôme P et retournant une liste modélisant le polynôme dérivé P'.

b) Écrire une fonction prenant en argument une liste représentant un polynôme P et retournant une liste modélisant le polynôme XP.

c) En déduire une fonction retournant une liste représentant $\Phi(P)$ à partir d'une liste représentant P.

③ On donne $P = 2X^2 + 4X + 2$. Calculer $\Phi(P)$ et le factoriser.

④ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n. Montrer que $\Phi(P)$ est de degré inférieur ou égal à $n + 1$.
Pour quel degré a-t-on une inégalité stricte ?

⑤ On considère l'équation (E) : $\Phi(P) = 9P$.

a) Le polynôme nul est-il solution ?

b) On cherche à déterminer tous les polynômes non nuls solution de (E).
Montrer que ceux-ci sont de degré 9.
Montrer qu'on peut les mettre sous la forme $(X + 1)^k Q(X)$.
Montrer qu'on a toujours $k = 9$ et $\deg(Q) = 0$.

c) Déduire des questions précédentes que 9 est valeur propre de Φ et donner le sous-espace vectoriel propre associé.

Question de cours.

Définition du module d'un nombre complexe.

;

Exercice 30 (2018 non publié) :

Rappel : Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles indépendantes à densité, de densités respectives f_X et f_Y, alors $X+Y$ admet une densité g qui est définie pour tour réel x par :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(x-t)dt$$

① a) Pour tout réels a, b et c on définit la matrice $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{pmatrix}$.

Donner le rang de $M(a,b,c)$ en fonction de a, b et c.

b) Soit $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Montrer que si V n'est pas nulle, alors V est un vecteur propre de $M(a,b,c)$ et préciser la valeur propre associée.

c) $M(a,b,c)$ est-elle diagonalisable ?

② U désigne une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $]0,1]$.

a) Déterminer et reconnaître la loi de la v.a.r. $W = -\dfrac{\ln(U)}{\lambda}$ où $\lambda > 0$.

b) Écrire une fonction Python qui simule la loi de W.

③ Soient X, Y et Z des v.a.r. définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \tau, \mathbb{P})$. on suppose que X, Y et Z sont indépendantes et suivent une même loi exponentielle de paramètre λ.

Pour tout $w \in \Omega$, on définit la matrice $M(w) = \begin{pmatrix} X(w) & X(w) & X(w) \\ Y(w) & Y(w) & Y(w) \\ Z(w) & Z(w) & Z(w) \end{pmatrix}$

a) Montrer que $X+Y$ admet pour densité la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Déterminer une densité de $S = X+Y+Z$.

c) Calculer $\mathbb{P}(S \geq 1)$.

d) Écrire une fonction Python qui simule la loi de S et une autre qui estime la probabilité de l'événement $(S \geq 1)$. Confronter votre résultat à celui obtenu en 3.c).

e) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ et $(c_n)_{n\geq 0}$ telles que $(a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{R}^*$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} & = X(w)(a_n + b_n + c_n) \\ b_{n+1} & = Y(w)(a_n + b_n + c_n) \\ c_{n+1} & = Z(w)(a_n + b_n + c_n) \end{cases}$$

Déterminer la probabilité que ces trois suites convergent toutes les trois vers 0

Question de cours.

Définition de l'espérance d'une variable aléatoire X admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 31 (2021 non publié) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel, noté $< .,. >$ et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Si F est un sous-espace vectoriel de E, on définit l'orthogonal de F par $F^\perp = \{u \in E / \forall v \in F, < u, v >= 0\}$. On admet, pour l'instant, que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E et que $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$ (résultat qu'on démontrera à la question 7.).

① Écrire une fonction Python `ps(u, v)` qui prend en argument deux vecteurs u et v de E sous forme d'array numpy et renvoie le produit scalaire $< u, v >$.

② Si f est un endomorphisme de E, on définit l'endomorphisme f^* de E, appelé l'adjoint de f comme vérifiant la relation :

$$\forall u, v \in E, < f(u), v >=< u, f^*(v) >$$

✐ *on admet l'existence et l'unicité de f^*.*

Montrer que $\forall u \in E,\ f^*(u) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < u, f(e_k) > e_k$.

