Ce qu'il faut savoir faire à l'issue de la séquence...

- ◻ *déterminer les dérivées partielles premières et seconde d'une fonction de deux variables*
- ◻ *Connaître le théorème de Schwarz, interversion des dérivations*
- ◻ *Définition et calcul du gradient*
- ◻ *Utiliser les dérivées partielles premières pour évaluer une petite variation sur les variables.*
- ◻ *savoir dériver une fonction de la forme* $t \mapsto f(x(t), y(t))$.
- ◻ *Étude des extremas d'une fonction définie sur un pavé ouvert du plan.*

26 Fonctions de deux variables

Quand on étudie des grandeurs mesurables, on constate en général un lien avec *plusieurs* autres variables. Par exemple si on regarde une terrasse au soleil, la température θ de l'eau dans un lac, celle-ci va dépendre du moment t de la mesure, de la position, de la profondeur. Il est alors naturel d'introduire des fonctions de plusieurs variables et de noter :

$$\theta = f(x, y, z, t)$$

Pour simplifier, nous nous intéresserons dans ce chapitre aux fonctions de deux variables, dont les propriétés s'étendent facilement à 3 variables ou plus.

Fonction de deux variables.

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$. Une fonction

$$f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

D'autres noms de variables sont possibles, en particulier en Physique. Par exemple, on pourra trouver $f(x_1, x_2)$ ou $f(x,t)$ ou encore $f(r,\theta)$...

Exemple n° 1 • Distance d'un point à l'origine :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$$

• Surface d'un rectangle en fonction de sa largeur x et de sa longueur y

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array}$$

Parfois la fonction est donnée sans son domaine de définition. Il faut alors le déterminer. Par exemple, la fonction $f : (x,y) \mapsto \ln(x-y^2)$ est définie ssi :

$$x - y^2 > 0 \iff x > y^2$$

f est définie sur $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x > y^2\right\}$

CONTINUITÉ

Définition 1

Soit $(x_0, y_0) \in D$.
Si $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$, alors f est continue en (x_0, y_0)

f est continue sur D si elle est continue en tout (x,y) de D.

Nous ne chercherons pas à définir précisément ce que signifie la limite dans le cas d'une fonction de deux variables. Disons que si (x,y) « se rapproche » de (x_0,y_0) dans le domaine de définition alors $f(x,y)$ se rapproche de $f(x_0,y_0)$, et ce quelle que soit la façon dont on approche (par n'importe quel chemin d'approche), alors on dit que f est continue en (x_0,y_0).

Propriété 1 ***(en pratique)***

Toutes les fonctions définies par <u>une</u> formule résultat de somme, produit, quotient, composée de fonctions usuelles de x et y sera continue en tout point où celle-ci est bien définie.

Si on ne définit pas la fonction par morceaux, on pourra donc rédiger avec :
« f est bien définie sur D (à justifier) et continue comme somme, composée... de fonctions fonctions continues »

Représentations graphiques

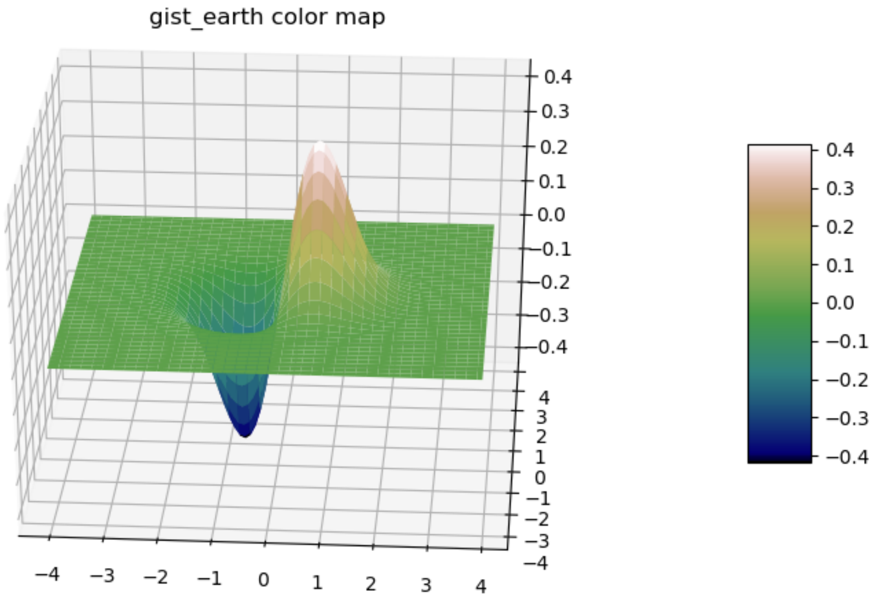
La <u>représentation graphique</u> d'une fonction de deux variable peut se faire de plusieurs façons. On ne demande pas aux étudiants de dessiner en 3D. Par contre une représentation graphique générée par ordinateur peut aider à comprendre certaines notions.

Sous forme de nappe

On représente l'ensemble $\mathcal{S}_f$ des points dans un repère de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{S}_f = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in D)\}$$

On parle alors de <u>surface représentative de f</u>.



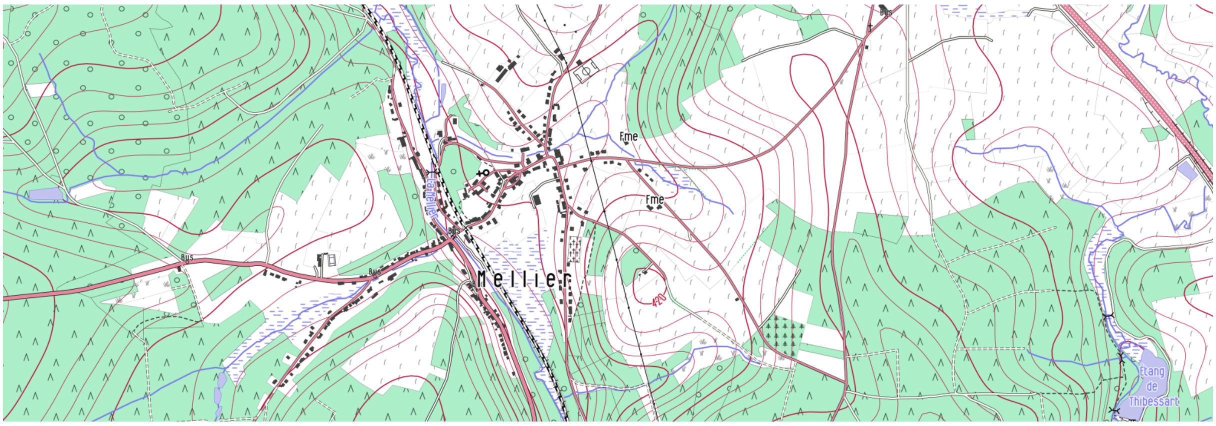
Sur une telle nappe, la continuité se traduit par la régularité de celle-ci.
La surface représentative ne présente pas de « déchirure ».
Voici le code utilisé pour cette représentation graphique (que l'on peut faire tourner avec la souris quand on exécute le script)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
def f(x, y):
    return np.sin(np.sqrt(x ** 2 + y ** 2))

x = np.arange(-4,4,0.1)
y = np.arange(-4,4,0.1)
X,Y = np.meshgrid(x,y)
Z = X*np.exp(-X**2 - Y**2)

fig = plt.figure(figsize=(10,6))
ax1 = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax1.set_title('gist_earth color map')
surf1 = ax1.plot_surface(X, Y, Z, cmap='gist_earth')
fig.colorbar(surf1, ax=ax1, shrink=0.5, aspect=5)

plt.show()
```

Courbes de niveau et carte de couleurs

On voit de nombreux exemples de ces courbes en météorologie. Par exemple, les cartes de températures, les cartes de taux d'humidité...
On peut aussi penser aux lignes de niveau des cartes topographiques IGN ou OpenStreetMap. Pour un exemple de traitement Python de données libres OpenStreetMap pour générer une carte topographique, voir :

https ://blog.champs-libres.coop/carto/2018/12/18/openardennemap.html

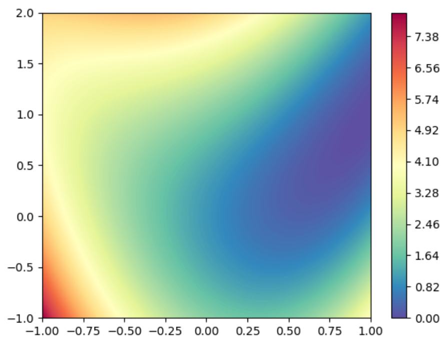


Voici un exemple de code Python et les représentations graphiques qu'il permet d'obtenir

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x,y):
    return (1-x)**2+(y-x**2)**2

x, y = np.meshgrid(np.linspace(-1,1,201),np.linspace(-1,2,201))
z = f(x,y)
```

