TD 19 . FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

<u>Exercice 1</u> : On regardera surtout les arguments pour justifier la continuité des fonctions. Les dérivées partielles ne devraient pas poser de difficulté, à condition d'être vigilant...

(1) Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-xy}$

- $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car produit et combinaison linéaire des fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$

[<u>Remarque</u>: ce sont les deux seules fonctions de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$ dont vous pouvez admettre la continuité ; le reste doit être justifié...]

- $(x,y) \mapsto +x.y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ par produit des deux fonctions $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
- $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}$

donc: $(x,y) \mapsto e^{-xy}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ par composition de fonctions continues.

<u>Conclusion</u> $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2 \text{ par produit de fonctions continues sur } \mathbb{R}^2.}$

[<u>Remarque</u>: On montrerait avec exactement les mêmes arguments que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ car $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$...]

<u>Calculons les dérivées partielles:</u>

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x e^{-xy} + (x^2+y^2)\times(-y e^{-xy}) \\ \qquad\qquad = [2x - y(x^2+y^2)]e^{-xy} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = [2y - x(x^2+y^2)]e^{-xy} \end{cases}$$

s'obtient par symétrie des notations.

② Soit g définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $g(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

a) Montrons que g est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

- $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ continue sur $\mathbb{R}^2$ par produit et somme de $(x,y)\mapsto x$ et $(x,y)\mapsto y$ qui sont continues sur $\mathbb{R}^2$
- Cette fonction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et prend des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Or $u : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

donc

$(x,y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par composition de fonctions continues

$$\left[\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{u} & \mathbb{R}_+^* \\ (x,y) & \longmapsto & x^2+y^2 = t & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = u(t) \end{array}\right]$$

- Dès lors :

$(x,y) \mapsto \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ car $t \mapsto \sin(t)$ continue sur $\mathbb{R}$

Conclusion g est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ par produit de $(x,y)\mapsto x^2+y^2$ et $(x,y)\mapsto \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ qui sont continues sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

b) Calculons les dérivées partielles :

[On rappelle que $\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)' = -\frac{u'/2\sqrt{u}}{u} = -\frac{u'}{2u\sqrt{u}}$]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right] = -\frac{2x}{2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\cdot \sin'\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$= -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

D'où :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x\cdot\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + (x^2+y^2)\times\left[-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\cdot\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right]$$

$$= 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Par symétrie :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

3) On reconnaît la densité de la loi normale centrée réduite qu'on souhaite dériver partiellement par rapport à μ et σ… (x est un réel quelconque, fixé)

- $(\mu,\sigma)\longmapsto (x-\mu)^2$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. En effet :
  - $(x-\mu)^2 = x^2 - 2x.\mu + \mu^2$ et $(\mu,\sigma)\longmapsto\mu$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$
  - cette fonction est donc combinaison linéaire de $(\mu,\sigma)\mapsto 1$; $(\mu,\sigma)\mapsto\mu$ et $(\mu,\sigma)\mapsto\mu^2$ qui sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

- $(\mu,\sigma)\longmapsto -\dfrac{1}{2\sigma^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$. En effet :
  - $(\mu,\sigma)\mapsto 2\sigma^2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$ par produit de $(\mu,\sigma)\mapsto\sigma$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et σ étant strictement positif [loi normale…] elle prend des valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ [$\mu\in\mathbb{R}$ et $\sigma\in\mathbb{R}_+^*$]
  - or $u : t\longmapsto -\dfrac{1}{t}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$
  - donc $(\mu,\sigma)\mapsto -\dfrac{1}{2\sigma^2}\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*)$ par composition de fonctions de classe C^1.

$$\left[\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{C^1} & \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{C^1} & \mathbb{R}_-^* \\ (\mu,\sigma) & \longmapsto & 2\sigma^2 = t & \longmapsto & -\dfrac{1}{2\sigma^2} \end{array}\right]$$

- $v : t\longmapsto e^t$ continue sur $\mathbb{R}$. Donc $(\mu,\sigma)\longmapsto \exp\left(-\dfrac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ par produit et composition de fonctions de classe C^1.
- Enfin $(\mu,\sigma)\mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*)$ comme inverse de $(\mu,\sigma)\longmapsto\sigma\sqrt{2\pi}$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ et ne s'y annule pas…