③ Compléter le programme suivant pour définir une fonction Python `adjoint(f, u)` qui prend en argument une application linéaire f sous forme de fonction Python et un vecteur u sous forme d'array numpy et qui renvoie le vecteur $f^*(u)$ sous forme d'array numpy, en utilisant la formule de la question précédente avec la base canonique.

```python
def adjoint(f, u):
        n = len(u)
        res = ...
        for i in range(n):
                e = np.zeros(n)
                e[---] = ---
                res += ---
        return res
```

④ Dans cette question uniquement $n = 2$ et f sera l'endomorphisme de E dont la matrice canoniquement associée est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice canoniquement associée à f^*. Que remarque-t-on ?

⑤ Retour au cas général. Montrer que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

⑥ On suppose désormais que $f^* = f$ (on dit que f est auto-adjoint).

a) Montrer que f est diagonalisable.
b) Montrer que $\mathrm{Ker} f = (\mathrm{Im} f)^\perp$ et $\mathrm{Im} f = (\mathrm{Ker} f)^\perp$.

⑦ Pour finir on se propose de démontrer les résultats admis au début de l'énoncé sur l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel.
Soit f un sous-espace vectoriel de E, de dimension p.

a) Montrer que $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Soit $\mathcal{C} = (u_1, \cdots, u_p)$ une bas orthonormée de F. Montrer que :
$$v \in F^{\perp} \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, p]\!], < u_k, v >= 0$$

c) Soit φ l'application de E dans $\mathbb{R}^p$ définie par $\varphi(v) = (< u_1, v >, \cdots, < u_p, v >)$.
Montrer que φ est une application linéaire surjective.

d) En déduire que $\dim(F^{\perp}) = n - \dim(F)$.

Question de cours.

Définition de la covariance de deux variables aléatoires réelles discrètes.

Exercice 32 (2021 non publié) :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On considère l'application F définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $F(P) = P - P'$.

① *Informatique :* Un polynôme non nul de degré k, $P = a_0 + a_1X + \cdots a_kX^k$ sera représenté en Python par la liste `[a0,a1,...,ak]`. Le polynôme nul sera représenté par la liste vide.

a) Écrire une fonction `derivee(P)` qui prend en argument un polynôme `P` et retourne sa dérivée.
Par exemple `derivee([1])` retournera `[]` et `derivee([0, 1, 2])` retournera `[1, 4]`.

b) Écrire une fonction `F(P)` qui prend en argument un polynôme `P` et retourne le polynôme `P-P'`.
Par exemple `F([0, 0, 1])` retournera `[0, -2, 1]`.

② Montrer que F est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

③ Déterminer la matrice A de F dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

④ Déterminer les valeurs propres de F. L'endomorphisme F est-il diagonalisable ?

⑤ Justifier que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme $P_i \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $F(P_i) = \dfrac{1}{i!}X^i$.

⑥ Justifier que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

⑦ L'objectif de cette question est d'obtenir une expression des polynômes P_i.
On considère l'endomorphisme D de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $D(P) = P'$, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$.
On note id l'application identité de $\mathbb{R}_n[X]$.

a) Simplifier $(id - D) \circ (id + D + \cdots + D^n)$. Que peut-on en déduire pour l'application F ?

b) Soit i un entier entre 0 et n. Exprimer alors P_i dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel k le polynôme P_{2k} n'a pas de racine réelle et que le polynôme P_{2k+1} a une unique racine réelle.

Question de cours.

Densité de la loi normale d'espérance 0 et de variance 1/2.

Exercice 33 (2021 non publié) :

Soit $n \geq 2$. On pose $E = \mathbb{R}^n$ qu'on munit de son produit scalaire canonique noté $< .,. >$.
On considère un endomorphisme f de E anti-symétrique, c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, < x, f(x) >= - < f(x), y >$$

① Écrire une fonction Python qui prend en argument deux vecteurs u et v de E et qui retourne la valeur de $< u, v >$.

