



- Fonction de deux variables continue, de classe \mathcal{C}^1 sur un pavé ouvert du plan. ✎ « L'écriture d'une définition formalisée est hors-programme. »
- Surface représentative d'une fonction de deux variables, courbes ou lignes de niveau.
- Utilisation des dérivées partielles premières pour évaluer une petite variation de la valeur d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 découlant de petites variations sur les variables.
- Dérivation d'une expression de la forme $f(x(t), y(t))$; Définition du gradient.
- Dérivées partielles d'ordre 2. Interspersion des dérivations (théorème de Schwarz admis).
- Pour une fonction définie sur un pavé ouvert du plan, et admettant des dérivées partielles : les dérivées partielles en un extremum s'annulent.

Exercice 1 :

Continuité et dérivées partielles des fonctions suivantes :

① f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-xy}$

② g définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par $g(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

③ φ définie sur \mathbb{R}^2 par $\varphi(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ dont on demande les dérivées partielles par rapport à μ et σ , exprimées en fonction de φ .

Exercice 2 : Gradient et variations de f

Soit f définie sur \mathbb{R}^3 par : $f(x, y, z) = 1 + x^2 + 2y^3 - 3xz + yz - z^4$.

- ① Montrer que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^3 . Calculer ses dérivées premières et secondes.
- ② Que vaut le gradient de f au point $A = (1, 1, 1)$?
- ③ Approcher les variations de f entre les points A et $(1.01, 1.02, 0.99)$.

Exercice 3 :

Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par : $f(x, y) = x^2y + \frac{x}{y^2}$.

On considère les fonctions u et v définies pour tout t réel par : $u(t) = t^2$ et $v(t) = t$.

Calculer de deux manières différentes la dérivée de g définie sur \mathbb{R}_+^* par $g(t) = f(u(t), v(t))$

Exercice 4 :

On considère la fonction V définie pour tout x et y réels positifs par : $V(x, y) = \ln(xy) - (x + y)$

- ① Montrer que V ne peut posséder un extremum qu'un seul point qu'on déterminera.
- ② Montrer que V admet un maximum strict au point trouvé.

Exercice 5 :

Dire dans chaque cas s'il existe une fonction f de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 telle que :

$$1) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x \end{cases} ; 2) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^2 + y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - y^2 \end{cases}$$