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \text{ par produit et composition de fonctions de classe } C^1.}$

4) Calculons les dérivées partielles

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\mu}\left[-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] = \dfrac{2(x-\mu)}{2\sigma^2} = \dfrac{x-\mu}{\sigma^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) = -\dfrac{(x-\mu)^2}{2}\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(\dfrac{1}{\sigma^2}\right) = -\dfrac{(x-\mu)^2}{2}\cdot\dfrac{-2\sigma}{\sigma^4} = \dfrac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) = 0 \quad\text{et}\quad \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{\sigma^2}\right)$$

On peut y aller, en repérant le produit de $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ par $e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ …

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(\mu,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial \mu}\left[e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{x-\mu}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{x-\mu}{\sigma^2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}_{=\varphi_{\mu,\sigma}(x)}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(\mu,\sigma) = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]$$

$$= -\frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \left(-\frac{1}{\sigma} + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3}\right) \cdot \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}_{=\varphi_{\mu,\sigma}(x)}$$

Conclusion $\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall (\mu,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}(x;\mu,\sigma) &= \frac{x-\mu}{\sigma^2} \varphi(x;\mu,\sigma) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}(x;\mu,\sigma) &= \frac{(x-\mu)^2-\sigma^2}{\sigma^3} \cdot \varphi(x;\mu,\sigma) \end{aligned}}$$

Exercice 2

$$f(x,y,z) = 1 + x^2 + 2y^3 - 3xz + yz - z^4.$$

① $(x,y,z) \mapsto x$; $(x,y,z) \mapsto y$ et $(x,y,z) \mapsto z$ sont trois fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ (résultat admis) donc

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3) \text{ par produit et combinaison linéaire de fonctions de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x - 3z \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 6y^2 + z \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -3x + y - 4z^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2 \,;\, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = 0 \,;\, \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = -3 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 0 \,;\, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 12y \,;\, \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = 1 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = -3 \,;\, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 1 \,;\, \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = -12z^2 \end{cases}$$

② Par définition :

$$\nabla f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) \,;\, \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) \,;\, \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) \right)$$

Conclusion $\boxed{\nabla f(1,1,1) = (-1,7,6) = \overrightarrow{\nabla f}(1,1,1) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f(A)}$

③ $\boxed{\text{Résultat fondamental}}$: on rappelle que si f est une fonction d'une variable réelle de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage d'un réel a, alors, pour h petit :

$$\underline{f(a+h) \underset{0}{\simeq} f(a) + h f'(a)} \qquad [DL_1(f) \text{ au voisinage de } a\ldots]$$

La généralisation pour les fonctions de 2 variables, de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $A = (a,b)$ est le suivant : si $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, h_1 et h_2 petits, on a,

$$\boxed{f(a+h_1, b+h_2) \simeq f(a,b) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}$$

ou encore

$$\boxed{f(a+h_1, b+h_2) \simeq f(a,b) + \underbrace{\left(\nabla f(a,b) \,\middle|\, (h_1,h_2) \right)}_{\text{produit scalaire de } \nabla f(a,b) \text{ par } \vec{H} = (h_1,h_2)}}$$

⚠ Ce résultat se généralise aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ en suivant : si $\Omega = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{H} = (h_1, \ldots, h_n)$ petit, alors

$$\boxed{f(\Omega + \vec{H}) \simeq f(\Omega) + \left(\vec{\nabla} f(\Omega) \,\middle|\, \vec{H} \right)}$$