② a) Montrer que $\forall x \in E, < x, f(x) >= 0$

b) En déduire que si λ est une valeur propre de f, alors nécessairement $\lambda = 0$.

③ Montrer que tout élément de $\mathrm{Im}(f)$ est orthogonale à tout élément de $\ker(f)$.

④ a) Montrer que pour tout $x \in E$, on a : $< x, f^2(x) >= -\|f(x)\|^2$ et en déduire que $\ker(f^2) = \ker(f)$ où $f^2 = f \circ f$.

b) Montrer alors que toutes les valeurs propres de f^2 sont négatives ou nulles.

⑤ Soit λ une valeur propre non nulle de f^2 et x_0 un vecteur propre associé.
On note $F = \mathrm{Vect}\{x_0, f(x_0)\}$.
Déterminer la dimension de F, puis montrer que $\forall x \in F,\ f(x) \in F$.

⑥ Soit g l'application définie sur F par : $g(x) = f(x), \forall x \in F$. On admet que $g \in \mathcal{L}(F)$.

a) Montrer que g n'admet pas de valeur propre réelle.

b) Donner la matrice de g dans la base $(x_0, \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda}} f(x_0))$ de F.

⑦ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ canoniquement associée à un endomorphisme u.

a) Écrire un programme Python qui prend une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ en entrée et qui renvoie `True` si M est antisymétrique (c'est-à-dire si ${}^tM = -M$) et `False` sinon. Tester votre programme sur la matrice A.

b) Montrer que -3 est valeur propre de A^2 et exhiber un vecteur propre associé.

c) Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u s'écrit : $B = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) Déterminer alors une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Question de cours.

Si X et Y sont deux variables aléatoires admettant une variance, que vaut $\mathbb{V}(X+Y)$? Que dire si X et Y sont indépendantes ?

Exercice 34 (2021 non publié) :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On définit l'application Tr qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe la somme de ses éléments diagonaux :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,i} \text{ où les } M_{i,j} \text{ sont les coefficients de } M$$

① Écrire une fonction `trace` qui prend en argument une matrice (donnée par exemple sous forme de liste de listes) et qui renvoie sa trace.

② Montrer que l'application Tr est une application linéaire.

③ Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{R}$ et en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

④ On se place dans cette question dans le cas où $n = 2$.

a) Donner une base du noyau de Tr.

b) Soit I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de la forme xI_2, avec $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

c) Soit $\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices C de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que, pour toute matrice B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a : $CB = BC$.
Montrer que $\mathcal{C}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.

On revient désormais au cas général.

⑤ Montrer que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on : $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Pour tous entiers $1 \leq i, j \leq n$, on définit la matrice $E^{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par ses coefficients $E^{i,j}_{i,j} = 1$ et $E^{i,j}_{k,l} = 0$ si $k \neq i$ ou $l \neq j$.

⑥ Expliquer pourquoi la famille $(E^{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

⑦ Pour tous entiers $1 \leq i, j, k, l \leq n$ tels que $j \neq k$, montrer que $E^{i,j}E^{j,k} = E^{i,k}$ et $E^{i,j}E^{k,l} = 0$.

⑧ Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application linéaire vérifiant $f(AB) = f(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $f(E^{i,j}) = 0$ si $i \neq j$ et que $f(E^{i,i})$ ne dépend pas de i.

b) Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(A) = x\mathrm{Tr}(A)$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

⑨ A-t-on $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(ACB)$ pour toutes matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Question de cours.

Énoncer le théorème central limite.

Exercice 35 (2021 publié) :

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x + y - z, 2y, -x + y + z)$$

On considère aussi l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$ et $v = g(e_1) + e_1$.