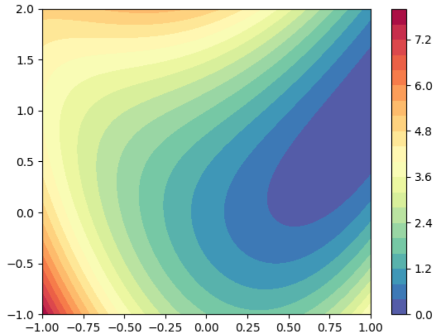
en complétant au choix avec ....

```
plt.contourf(x,y,z,500, cmap='Spectral_r
plt.colorbar()
plt.show()
```

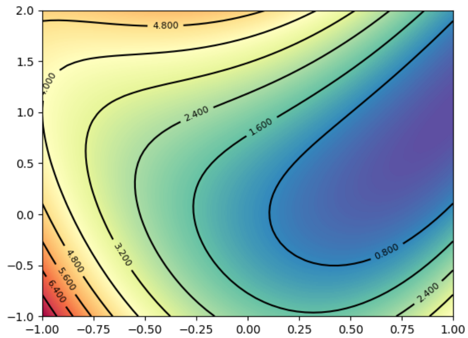


La continuité de la fonction se voit dans les dégradés de couleurs comme dans l'exemple précédent. Il est parfois plus commode, ou plus lisible, de limiter le nombre de couleurs à quelques unes. Chaque couleur représente alors un intervalle de valeurs. Les frontières sont des courbes de niveau.
Voir les deux exemples suivants.

```python
plt.contourf(x,y,z,20, cmap='Spectral_r'
plt.colorbar()
plt.show()
```




```python
plt.contourf(x,y,z,500, cmap='Spectral_r')
contours=plt.contour(x,y,z,10, colors='black')
plt.clabel(contours, inline=True, fontsize=8)
plt.show()
```



Ces codes ne sont pas à connaître par cœur.
Vous pouvez variez le nuancier en changeant `'Spectral_r'` par une expression au hasard.
Le message d'erreur vous donnera la liste des palettes disponibles.

Chaque ligne de niveau peut être vue comme l'ensemble des (x, y) solutions de l'équation $f(x, y) = a (a \in \mathbb{R})$
Par exemple, si $f(x, y) = (x-1)^2+(y+2)^2$, la ligne de niveau d'équation $f(x, y) = a$ est :
- si $a > 0$: un cercle de centre $A(1, -2)$...
- si $a = 0$: le point $A(1, -2)$...
- si $a < 0$: la ligne est vide

Les <u>lignes de niveau</u> sont définies par $\mathcal{L}_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = c\}$.
Elles sont *dans un plan* (dans tous les sens de « plan »)

Les <u>courbes de niveau</u> sont définies par $\mathcal{C}_c = \{(x, y, c) \in \mathbb{R}^3, f(x, y) = c\} = \mathcal{S}_f \cap \mathcal{P}_c$ où $\mathcal{S}_f$ est la surface représentative de f et $\mathcal{P}_c$ le plan d'équation $z = c$.
Ce sont des courbes *dans l'espace*, dont la réunion (pour tout $c \in \mathbb{R}$) est $\mathcal{S}_f$.

Fonctions partielles

On suppose que f est définie sur un domaine de la forme $I \times J$ où I et J sont des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Le domaine a alors la forme d'un rectangle sans bord appelé pavé ouvert.

Définition 2

On définit les fonctions partielles de f en fixant l'une des deux variables et en faisant varier l'autre.

• Première fonction partielle
On fixe $y \in J$.
La première fonction partielle, notée f_1, ou f_y, ou $f(\cdot, y)$ est définie par :

$$\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

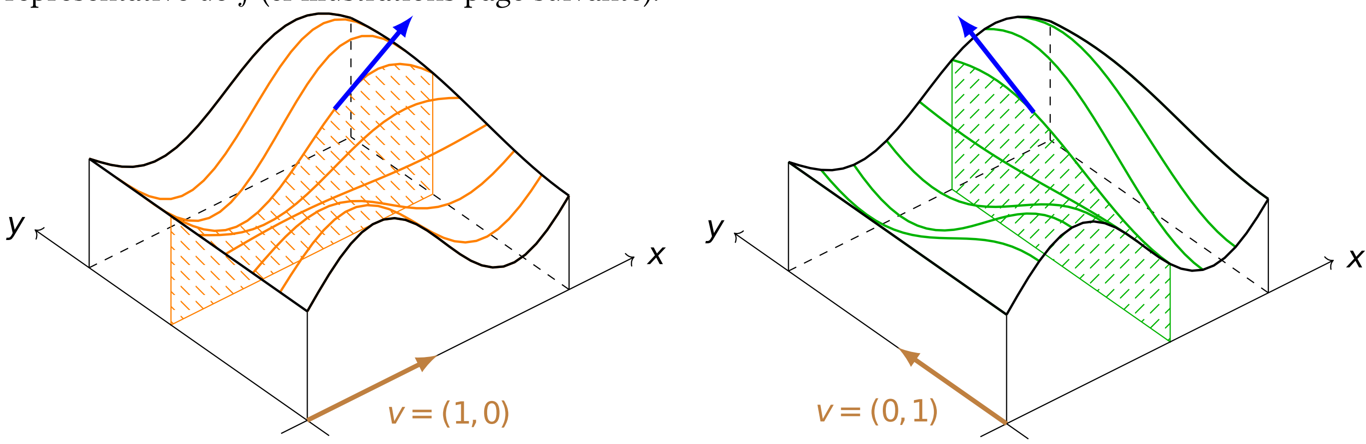
• Deuxième fonction partielle
On fixe $y \in J$.
La deuxième fonction partielle, notée f_2, ou f_x, ou $f(x, \cdot)$ est définie par :

$$\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

Les fonctions partielles, sont bien des fonctions usuelles, à une variable. On peut parler de fonctions à paramètre, voire de famille de fonction. Par exemple, pour chaque y, on a une fonction partielle f_y.

En posant $y = n \in \mathbb{N}$, on peut aussi obtenir une suite de fonctions, ...

On peut remarquer que, lorsqu'on fixe y à la valeur a, on se promène dans le plan d'équation $y = a$ et qu'en considérant différentes valeurs de a, on « coupe en tranches » la surface représentative de f (cf illustrations page suivante).



Voir aussi le fichier Geogebra

https ://www.geogebra.org/m/nvwukqgh

Calcul Différentiel

Définition 3

Soit $(x_0, y_0) \in D$. Si les fonctions partielles f_{x_0} et f_{y_0} sont respectivement dérivables en y_0 et en x_0, on appelle dérivées partielles ces dérivées et on note :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_{y_0}(x_0) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_{x_0}(y_0)$$

Autrement dit, si les limites existent,

$$\partial_1 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

et

$$\partial_2 f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Définition 4

Si f admet des dérivées partielles en tout $(x, y) \in D$, on définit les fonctions dérivées partielles

- $\partial_1 f$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}$ la dérivée partielle de f par rapport à la première variable où

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{ccc} I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{array}$$

- $\partial_2 f$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}$ la dérivée partielle de f par rapport à la deuxième variable où

$$\frac{\partial f}{\partial y} : \begin{array}{ccc} I \times J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{array}$$

Point méthode :

On obtient $\frac{\partial f}{\partial x}$ en faisant comme si y étant un paramètre constant et on dérive « normalement » par rapport à x.

De même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$, on fixe x et on dérive par rapport à y.

Exemple n° 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x^2 e^{x - y^2}$$

Donner l'expression des dérivées partielles de f.

Quelques remarques

- Les dérivées partielles sont des fonctions de deux variables.
- De même qu'on distingue f' (*fonction* dérivée) et $f'(t)$ (*nombre* dérivé de f en t), on distingue $\partial_1 f$ (fonction partielle) et $\partial_1 f(x, y)$ (nombre).
- On prononce le symbole ∂ « d rond ».