Appliquons ce résultat à la Question ③ de l'exercice :

f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$ donc au voisinage de A.
D'où,
en prenant $\vec{H} = (0{,}01 ; 0{,}02 ; -0{,}01)$ considéré comme petit puisque $\|\vec{H}\| \simeq 0{,}024$
on a :

$$f(1{,}01 ; 1{,}02 ; 0{,}99) \simeq f(1,1,1) + \underbrace{\left(\overrightarrow{\nabla f(1,1,1)} \mid \vec{H}\right)}_{\left((-1,7,-6) \mid (0{,}01 ; 0{,}02 , -0{,}01)\right)}$$

$$= 1 - 0.01 + 7 * 0.02 - 6 * (-0.01)$$

Conclusion : $\boxed{f(1.01 ; 1.02 ; 0.99) \simeq 1{,}19}$

Remarque générale sur cet exercice : Dans le cas $n=2$,

Si f de classe C^2 au voisinage de $A = (a,b)$, alors on évalue la variation de f au voisinage de A en calculant :

$$f(A + \vec{H}) - f(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\, h_2$$
$$= \left(\overrightarrow{\nabla f}(A) \mid \vec{H}\right) \text{ où } \vec{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

(!) **Interprétation** : La variation de f dans la direction donnée par le vecteur $\vec{H}$ se mesure grâce à un produit scalaire !

$\left(\overrightarrow{\nabla f}(A) \mid \vec{H}\right)$ est nul lorsque $\vec{H}$ et $\overrightarrow{\nabla f}(A)$ sont orthogonaux et maximal lorsque $\vec{H}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\nabla f}(A)$ soit $\vec{H} = \alpha \overrightarrow{\nabla f}(A)$ si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

1er cas : Si $\vec{H}$ orthogonal à $\overrightarrow{\nabla f}(A)$, alors $f(A+\vec{H}) - f(A) = 0$ ou encore

$$f(A+\vec{H}) = f(A)$$

→ On se déplace sur une ligne de niveau !

2ème cas : Si $\vec{H} = \alpha \overrightarrow{\nabla f}(A)$, $\alpha > 0$, alors

$$\left(\overrightarrow{\nabla f}(A) \mid \vec{H}\right) = \left(\overrightarrow{\nabla f}(A), \alpha \overrightarrow{\nabla f}(A)\right) = \alpha \cdot \|\overrightarrow{\nabla f}(A)\|^2 = f(A+\vec{H}) - f(A)$$

→ On s'est déplacé selon la ligne de plus grande pente à partir de A dans le sens croissant et d'autant plus vite que la norme du gradient est grande !

Exercice 3 $f(x,y) = x^2y + \frac{x}{y^2}$

{ on commence par noter que $(x,y)\mapsto x$ et $(x,y)\mapsto y$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ donc :

- $(x,y)\mapsto x^2y \in C^1(\mathbb{R}^2)$ par produit de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
- $u : t\mapsto \frac{1}{t^2} \in C^1(\mathbb{R}^*)$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* & \xrightarrow{C^1} & \mathbb{R}^* & \xrightarrow{C^1} & \mathbb{R}^* \\ (x,y) & \longmapsto & y & \longmapsto & \frac{1}{y^2} \end{array}$$

ou encore : $(x,y)\mapsto \frac{1}{y^2}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ par composition

Donc $\boxed{f\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*) \text{ par produit, somme et composition de fonctions de classe } C^1.}$

objectif de cet exercice : Sachant que $u(t)=t^2$, $v(t)=t$ calculer $g'(t)$ $\forall t\in\mathbb{R}_+^*$ si $g(t)=f(u(t),v(t))$

RAPPEL on a au programme : la "règle de la chaîne" : si $g(t)=f(x(t),y(t))$ et g dérivable alors

$$g'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))$$
$$= \left(\vec{\nabla} f(x(t),y(t)) \mid \vec{v}(t)\right) \quad \text{où} \quad \vec{v}(t)=\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix}$$

Appliquons ce résultat

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$, $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + \frac{1}{y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - \frac{2xy}{y^4} = x^2 - \frac{2x}{y^3} \end{cases}$

$v(t) = (u'(t), v'(t)) = (2t, 1)$. Donc : >0 si $t>0$

$$\forall t>0,\ g'(t) = 2t\,.\frac{\partial f}{\partial x}(u(t),\underbrace{v(t)}_{>0}) + 1\,.\frac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t))$$
$$= 2t\,.\left[2t^3 + \frac{1}{t^2}\right] + \left(t^4 - \frac{2t^2}{t^3}\right)$$
$$= 5t^4 + \frac{2}{t} - \frac{2}{t} \Rightarrow \boxed{\forall t>0,\ g'(t) = 5t^4}$$

Mais il y avait une méthode BEAUCOUP moins calculatoire en remplaçant dès le début $u(t)$ et $v(t)$ par leurs valeurs...