① a) Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

b) A l'aide de Python, déterminer les valeurs propres de f et conjecturer la dimension de chaque espace propre. L'endomorphisme f semble-t-il diagonalisable ?
✐ *On rappelle que, dans la bibliothèque* `numpy` *la fonction* `linalg.eig(A)` *renvoie les valeurs propres (réelles ou complexes) de A et la matrice dont les colonnes sont des vecteurs propres associés à ce valeurs propres (dans le même ordre).*

② a) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (u, v, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice T de g dans la base $\mathcal{C}$.

c) En déduire les valeurs propres de g. L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

③ On note $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MB\}$.

a) Écrire une fonction Python `E(M)` qui prend en argument une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et renvoie `True` si $M \in E$ et `False` sinon.
✐ *On rappelle que, si N est une matrice contenant des booléens, l'instruction* `N.all()` *renvoie* `True` *si N ne contient que des* `True` *et renvoie* `False` *sinon.*

b) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

c) Montrer, par l'absurde, que si $M \in E$, alors M n'est pas inversible.

d) Montrer que $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}({}^tB)$ (où $\mathrm{Sp}(B)$ est l'ensemble des valeurs propres de B).

e) Montrer que, si $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2 et si $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de ${}^tB$ associé à la valeur propre 2, alors $X\,{}^tY \in E$.

f) En déduire que $\dim(E) \geq 2$.

Question de cours.

Exercice 26 (oral 2019 non publié) :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t)\,dt.$

1. Écrire en Python une fonction permettant l'affichage graphique de $\tan^2, \tan^4, \tan^6, \tan^8$ sur l'intervalle $[0, \pi/4]$.
2. Faire une conjecture sur la monotonie et l'existence d'une limite de la suite (u_n) et la démontrer.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{2n+3}$ et $u_n \geq \dfrac{1}{2(2n+3)}$.
4. De même qu'à la question précédente, en utilisant la valeur de $u_{n+1} + u_n$, donner un majorant de u_n.
   Donner la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
6. La série de terme général u_n est-elle convergente ?
7. Écrire une fonction prenant n en argument et renvoyant une valeur approchée de u_n.
8. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

   a) Montrer que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \quad (1 + \tan^2 t) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-\tan^2)^k(t) = 1 + (-1)^n \tan^{2n+2}(t)$.

   b) Montrer que $S_n = \dfrac{\pi}{4} + (-1)^n u_n$.

   c) En déduire un algorithme permettant d'avoir une valeur approchée de π à ϵ près.

Question de cours.

Exercice 27 :

Soient p et q deux réels compris entre 0 et 1 tels que $p+q \leq 1$.
On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = q + (1-p-q)\,x + p\,x^2$, ainsi que la suite (v_n) définie par la donnée de $v_0 = 0$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = q + (1-p-q)\,v_n + p\,v_n^2$.

1. Écrire une fonction Python qui affiche sur le même graphique une dizaine de courbes représentatives de f pour p égal à 0.1 , 0.2 , ..., 0.9 et q choisi aléatoirement dans $[0,1]$.
   (Rappel : on peut utiliser la fonction `random` du module `random` pour choisir q.)
   Tracer sur le même graphique la droite d'équation $y = x$.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \in [0,1]$.
3. Montrer que $f(x) = x$ ssi $x = 1$ ou $x = q/p$.
4. Si $q < p$, montrer la convergence de (v_n) et donner sa limite .(On pourra s'aider du graphique et de la droite d'équation $y = x$)
5. Que peut on dire dans le cas où q est supérieur ou égal à p ?
6. On s'intéresse à l'extinction d'une population de bactéries procaryotes dans un écosystème donné répondant au modèle suivant.
   L'évolution est supposée réalisée par étapes successives, suivant chacune le même fonctionnement ; à chaque étape donnée, chaque bactérie, indépendamment des autres peut :
   * soit donner lieu à une fission binaire, et se diviser en deux bactéries identiques indépendantes, ceci avec une probabilité p ;
   * soit engendrer une seule bactérie avec une probabilité $1-p-q$;
   * soit mourir et se désintégrer avec une probabilité q.