Par exemple $\frac{\partial f}{\partial x}$ se prononce : « d rond f sur d rond x »... mais il vaut mieux parler de « la dérivée partielle de f par rapport à x » ou de la « première dérivée partielle ».

• Les notations $\partial_1 f, \partial_2 f$ sont « plus mathématiques », et mettent l'accent sur la notion de fonction. Les notations $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sont « plus physiques/math appliquées » et mettent plus l'accent sur les variables. On a envie d'attribuer une unité. Par exemple si on regarde les variations de la température dans une plaque métallique, $\frac{\partial \theta}{\partial t}(x, y, t)$ pourrait être exprimée en $K.s^{-1}$, et $\frac{\partial \theta}{\partial x}(x, y, t)$ pourrait être exprimée en $K.m^{-1}$.

FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{C}^1$

Définition 5

On dit qu'une fonction f définie sur un pavé ouvert $D = I \times J \subset \mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D si elle admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ continues sur D.

En pratique, les fonctions définies par une formule unique (et pas par morceaux) seront de classe $\mathcal{C}^1$ comme somme, composées... de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Graphiquement, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ a une surface représentative sans « pli » ni « pic ».

Définition 6 ***(Gradient d'une fonction de deux variables)***

GRADIENT

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un pavé ouvert $D = I \times J$, et si $(x_0, y_0) \in D$, on appelle gradient de f en (x_0, y_0) le vecteur

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

On le note aussi $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ ou $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_0, y_0)$ et on le trouve sous forme de matrice colonne $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$.

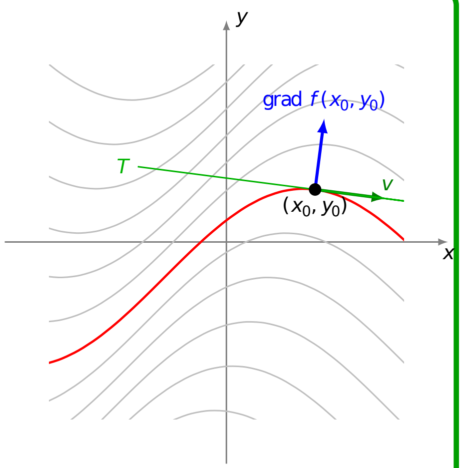


Figure 1.1 : source : exo7, Lille

ÉTUDE LE LONG D'UN CHEMIN

De la même manière qu'en mécanique, on peut définir des fonctions coordonnées x et y du temps $t \in \mathbb{R}$, de façon que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(x(t), y(t)) \in D$.
On peut alors définir la fonction :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(x(t), y(t)) \end{array}$$

On peut ainsi définir une fonction « classique » à une variable à l'aide d'une fonction de plusieurs variables.

Pour une représentation interactive dans Geogebra
https ://www.geogebra.org/m/prfwsfvu

Si les fonctions f, x et y sont continues, alors g est continue. Dans le cas de la fonction f, l'information serait donnée par l'énoncé.

Propriété 2 ***(Règle de lca chaîne)***

Si f admet des dérivées partielles, alors g est dérivable et :

$$\forall t \in \mathcal{D}, g'(t) = \boxed{x'(t) \times \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))} = \langle \vec{v}(t); \nabla f(x(t), y(t)) \rangle$$

où $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ est le vecteur vitesse au moment t et $\nabla f(x, y)$ le gradient de f au point (x, y) et $\langle \cdot\,;\cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel.

Exemple n° 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. et $g : t \mapsto f(t^2, e^t)$ définie sur $\mathbb{R}$. Exprimer $g'(t)$ en fonction de t et de f.

On peut remarquer que si $\overrightarrow{\nabla} f(x(t_0), y(t_0)) = 0$, alors $g'(t_0) = 0$. Si le chemin passe par un point auquel le gradient est nul, alors la dérivée de g s'annule (ce qui peut correspondre à un extremum local ou un point d'inflexion)

Extrema locaux

Définition 7

Soit $D = I \times J$ un pavé ouvert, $(x_0, y_0) \in D$ et $f : D \to \mathbb{R}^2$ une fonction de deux variables.

• On dit que f admet un maximum local en (x_0, y_0) s'il existe un voisinage $V \subset D$ de (x_0, y_0) tel que :

$$\forall (x, y) \in V, f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$$

Si on peut prendre $V = D$ alors on parle de maximum global.

• On dit que f admet un minimum local en (x_0, y_0) s'il existe un voisinage $V \subset D$ de (x_0, y_0) tel que :

$$\forall (x, y) \in V, f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$$

Si on peut prendre $V = D$ alors on parle de minimum global.

Propriété 3

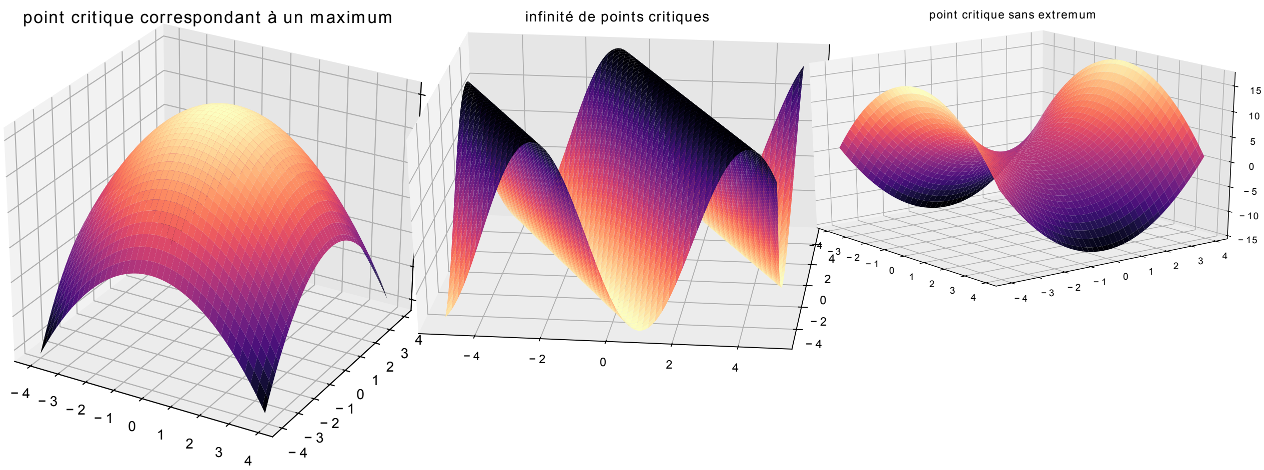
Soit D un pavé ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
Si f admet un extremum local en $(x_0, y_0) \in D$,
alors $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) = \vec{0}$, c'est à dire $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$.

Définition 8

Avec les notations précédentes,
on dit que (x_0, y_0) est un <u>point critique</u> de f si $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \vec{0}$.

On cherche donc les extrema **parmi** les points critiques.

Mais de même que pour une fonction g de une variable, si la dérivée s'annule on n'a pas nécessairement un minimum ou un maximum, tout point critique ne correspond pas nécessairement à un extremum.



Les trois nappes montrent respectivement un point critique unique correspondant à un minimum global, une infinité de points critiques, correspondant à un maximum global, un unique point critique ne correspondant à un extremum local.
Dans ce dernier cas (appelé « Point de selle »), f_x admet un maximum en 0 et f_y admet un minmum en 0.

Propriété du gradient

Dans l'exemple précédent, on remarque que si $t \mapsto (x(t), y(t))$ est un paramétrage d'un chemin de $\mathbb{R}^2$ tel que $g : t \mapsto f(x(t), y(t))$ soit constante égale à c, alors on évolue sur la courbe de niveau $\mathcal{C}_c = \{(x, y, c) \mid f(x, y) = c\}$.

De plus, comme g est constante, g' est nulle et on a $\langle \vec{v}(t); \nabla f(x(t), y(t)) \rangle = 0$

On pourrait démontrer réciproquement que l'on peut toujours trouver un tel paramétrage des lignes de niveau et on en déduit :

Propriété 4

Le gradient en un point est orthogonal aux lignes de niveau.
Le gradient montre la direction de la plus grande pente, et pointe vers les valeurs les plus élevées.