$g(t) = f(u(t),v(t)) = f(t^2,t) = t^5 + 1.$

Donc, $\boxed{\forall t>0,\ g'(t) = 5t^4}$ ...

Exercice 4 $V(x,y) = \ln(xy) - (x+y)$

On commence par noter que $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ ces fonctions ne prennent que des valeurs strictement positives.
Donc
- $(x,y) \mapsto \ln(xy)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par produit et composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (puisque $t \mapsto \ln(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$...)
- $(x,y) \mapsto x+y \in \mathcal{C}^1((\mathbb{R}_+^*)^2)$ comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

conclusion : V est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ qu'on appelle un "pavé ouvert" de $\mathbb{R}^2$

RAPPEL Soit $D = I \times J$ un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$, $A = (a,b) \in D$ et $f : D \to \mathbb{R}$; $f \in \mathcal{C}^1(D)$; si f admet un extremum local en A alors $\begin{cases} \partial f/\partial x\,(a,b) = 0 \\ \partial f/\partial y\,(a,b) = 0 \end{cases}$

A est un maximum global si $f(a,b) \geq f(x,y)$ $\forall (x,y) \in D$
A est un minimum global si $f(a,b) \leq f(x,y)$ $\forall (x,y) \in D$

Appliquons ce résultat : $\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{x} - 1 \\ \dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{y} - 1 \end{cases}$

$\dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial V}{\partial y}(x,y) \iff x = y = 1$

conclusion : le seul extremum possible est en $A = (1,1)$ et vaut $V(1,1) = -2$

(2) Mq $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2$, $V(x,y) \leq -2$
ou encore : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $V(x,y) + 2 \leq 0$.

$V(x,y) + 2 = \ln(x \cdot y) - (x+y) + 2 = [\ln(x) - x] + [\ln(y) - y] + 2$

or $\forall t > 0$, $\ln(t) \leq t - 1$ [se démontre d'au moins 3 façons. TAF ; concavité de ln ou étude de $g : t \mapsto \ln(t) - t + 1$ sur $\mathbb{R}_+^*$]
donc

$V(x,y) + 2 \leq [\ln(x) - x + 1] + [\ln(y) - y + 1]$
$\leq 0 + 0 = 0.$

Donc
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^*$, $V(x,y) \leq -2 = V(1,1)$: $A = (1,1)$ est un maximum "global" (plutôt que "strict" ...)

Exercice 5 :

RAPPEL : le théorème de SCHWARZ assure que si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $D = I \times J$ ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors

$$\forall (x,y) \in D, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

/!\ on retiendra la contraposée : si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$ alors f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ en (a,b).

Appliquons ce résultat :

① $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2 \end{cases}$

Donc : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$

Conclusion : Il n'existe pas de fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ et $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$.

② $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 + y \ (L_1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - y^2 \ (L_2) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x - y^2)$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

Donc, d'après le théorème de Schwarz, f est susceptible d'exister et on va la chercher...

Résolvons le système proposé en commençant par la ligne (L_1) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 + y \Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + yx + c_1(y)$$

où c_1 est une fonction quelconque de y, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puisque f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$..

On dérive partiellement par rapport à y cette dernière égalité et on la confronte à la ligne (L_2) :

$(L_2) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + c'(y) = x - y^2 \Rightarrow c'(y) = -y^2 \Rightarrow c(y) = -\frac{y^3}{3} + K$ $(K \in \mathbb{R})$

Alors $\boxed{f(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy - \frac{y^3}{3} + K}$, $K \in \mathbb{R}$.

{on a $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et on peut vérifier $\begin{cases} \partial f / \partial x = x^2 + y \\ \partial f / \partial y = x - y^2 \end{cases}$.