   On appelle X_n la variable aléatoire égale au nombre de bactéries présentes après la n-ième étape.
   Au départ, il n'y a qu'une seule bactérie dans l'écosystème, et on note $X_0 = 1$.
   Pour tout entier naturel n, on note $U_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.
   En considérant un système complet d'événements lié à X_1, montrer que la suite (U_n) correspond à la suite (v_n) étudiée précédemment. Quelle interprétation faire des résultats précédemment démontrés ?

Question de cours.

Exercice 28 :

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$. On définit ensuite la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour $\forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a) Etudier les variations de f.

   b) Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

2. a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution . On l'appelle a.

   b) Monter que $\frac{1}{e} < a < 1$.

   c) Ecrire une fonction donnant une valeur approchée de a à 10^{-3} près.
   (La méthode de dichotomie était rappelée .)

3. a) Montrer que $a < u_0 < u_2$ et $u_3 < u_1 < a$.

   b) Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones .
   Peuvent-elles converger vers une même limite ?
   Qu'en déduit-on concernant la convergence de (u_n) ?

4. On pose, pour $x \geq 0$, $h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$.

   a) Expliciter $h(x)$ pour $x > 0$. Montrer que h est continue en 0.

   b) Résoudre $h(x) = x$.

   c) Montrer que la suite (u_{2n+1}) est convergente et préciser sa limite.

   d) Montrer que la suite (u_{2n}) diverge vers $+\infty$.

Question de cours.

Exercice 29 :

Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n par : $\forall x \geq n \quad f_n(x) = \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}} dt$.

1. a) Montrer que f_n est dérivable sur son domaine de définition et donner f_n'.
   b) A l'aide d'une minoration de f_n, montrer que $\underset{x \to +\infty}{lim} f_n(x) = +\infty$
   c) En déduire que pour tout entier naturel n, l'équation $f_n(x) = 1$ a une unique solution. On note dans la suite u_n cette solution.
2. a) Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}$.
   c) A l'aide de la question précédente, écrire un programme Python affichant une valeur de n telle que $u_n - n < 10^{-4}$.
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - n$.
   a) Montrer que (v_n) converge vers 0.
   b) Montrer que pour tout réel x tel que $x \geq -1$ on a $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.
   c) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a $e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} e^{-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}}$.
   d) A l'aide de la question 2)b), montrer que $u_n - n$ équivaut à $e^{-\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Question de cours.

A quelle(s) condition(s) sur sa fonction de répartition une variable aléatoire X admet-elle une densité de probabilité ? Comment détermine-t-on alors une densité de X ?

Exercice 30 : Publié en 2019

Rappel. Algorithme de dichotomie
On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

— $a_0 = a$ et $b_0 = b$

— Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.

① On considère pour tout entier $n \geq 2$ la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x^n - ln(x) - n$.

a) Dresser le tableau de variation de f_n.

b) *On rappelle et on admet l'inégalité suivante :* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(x) \leq x - 1$ (*)
En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique réel $u_n \in]0, n^{-1/n}[$ tel que $f_n(u_n) = 0$ et un unique réel $v_n \in]n^{-1/n}, +\infty[$ tel que $f_n(v_n) = 0$.

② **Étude de la suite** (v_n).
La suite $(v_n)_{n\geq 2}$ vérifie donc l'égalité : $\forall n \geq 2,\ v_n^n - \ln(v_n) - n = 0$.

a) Justifier en utilisant si besoin (*) que $f_n((2n)^{1/n}) > 0$, puis en déduire que : $\forall n \geq 2$, $v_n \leq (2n)^{1/n}$.

b) En utilisant l'algorithme de dichotomie, déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes v_n.
le sujet rappelait comment utiliser la fonction **`plot`** *du module* **`matplotlib.pyplot`**

c) Montrer que (v_n) converge et déterminer sa limite l.

d) *On admet le résultat suivant : si* $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$ avec $\underset{n\to\infty}{lim} b_n = +\infty$, alors $\ln(a_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(b_n)$.
On rappelle de plus que $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$.
Déterminer un équivalent de $v_n - l$.