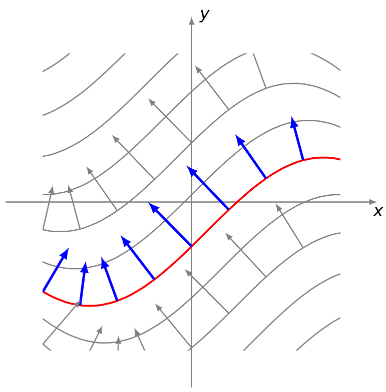


Figure 1.2 : source : exo7, Lille

Calcul différentiel d'ordre 2

Définition 9 ***(dérivées partielles d'ordre 2)***

Les dérivées partielles d'ordre 2 sont les dérivées partielles des dérivées partielles. On en a quatre.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ aussi notée $\partial_{1,1} f = \partial_1(\partial_1 f)$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ aussi notée $\partial_{1,2} f = \partial_1(\partial_2 f)$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ aussi notée $\partial_{2,1} f = \partial_2(\partial_1 f)$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ aussi notée $\partial_{2,2} f = \partial_2(\partial_2 f)$.

• Bien noter la position des exposants 2. Sur le « d ronde » dans $\partial^2 f$ et sur la variable en bas.

• L'ordre dans lequel on dérive a son importance mais est très cohérent avec les notations.

Définition 10

On dit qu'une fonction f définie sur un pavé $D \subset \mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ si elle admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues.

Propriété 5 ***(théorème de Schwarz)***

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un pavé $D \subset \mathbb{R}^2$, alors

$$\partial_{1,2} f = \partial_{2,1} f \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Exemple n° 4 Exemple issus de la physique
thermo
ondes...

Quelques exemples d'utilisation du gradient en sciences

On pourra remarquer que l'utilisation du terme est parfois différent de celui qu'on fait en mathématiques.
Par exemple, « gradient fort » désigne un gradient dont la norme est élevée dans une certaine échelle. De même, l'« intensité du gradient » renvoie à cette échelle de norme.
On peut se souvenir qu'un gradient nul correspond à un point « stationnaire »

Exemple : écoulements

source : https ://agro-transfert-bretagne.univ-rennes1.fr/Territ_Eau/CONNAISSANCES/Voies_de_transfert/ecoulement_de_nappe.asp

Les écoulements dans la nappe sont déterminés par la différence de charge entre deux points. Ainsi la mise en charge de la nappe en hiver par les pluies entraîne la formation d'un gradient hydraulique entre l'amont et l'aval (figure 10). Le gradient hydraulique correspond à la pente de la surface de la nappe. Plus ce gradient hydraulique est fort, plus la dynamique d'écoulement des eaux sera rapide.
La vitesse de circulation de l'eau dans la nappe dépend donc :
- de la porosité de drainage. Ce paramètre n'évolue pas au cours du temps, il dépend de la roche mère et de son degré d'altération.
- de l'intensité du gradient hydraulique. Comme la surface de la nappe est grosso modo parallèle à la surface du sol, le gradient est souvent assimilé à la pente topographique en première approximation. Les zones de pente élevée ont donc des gradients hydrauliques forts comparés aux zones de plateaux : l'eau y circule donc plus rapidement.
- du cumul de pluies qui augmente le gradient hydraulique.
Au sein d'un même bassin, les écoulements dans la nappe seront donc plus ou moins rapides selon la partie de la nappe considérée et les saisons.

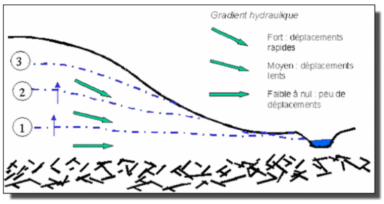


Figure 1.3 : Variations des hauteurs de la nappe au cours de l'année du fait de sa forte réactivité aux pluies et, en conséquence, des gradients hydrauliques à mi versant (flèches pleines vertes).
1 - Niveau d'été (minimum), gradient faible
2- Niveau intermédiaire plus ou moins haut selon le cumul des pluies (automne-hiver), gradient en augmentation
3- Niveau de fin d'hiver (maximum), gradient fort.

Exemple : la convection

source : https ://planet-terre.ens-lyon.fr/ressource/convection-et-geotherme.xml

Ce sont des mouvements de matière qui se produisent lorsqu'on a du matériel dense en haut et peu dense en bas : cette situation correspond à gradient de masse volumique inverse. Dans cette situation, le matériel dense du haut a tendance à descendre, et le peu dense du bas à tendance à monter. Ce gradient de densité inverse peut avoir des origines diverses (concentration de sel...), mais le plus souvent il est dû à des différences de température : chaud et peu dense en bas, froid et dense en haut.
On parle alors de convection thermique.

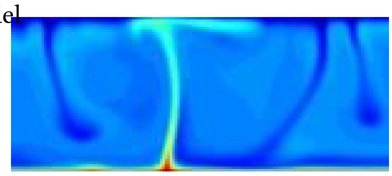


Figure 1.4 : Source - © 2001 Marylee Murphy, Supercomputing Institute, Univ. of Minnesota.

Dans cet exemple, la matière se déplace selon la direction du vecteur gradient

Droite des moindre carrés.

On se donne deux n-uplets de réels $(x_1, \cdots, x_n$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ et on cherche la droite qui « approche le mieux » les points de coordonnées (x_i, y_i).
Pour cela on cherche les coefficients a et b qui minimisent la somme

$$d(a,b) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - (ax_k + b))^2$$

On parle de « moindres carrés » on cherche les coefficients qui minimusent cette somme de carrés.

La fonction $(a,b) \mapsto d(a,b)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le pavé ouvert $\mathbb{R}^2$ et minorée par 0. Et comme $\lim\limits_{\|(a,b)\| \to +\infty} d(a,b) = +\infty$, elle admet un minimum en lequel ses dérivées partielles sont nulles.
On cherche alors les valeurs de (a,b) on a $\partial_1 d(a,b) = \partial_2 d(a,b) = 0$. Or,

$$\begin{aligned}
\partial_1 d(a,b) &= -2\sum_{k=1}^{n} x_k(y_k - (ax_k + b)) \\
\partial_1 d(a,b) &= -2\sum_{k=1}^{n} x_k(y_k - (ax_k + b)) \\
\partial_1 d(a,b) &= -2\sum_{k=1}^{n} x_k y_k + 2a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2b\sum_{k=1}^{n} x_k \\
\partial_1 d(a,b) &= -2n\overline{xy} + 2na\overline{x^2} + 2nb\bar{x}
\end{aligned}$$

et par un calcul similaire

$$\partial_2 d(a,b) = 2n\bar{y} - 2na\bar{x} - 2nb$$

On cherche donc à résoudre le système d'inconnues (a,b) :

$$\begin{aligned}
\nabla d(a,b) = (0,0) \quad &\iff \quad \begin{cases} 2na\overline{x^2} + 2nb\bar{x} &= 2n\overline{xy} \\ 2na\bar{x} + 2nb &= 2n\bar{y} \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} a\overline{x^2} + b\bar{x} &= \overline{xy} \\ a\bar{x} + b &= \bar{y} \end{cases} \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \bar{x}L_2}{\iff} \quad \begin{cases} a(\overline{x^2} - \bar{x}^2) &= \overline{xy} - \bar{x}\bar{y} \\ a\bar{x} + b &= \bar{y} \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} as_x^2 &= s_{xy} \\ a\bar{x} + b &= \bar{y} \end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{a = \frac{\mathrm{Cov}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\mathrm{Var}(\mathrm{x})} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2} \qquad b = \bar{y} - a\bar{x} = \bar{y} - \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2}\bar{x}}$$

On retrouve bien les coefficients de l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés vus dans le chapitre « Statistique descriptive bivariée ». La deuxième équation de l'étape finale de la résolution du système nous rappelle également que la droite de régression linéaire passe par le point moyen de coordonnées $(\bar{x}, \bar{y})$.

Petites variations d'une fonction

Nous avons déjà vu que, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$, autrement dit pour h suffisamment petit,

$$f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$$

Pour une fonction de deux variables, on dispose alors du théorème suivant qui, d'une certaine manière, élargit la notion de développement limité aux fonctions de deux variables.

Propriété 6

Soit D un pavé de $\mathbb{R}^2$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur D, soit $(x_0, y_0) \in D$. Pour $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned} f(x_0+h_1, y_0+h_2) &\underset{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}}{\approx} f(x_0,y_0) + \langle \nabla f(x_0,y_0), (h_1,h_2)\rangle + o\left(\|(h_1,h_2)\|\right) \\ &\underset{\substack{h_1\to 0\\ h_2\to 0}}{\approx} f(x_0,y_0) + h_1\partial_1 f(x_0,y_0) + h_2\partial_2 f(x_0,y_0) + o\left(\|(h_1,h_2)\|\right) \end{aligned}$$

On pourra donc utiliser l'approximation (moins rigoureuse), pour h_1 et h_2 petit

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) \approx f(x_0,y_0) + h_1\partial_1 f(x_0,y_0) + h_2\partial_2 f(x_0,y_0)$$

Application : Algorithme du gradient (hors programme)

https ://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_du_gradient#Minimisation_d'une_fonction_de_2_variables
On avance d'un « petit pas » dans la direction de la plus grande pente $\overrightarrow{\nabla} f$ et on répète jusqu'à atteindre le critère d'arrêt. On arrive alors (si tout s'est bien passé) à une valeur approchée d'un maximum local.

On définit $\varepsilon > 0$ et un pas $\alpha > 0$, et on part d'un point (x_0, y_0).
Tant que $\|\nabla f\| > \varepsilon$:
    $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) + \alpha \nabla f(x_k, y_k)$ (on s'écarte de α dans la direction ∇f)
Renvoyer (x_k, y_k)

Si on veut approcher le minimum, on se déplace dans le sens de $-\overrightarrow{\nabla} f$

Par exemple, la fonction $f : (x,y) \mapsto (x+1)^2 + (y-2)^2$ admet un minimum global en $(-1, 2)$.
L'algorithme de descente du gradient en Python s'écrait :

```python
def f(x,y) : return (x+1)**2+(y-2)**2
def nablaf(x,y) : return [2*(x+1),2*(y-2)]

pas = 10**(-3)
eps = 10**(-5)
x,y = 0,0
gradient = nablaf(x,y)
while gradient[0]**2 + gradient[1]**2 > eps**2 :
    gradient = nablaf(x,y)
    x,y = x-pas*gradient[0], y-pas*gradient[1]
print('le minimum est atteint environ en ',[x,y])
```

L'algorithme ne converge pas toujours. On peut voir sur la page Wikipedia quelques exemples de fonctions problématiques, et quelques pistes pour améliorer l'algorithme.

Pour approfondir/clarifier : **https ://www.youtube.com/watch ?v=0MEyDJa2GTc**

Exercices

exercice 1 d'après Bastien Marmeth

Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 des fonctions suivantes

1. $a : (x, y) \mapsto x^2y + x^2y^2 + 2xe^y$
2. $b : (x, y) \mapsto e^x + e^y - e^{xy}$
3. $c : (x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^4 + 2x^2y^2 + 3)$
4. $d : (x, y) \mapsto \cos(x + y) + \sin(x - y)$
5. $e : (x, y) \mapsto \frac{xy}{1+x^2+y^2}$
6. $f : (x, y) \mapsto \frac{e^{xy}}{\cos(xy)+2}$
7. $g : (x, y) \mapsto x\cos(y) + y\cos(x)$
8. $h : (x, y) \mapsto \arctan\left(\frac{x^2}{1+y^2}\right)$

__Proposition de corrigé__ : par Bastien Marmeth

1. $a : (x, y) \mapsto x^2y + x^2y^2 + 2xe^y$

$$\partial_1 a(x, y) = 2xy + 2xy^2 + 2e^y \qquad \partial_2 a(x, y) = x^2 + 2x^2y + 2xe^y$$

$$\partial^2_{1,1} a(x, y) = 2y + 2y^2 \qquad \partial^2_{1,2} a(x, y) = \partial^2_{2,1} a(x, y) = 2x + 4xy + 2e^y \qquad \partial^2_{2,2} a(x, y) = 2x^2 + 2xe^y$$

2. $b : (x, y) \mapsto e^x + e^y - e^{xy}$

$$\partial_1 b(x, y) = e^x - ye^{xy} \qquad \partial_2 b(x, y) = e^y - xe^{xy}$$

$$\partial^2_{1,1} b(x, y) = e^x - y^2e^{xy} \qquad \partial^2_{1,2} b(x, y) = \partial^2_{2,1} b(x, y) = -e^{xy} - yxe^{xy} \qquad \partial^2_{2,2} b(x, y) = e^y - x^2e^{xy}$$

3. $c : (x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^4 + 2x^2y^2 + 3)$

$$\partial_1 c(x, y) = \frac{4xy^2 + 2x}{y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3} \qquad \partial_2 c(x, y) = \frac{4y^3 + 4x^2y}{y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3}$$

$$\partial^2_{1,1} c(x, y) = \frac{4y^2 + 2}{y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3} - \frac{(4xy^2 + 2x)^2}{(y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3)^2}$$

$$\partial^2_{2,2} c(x, y) = \frac{12y^2 + 4x^2}{y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3} - \frac{(4y^3 + 4x^2y)^2}{(y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3)^2}$$

$$\partial^2_{1,2} c(x, y) = \partial^2_{2,1} c(x, y) = \frac{8xy}{y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3} - \frac{(4xy^2 + 2x)(4y^3 + 4x^2y)}{(y^4 + 2x^2y^2 + x^2 + 3)^2}$$

4. $d : (x, y) \mapsto \cos(x + y) + \sin(x - y)$

$$\partial_1 d(x, y) = \cos(y - x) - \sin(y + x) \qquad \partial_2 d(x, y) = -\sin(y + x) - \cos(y - x)$$

$$\partial^2_{1,1} d(x, y) = \sin(y - x) - \cos(y + x) \qquad \partial^2_{2,2} d(x, y) = \sin(y - x) - \cos(y + x)$$

$$\partial^2_{1,2} d(x, y) = \partial^2_{2,1} d(x, y) = -\cos(y + x) - \sin(y - x)$$

5. $e : (x,y) \mapsto \frac{xy}{1+x^2+y^2}$

$$\partial_1 e(x,y) = \frac{y\left(y^2-x^2+1\right)}{\left(y^2+x^2+1\right)^2} \qquad \partial_2 e(x,y) = -\frac{x\left(y^2-x^2-1\right)}{\left(y^2+x^2+1\right)^2}$$

$$\partial^2_{1,1} e(x,y) = -\frac{2xy\left(3y^2-x^2+3\right)}{\left(y^2+x^2+1\right)^3} \qquad \partial^2_{2,2} e(x,y) = \frac{2xy\left(y^2-3x^2-3\right)}{\left(y^2+x^2+1\right)^3}$$

$$\partial^2_{1,2} e(x,y) = \partial^2_{2,1} e(x,y) = -\frac{y^4-6x^2y^2+x^4-1}{\left(y^2+x^2+1\right)^3}$$

6. $f : (x,y) \mapsto \frac{e^{xy}}{\cos(xy)+2}$

$$\partial_1 f(x,y) = \frac{ye^{xy}\left(\sin(xy)+\cos(xy)+2\right)}{\left(\cos(xy)+2\right)^2} \qquad \partial_2 f(x,y) = \frac{xe^{xy}\left(\sin(xy)+\cos(xy)+2\right)}{\left(\cos(xy)+2\right)^2}$$

$$\partial^2_{1,1} f(x,y) = \frac{2y^2e^{xy}\left(\sin(xy)^2+\cos(xy)\sin(xy)+2\sin(xy)+\cos(xy)^2+3\cos(xy)+2\right)}{\left(\cos(xy)+2\right)^3}$$

$$\partial^2_{2,2} f(x,y) = \frac{2x^2e^{xy}\left(\sin(xy)^2+\cos(xy)\sin(xy)+2\sin(xy)+\cos(xy)^2+3\cos(xy)+2\right)}{\left(\cos(xy)+2\right)^3}$$

$$\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = \frac{2xye^{xy}\sin(xy)^2}{\left(\cos(xy)+2\right)^3} + \frac{2xye^{xy}\sin(xy)}{\left(\cos(xy)+2\right)^2} + \frac{e^{xy}\sin(xy)}{\left(\cos(xy)+2\right)^2} + \frac{xye^{xy}}{\cos(xy)+2} + \frac{e^{xy}}{\cos(xy)+2} + \frac{xye^{xy}\cos(xy)}{\left(\cos(xy)+2\right)^2}$$