③ **Étude de la suite** (u_n).

a) Proposer une méthode permettant de déterminer des valeurs approchées à 10^{-3} près des termes u_n pour n allant de 2 à 8.

b) Calculer $f_n(u_{n+1})$. En déduire le sens de variation de (u_n).

c) Justifier que $\lim\limits_{n \to \infty} u_n^n = 0$ puis montrer que u_n est équivalent à e^{-n}.

Question de cours.

Théorème de transfert pour une variable aléatoire réelle discrète.

Exercice 31 : (oral 2018)

Rappel. Algorithme de dichotomie
On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

— $a_0 = a$ et $b_0 = b$
— Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx^3 + n^2x - 2$.

① Montrer que l'application $f_n(x) = 0$ admet une unique solution et que celle-ci est strictement positive.
On notera par la suite a_n cette solution.

② Écrire une fonction Python permettant de déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près de a_2.

③ Quelle est la monotonie de la suite (a_n) ? Montrer que cette suite est convergente.

④ On pose $u_n = n^2 a_n$. A l'aide de la fonction Python, représenter graphiquement cette suite. Que dire de sa convergence ?
Démontrer cette conjecture et donner un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

⑤ On pose $g(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{3x^2 + 2}$.

a) Montrer que cette fonction est croissante sur $[a_2, 1]$ et donner son tableau de variation sur $[a_2, 1]$.
b) Étudier le signe de $g(x) - x$ sur $[a_2, 1]$.
c) On pose $v_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $v_{n+1} = g(v_n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est monotone et converge vers a_2.

Question de cours.

Énoncer la formule des probabilités totales.

Exercice 32 : (oral 2021 - publié)

On s'intéresse à une population de saumons et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, y_n le nombre de saumons de l'année n. Selon un modèle d'évolution de la population, on a l'égalité pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = y_n e^{r(1-y_n/p)}$ où p représente la capacité limite du milieu et r est le taux de croissance de la population ($r > 0$).

① Montrer qu'en posant $b = \dfrac{r}{p}$, $\alpha = e^r$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = by_n$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie alors la relation pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \alpha x_n e^{-x_n}$. Quel est le comportement de (x_n) si $x_0 = 0$?
Par la suite, on suppose que $x_0 > 0$.

② Montrer rapidement que (x_n) prend des valeurs strictement positives.

③ Dresser le tableau de variation de la fonction $f_\alpha : x \longmapsto \alpha x e^{-x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

④ Déterminer les solutions de l'équation $f_\alpha = x$ sur $\mathbb{R}_+$ selon la valeur de α.

⑤ a) Écrire une fonction Python qui prend en arguments un réel x_0 et un réel α et qui représente les termes x_k pour k variant entre 0 et 200. On fera apparaître les points (k, x_k) pour k pair en bleu et ceux pour k impairs en rouge.
On rajoutera par exemple l'option `color ='blue'` ou `color = 'red'` pour choisir la couleur du graphe.

b) Tester votre programme dans le cas où $x_0 = 0.5$. Quel est le comportement de la suite pour $\alpha = 4$ ou $\alpha = 7$? Observer le comportement chaotique lorsque $\alpha = 15$.

⑥ On suppose que $\alpha \in]e, e^2[$.

a) On introduit la fonction g_α où $g_\alpha : x \longmapsto f_\alpha(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.
Étudier le signe de g_α sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer qu'il existe un réel $M \in [0, 1[$ tel que pour tout réel $x \in [1, +\infty[$, $|f'_\alpha(x)| \leq M$.

c) Montrer que l'équation $f_\alpha(x) = 1$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}_+$ On notera λ_α la solution dans $[0, 1[$ et μ_α celle dans $]1, +\infty[$.

d) On souhaite montrer qu'il existe un rang n_0 tel que $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$.
On procède par l'absurde en supposant que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0, \lambda_\alpha[\cup]\mu_\alpha, +\infty[$.
Montrer que pour tout entier naturel n, $x_{n+1} \in [0, \lambda_\alpha]$ puis que $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante et convergente. En déduire une contradiction et conclure.