7. $g : (x,y) \mapsto x\cos(y) + y\cos(x)$

$$\partial_1 g(x,y) = \cos(y) - y\sin(x) \qquad \partial_2 g(x,y) = \cos(x) - x\sin(y)$$

$$\partial^2_{1,1} g(x,y) = -y\cos(x) \qquad \partial^2_{1,2} g(x,y) = \partial^2_{2,1} g(x,y) = -\sin(x) - \sin(y) \qquad \partial^2_{2,2} g(x,y) = -x\cos(y)$$

8. $h : (x,y) \mapsto \arctan\left(\frac{x^2}{1+y^2}\right)$

$$\partial_1 h(x,y) = \frac{2x\left(y^2+1\right)}{y^4+2y^2+x^4+1} \qquad \partial_2 h(x,y) = -\frac{2x^2y}{y^4+2y^2+x^4+1}$$

$$\partial^2_{1,1} h(x,y) = \frac{2\left(y^2+1\right)\left(y^4+2y^2-3x^4+1\right)}{\left(y^4+2y^2+x^4+1\right)^2} \qquad \partial^2_{2,2} h(x,y) = \frac{2x^2\left(3y^4+2y^2-x^4-1\right)}{\left(y^4+2y^2+x^4+1\right)^2}$$

$$\partial^2_{1,2} h(x,y) = \partial^2_{2,1} h(x,y) = -\frac{4xy\left(y^2-x^2+1\right)\left(y^2+x^2+1\right)}{\left(y^4+2y^2+x^4+1\right)^2}$$

---

exercice 2 Délimiter le domaine de définition puis tracer les lignes de niveau des fonctions données par :

1. $f_1 : (x,y) \mapsto \ln(1-x^2+y)$.

2. $f_2 : (x,y) \mapsto 1+\sqrt{x-y^2}$.

3. $f_3 : (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{x^2+y^2}$.

__Proposition de corrigé__ :to do

exercice 3 d'après Bastien Marmeth

Déterminer les positions des éventuels extrema des fonctions dans $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = x^2y - 6y^2 - 3x^2$$

Proposition de corrigé : par Bastien Marmeth

On veut déterminer les points critique de $f(x,y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y$. Pour cela on calcule d'abord ses dérivées partielles

$$\partial_1 f(x,y) = 2x + 3y - 6 \qquad \partial_2 f(x,y) = 3x + 6y + 3$$

Déterminons maintenant les points où $\partial_1 f(x,y) = \partial_2 f(x,y) = 0$
On obtient le système

$$(S) \quad : \quad \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 3x + 6y = -3 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ -x = -15 \end{cases}$$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = -24 \\ -x = -15 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -8 \\ x = 15 \end{cases}$$

Ainsi $(15, -8)$ est l'unique point critique de f (il s'agit ici d'un minimum mais les outils pour le prouver ne sont pas au programme).
On veut ensuite déterminer les points critique de $g(x,y) = x^2y - 6y^2 - 3x^2$. Pour cela on calcule d'abord ses dérivées partielles

$$\partial_1 g(x,y) = 2xy - 6x \qquad \partial_2 g(x,y) = x^2 - 12y$$

Déterminons maintenant les points où $\partial_1 g(x,y) = \partial_2 g(x,y) = 0$
On obtient le système

$$(S) \quad : \quad \{\, 2xy - 6x = 0x^2 - 12y = 0$$

$$(S) \Leftrightarrow \{\, 2x(y-3) = 0x^2 = 12y$$

Si $x = 0$ alors, comme $y = \frac{x^2}{12}$, $y = 0$. Si $x \neq 0$ alors nécessairement $y = 3$ et $x = 6$ ou $x = -6$.
Ainsi g admet trois points critiques qui sont $(0,0)$, $(-6,3)$ et $(6,3)$.

exercice 4 d'après Bastien Marmeth

On s'intéresse à la température sur une fine plaque de métal, on note $T(x, y)$ la température au point (x, y). On suppose que la plaque occupe tout le premier quadrant de $\mathbb{R}^2$, c'est à dire la partie $x > 0, y > 0$ et que la fonction température est $T(x, y) = xy$. On appelle courbes isothermes les lignes de niveau de la fonction température, tous les points sur une même courbe isotherme sont à la même température.

1. Tracer les isothermes $T = 1, T = 2$ et $T = 3$
2. On dépose une fourmi au point $(1, 4)$, cette fourmi se déplace de sorte que la température sur son chemin soit constante. Quel va être le chemin de la fourmi et quelle est la température le long du chemin

Proposition de corrigé : par Bastien Marmeth

1.

figure

2. La fourmi va se déplacer à température constante donc sur une courbe isotherme, en particulier elle se déplace sur la courbe isotherme $T = 4$, la température le long de son chemin sera donc de 4.

figure

exercice 5 *équation d'une corde vibrante* d'après Bastien Marmeth

On considère une corde de longueur L que l'on suppose fixée entre les points $x = 0$ et $x = L$. On va écarter la corde de sa position initiale dans le plan Oxy, la lâcher et tenter de modéliser son mouvement au cours du temps.

Le paramètre x désigne donc la position le long de l'axe Ox, t désigne le temps. Au point x et au temps t, $y = y(x, t)$ désigne la position de la corde au dessus de x.

Ainsi, pour x fixé, $y = y(x, t)$ décrit le mouvement du point de la corde au dessus de x au cours du temps, et $\frac{\partial y}{\partial t}(x, t)$ désigne la vitesse de ce point et $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t)$ son accélération.

On peut démontrer (avec quelques hypothèses appropriées) que ce mouvement est décrit par une *équation aux dérivées partielles* donnée par

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

où c est une constante positive dépendant des caractéristiques physiques de la corde.

1. Montrer que $y : (x, t) \mapsto \sin(x - ct)$ est une solution de l'équation.
2. Plus généralement, montrer que pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, alors les fonctions $y : (x, t) \mapsto f(x + ct)$ et $y : (x, t) \mapsto f(x - ct)$ satisfont l'équation.

3. Montrer que tout tout $\omega \in \mathbb{R}$, $y : (x,t) \mapsto \sin(c\omega t)\sin(\omega x)$ satisfait l'équation.

4. Montrer que si deux fonctions y_1 et y_2 satisfont l'équation, il en est de même de toutes les combinaisons linéaires $(x,t) \mapsto \alpha_1 y_1(x,t) + \alpha y_2(x,t)$ avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition de corrigé : par Bastien Marmeth

1. Calculons les dérivées partielles $\partial^2_{2,2} y(x,t)$ et $\partial^2_{1,1} y(x,t)$

$$\partial_2 y(x,t) = -c\,\cos(x-ct) \qquad \partial^2_{2,2} y(x,t) = -c^2 \sin(x-ct)$$

$$\partial_1 y(x,t) = \cos(x-ct) \qquad \partial^2_{1,1} y(x,t) = \sin(x-ct)$$

Ainsi on a bien

$$\partial^2_{2,2} y(x,t) = c^2 \partial^2_{1,1} y(x,t)$$

C'est à dire $y(x,t) = \sin(x-ct)$ est une solution de l'équation.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On pose $y_1(x,t) = f(x+ct)$ et $y_2(x,t) = f(x-ct)$. Calculons les dérivées partielles au second ordre de y_1 et y_2.
Pour y_1 on a

$$\partial_2 y_1(x,t) = cf'(x+ct) \qquad \partial^2_{2,2} y_1(x,t) = c^2 f''(x+ct)$$

$$\partial_1 y_1(x,t) = f'(x+ct) \qquad \partial^2_{1,1} y_1(x,t) = f''(x+ct)$$

Ainsi on a bien

$$\partial^2_{2,2} y_1(x,t) = c^2 \partial^2_{1,1} y_1(x,t)$$

De même pour y_2 on a

$$\partial_2 y_2(x,t) = -cf'(x-ct) \qquad \partial^2_{2,2} y_2(x,t) = c^2 f''(x-ct)$$

$$\partial_1 y_2(x,t) = f'(x-ct) \qquad \partial^2_{1,1} y_2(x,t) = f''(x-ct)$$

Et donc

$$\partial^2_{2,2} y_2(x,t) = c^2 \partial^2_{1,1} y_2(x,t)$$

En conclusion $y_1 : (x,t) \mapsto f(x+ct)$ et $y_2 : (x,t) \mapsto f(x-ct)$ satisfont l'équation.

3. Soit $\omega \in \mathbb{R}$. On va, comme aux questions précédentes calculer les dérivées secondes de y.

$$\partial_2 y(x,t) c\omega \cos(c\omega t)\sin(\omega x) \qquad \partial^2_{2,2} y(x,t) = -c^2\omega^2 \sin(c\omega t)\sin(\omega x)$$

$$\partial_1 y(x,t) = \omega \sin(c\omega t)\cos(\omega x) \qquad \partial^2_{1,1} y(x,t) = -\omega^2 \sin(c\omega t)\sin(\omega x)$$

Ainsi on a bien

$$\partial^2_{2,2} y(x,t) = c^2 \partial^2_{1,1} y(x,t)$$

Donc $y : (x,t) \mapsto \sin(c\omega t)\sin(\omega x)$ satisfait l'équation.

4. Soit deux fonctions $y_1(x,t)$ et $y_2(x,t)$ qui satisfont l'équation. Soit α_1 et α_2 deux réels. On pose $z(x,t) = \alpha_1 y_1(x,t) + \alpha y_2(x,t)$.
Calculons les dérivées secondes de z.

$$\partial_2 z(x,t) = \alpha_1 \partial_2 y_1(x,t) + \alpha_2 \partial_2 y_2(x,t) \qquad \partial^2_{2,2} z(x,t) = \alpha_1 \partial^2_{2,2} y_1(x,t) + \alpha_2 \partial^2_{2,2} y_2(x,t)$$

$$\partial_1 z(x,t) = \alpha_1 \partial_1 y_1(x,t) + \alpha_2 \partial_1 y_2(x,t) \qquad \partial^2_{1,1} z(x,t) = \alpha_1 \partial^2_{1,1} y_1(x,t) + \alpha_2 \partial^2_{1,1} y_2(x,t)$$

Or, on sait que $y_1(x,t)$ et $y_2(x,t)$ satisfont l'équation. Ainsi

$$\partial^2_{2,2}y_1(x,t) = c^2\partial^1_{1,1}y_1(x,t)$$

$$\partial^2_{2,2}y_2(x,t) = c^2\partial^2_{1,1}y_2(x,t)$$

On a alors

$$\partial^2_{2,2}z(x,t) = \alpha_1\partial^2_{2,2}y_1(x,t) + \alpha_2\partial^2_{2,2}y_2(x,t) = \alpha_1c^2\partial^1_{1,1}y_1(x,t) + \alpha_2c^2\partial^2_{1,1}y_2(x,t) = c^2\partial^2_{1,1}z(x,t)$$

La fonction $z(x,t) = \alpha_1 y_1(x,t) + \alpha y_2(x,t)$ satisfait donc l'équation.

---

exercice 6 d'après Bastien Marmeth

La figure suivante représente les lignes de niveau d'une fonction f.

Conjecturez le signe des dérivées partielles $\partial_1 f(x_0, y_0)$ et $\partial_2 f(x_0, y_0)$ et expliquez votre raisonnement.

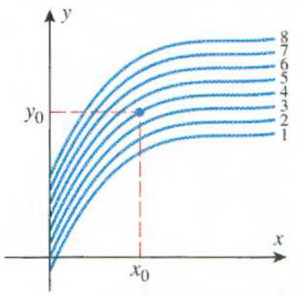


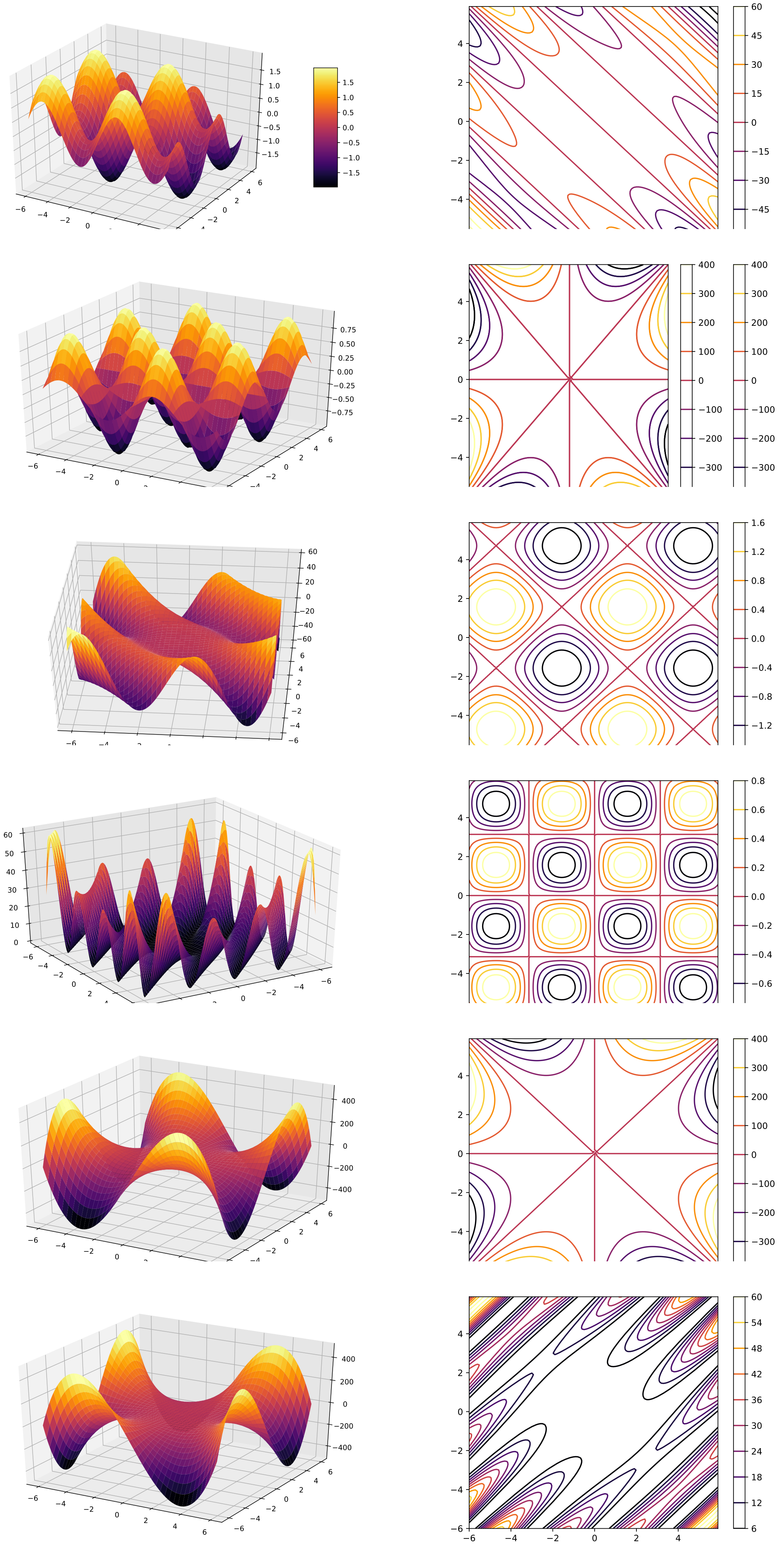
Figure 1.5 :

Proposition de corrigé : par Bastien Marmeth

La dérivée partielle selon la première coordonnée $\partial_1 f(x_0, y_0)$ représente la variation de f lorsque l'on fait varier uniquement x.
Ici on voit sur le graphe que, si x augmente, alors la valeur prise par $f(x, y_0)$ diminue (on passe de la valeur 4 à une valeur comprise entre 4 et 3). Ainsi $\partial_1 f(x_0, y_0)$ est négative.
De même la dérivée partielle selon le seconde coordonnée $\partial_2 f(x_0, y_0)$ représente la variation de f lorsque l'on fait varier uniquement y.
Ici on voit sur le graphe que si y augmente, alors la valeur de $f(x_0, y)$ augmente (on passe de la valeur 4 à une valeur comprise entre 4 et 5). Ainsi $\partial_2 f(x_0, y_0)$ est positive.

---

exercice 7 Sur la page suivante, associer chacune des surface 3D avec ses lignes de niveau.



exercice 8 d'après Bastien Marmeth

Les questions se rapportent aux courbes de niveau suivantes

1. Lequel des deux points A et B est le plus haut ?

2. Lequel des deux points A et B est sur la pente la plus raide ?

3. Partant de A et se déplaçant de sorte que y reste constant et x croisse, l'altitude va-t-elle d'abord croître ou décroître ?