e) On admet que $f_\alpha(\alpha e^{-1}) > 1$. Montrer que pour tout $x \in [1, \mu_\alpha]$, $f_\alpha(x) \in [1, \mu_\alpha]$.

f) Soit un entier n_0 tel que $x_{n_0} \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$.
Montrer que $x_{n_0+1} \in [1, \mu_\alpha]$, puis que pour tout $n \geq n_0 + 1$, $|x_{n+1} - \ln(\alpha)| \leq M|x_n - \ln(\alpha)|$.

g) En déduire que (x_n) converge et préciser sa limite.

Question de cours.

Énoncer l'inégalité de Markov.

Exercice 33 : (oral 2021 - non publié)

Rappel. Algorithme de dichotomie
On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

— $a_0 = a$ et $b_0 = b$
— Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.

Soit n un entier naturel et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \ln(1 + 5x + x^n)$.

① a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet, pour tout entier naturel n, une unique solution positive α_n.
b) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq \alpha_n \leq 1$.

② Préciser les trois premiers termes de la suite (α_n).

③ A l'aide d'un programme Python, et en utilisant la méthode de dichotomie, déterminer une valeur approchée de α_3 au centième près, puis (en adaptant éventuellement le programme précédent pour avoir une valeur approchée de α_n), émettre une conjecture à propos des deux questions suivantes :
a) La suite (λ_n) est-elle monotone ?
b) Converge-t-elle vers 1 ?

④ a) Soit x un réel positif. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
b) En déduire la monotonie de la suite (α_n).

⑤ Montrer que la suite (α_n) converge.

⑥ On suppose dans cette question que la limite l de la suite (α_n) vaut 1. Pourquoi a-t-on alors, à partir d'un certain rang n_0, que $\alpha_n \geq 2/5$? Que peut-on en déduire ?

⑦ Déterminer la limite de la suite (α_n).

Question de cours.

Allure de la représentation graphique d'une densité de la loi exponentielle de paramètre 1.

Exercice 34 : (oral 2021 - publié)

Rappel *: La méthode d'Euler permet d'approcher la solution φ d'une équation différentielle au voisinage d'un point connu, en utilisant de proche en proche l'approximation affine de la fonction au voisinage de chaque point.*

$$\text{en tout point } a,\ \varphi(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a) \text{ lorsque } h \text{ petit (positif ou négatif)}$$

Soit $I =]1, +\infty[$ et on considère l'équation différentielle (E) :

$$\forall t \in I,\ -t^2 y'(t) + t y(t) = (y(t))^2$$

ayant pour inconnue une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.
On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions solutions de cette équation différentielle.

① a) Montrer que la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{t}{\ln(t)}$ est une solution de l'équation (E) sur $]1, +\infty[$.

b) L'ensemble $\mathcal{S}$ est-il un espace vectoriel ?

c) Représenter en Python la fonction f sur l'intervalle $[2, 4]$.

② On cherche une solution y de l'équation différentielle (E) vérifiant $y(e) = 3$.
Sous réserve d'existence de y, utiliser la méthode d'Euler pour représenter en Python un tracé approximatif de la courbe représentative de y sur l'intervalle $[2, 4]$ en partant du point $(e; 3)$.
✐ *On pourra tracer successivement une solution sur* $[e, 4]$ *puis une solution sur* $[2, e]$.
Comparer avec le graphe obtenu à la question 1.

③ Déterminer les solutions sur I de l'équation différentielle linéaire (E') :

$$t^2 z'(t) + t z(t) = 1$$

ayant pour inconnue une fonction $x : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

④ Soit y une solution de (E), qui ne s'annule pas sur tout l'intervalle I.
Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{y(t)}$ est solution de (E').
En déduire l'expression de y.

⑤ a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des fonctions de $\mathcal{S}$ qui ne s'annulent pas sur I.

b) A-t-on $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}$?

c) Existe-t-il une solution de (E) vérifiant $y(e) = 3$ et ne s'annulant pas sur I ?