4. Partant de B et se déplaçant de sorte que y reste constant et x croisse, l'altitude va-t-elle d'abord croître ou décroître ?

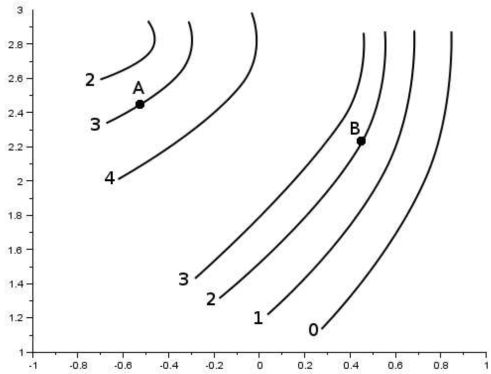


Figure 1.6 :

5. Partant de A et se déplaçant de sorte que x reste constant et y décroisse, l'altitude va-t-elle d'abord croître ou décroître ?

6. Partant de B et se déplaçant de sorte que x reste constant et y décroisse, l'altitude va-t-elle d'abord croître ou décroître ?

Proposition de corrigé : par Bastien Marmeth

1. Le point A est le plus haut.
2. Le point B est sur la pente la plus raide.
3. Partant de A et se déplaçant de sorte que y reste constant et x croisse, l'altitude va d'abord croître.
4. Partant de B et se déplaçant de sorte que y reste constant et x croisse, l'altitude va d'abord décroître.
5. Partant de A et se déplaçant de sorte que x reste constant et y décroisse, l'altitude va d'abord croître.
6. Partant de B et se déplaçant de sorte que x reste constant et y décroisse, l'altitude va d'abord décroître.

exercice 9 d'après Bastien Marmeth

On dit qu'une fonction f de classe C^2 à deux variables satisfait *l'équation de Laplace* si on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles très importante intervenant dans la modélisation de beaucoup de phénomènes.

Montrer que les fonctions $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$ et $f(x,y) = e^x \sin(y) + e^y \cos(x)$ satisfont cette équation.

Proposition de corrigé : par Bastien Marmeth

Soit $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$. On veut montrer que f vérifie l'équation de Laplace. Calculons les dérivées partielles de f

$$\partial_1 f = 2x + 2y \qquad \partial_2 f = -2y + 2x$$

$$\partial^2_{1,1} f = 2 \qquad \partial^2_{2,2} f = -2$$

Ainsi

$$\partial^2_{1,1} f(x,y) + \partial^2_{2,2} f(x,y) = 2 + (-2) = 0$$

f vérifie donc l'équation de Laplace

Soit $f(x,y) = e^x \sin(y) + e^y \cos(x)$. On veut montrer que f vérifie l'équation de Laplace. Calculons les dérivées partielles de f

$$\partial_1 f = e^x \sin(y) - e^y \sin(x) \qquad \partial_2 f = e^x \cos(y) + e^y \cos(x)$$

$$\partial^2_{1,1} f = e^x \sin(y) - e^y \cos(x) \qquad \partial^2_{2,2} f = -e^x \sin(y) + e^y \cos(x)$$

Ainsi

$$\partial^2_{1,1} f(x,y) + \partial^2_{2,2} f(x,y) = e^x \sin(y) - e^y \cos(x) - e^x \sin(y) + e^y \cos(x) = 0$$

f vérifie donc l'équation de Laplace.

exercice 10 d'après Bastien Marmeth

Mathématiques pour les sciences de la vie et de l'environnement (Boularas, Fedon, Petit)

Des espèces d'insectes ont été inventoriées dans plusieurs milieux sur une colline calcaire, selon une échelle de dynamique végétale ν depuis la pelouse sèche (valeur 1) jusqu'au sous-bois (valeur 6) et la hauteur h en cm de la végétation herbacée (entre 5 et 40 cm).
Le nombre NBI d'espèces d'insectes est modélisé par la fonction

$$NBI(\nu, h) = -0,466\nu^2 + 2,960\nu - 0,00655h^2 + 0,34625h + 1,08725.$$

1. A l'aide de Python, représenter cette fonction par un graphe en dimension 3.
2. Quelle est la valeur du milieu où l'on attend la plus grande richesse en espèce d'insectes ?
3. Quelle est cette richesse maximale ?
4. En un point quelconque $M(\nu, h)$, quelle est la direction dans laquelle la fonction NBI varie le plus vite ? Quelle est la valeur $f(\nu, h)$ de cette variation maximale ?
5. Étudier les positions des éventuels extremums de cette fonction f.

<u>*Proposition de corrigé*</u> : par Bastien Marmeth

1.
2. On cherche les points critiques de la fonction $NBI(\nu, h)$, c'est à dire les points où son vecteur gradient est nul. On a

$$\nabla NBI(\nu, h) = \begin{pmatrix} -0.932\nu + 2.96 \\ -0.0131h + 0.34625 \end{pmatrix}$$

Ainsi le seul point critique est le point $\left(\frac{740}{233}, \frac{6925}{262}\right) \simeq (3.17597, 26.4313)$. Si la richesse en espèces d'insectes atteint un maximum, ce sera forcement en ce point. Vérifions toutefois qu'il s'agit bien d'un maximum.
La courbe nous incite à penser qu'il s'agit bien d'un maximum local.

3. La richesse maximale vaut $NBI\left(\frac{740}{233}, \frac{6925}{262}\right) = \frac{5061249433}{488368000} \simeq 10.363598$
4. On sait que la direction dans laquelle NBI varie le plus vite est la direction du vecteur gradient, c'est à dire

$$\frac{1}{\|\nabla NBI\|}\nabla NBI = \frac{1}{\sqrt{(-0.932\nu + 2.96)^2 + (-0.0131h + 0.34625)^2}}\begin{pmatrix} -0.932\nu + 2.96 \\ -0.0131h + 0.34625 \end{pmatrix}$$

La valeur de cette variation maximale correspond à la norme du vecteur gradient, à savoir $f(\nu, h) = \sqrt{(-0.932\nu + 2.96)^2 + (-0.0131h + 0.34625)^2}$

5. On rappelle qu'étudier les extrema d'une fonction de la forme $f = \sqrt{g}$ est équivalent à étudier les extrema de la fonction g. Ici on pose donc $g(\nu, h) = (-0.932\nu + 2.96)^2 + (-0.0131h + 0.34625)^2$.
Calculons ∇g

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2 \times (-0.932) \times (-0.932\nu + 2.96) \\ 2 \times (-0.0131) \times (-0.0131h + 0.34625) \end{pmatrix}$$

∇g ne s'annule qu'au point $\left(\frac{740}{233}, \frac{6925}{262}\right) \simeq (3.17597, 26.4313)$ qui est donc le seul point où f atteint éventuellement un extremum (il s'avère ici que f admet un minimum local en ce point)

exercice 11 d'après Bastien Marmeth

Dans la suite, on considère un potentiel ϕ dans le plan (c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et on pose

$$\phi(x,y) = x^2 - y^2.$$

Les lignes de niveau $\phi = c \quad (c \in \mathbb{R})$ sont les *équipotentielles*. Si ϕ est un potentiel électrostatique, ϕ donne lieu au champ électrique $E = -\nabla\phi$. Si ϕ est la température, $\nabla\phi$ est le gradient de température.

1. Déterminer la direction et l'intensité du champ électrique au point $(2,1)$.

2. Déterminer la direction dans laquelle la température décroît le plus vite au point $(-3,2)$.

3. Calculer le taux de changement de la température en fonction de la distance au point $(1,2)$ dans la direction du vecteur $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j}$.

<u>*Proposition de corrigé :*</u> par Bastien Marmeth

1. On sait que la direction du champ électrique est la direction du vecteur gradient, c'est à dire

$$\frac{1}{\|\nabla\phi\|}\nabla\phi = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2}}\begin{pmatrix}2x\\-2y\end{pmatrix}$$

   Au point $(2,1)$ on obtient

$$\frac{1}{\|\nabla\phi\|}\nabla\phi(2,1) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$$

   La valeur de cette variation maximale correspond à la norme du vecteur gradient, à savoir $2\sqrt{5}$.

2. La direction dans laquelle la température décroît le plus vite au point $(-3,2)$ est la direction opposée au vecteur gradient, c'est à dire

$$-\frac{1}{\|\nabla\phi\|}\nabla\phi = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2}}\begin{pmatrix}-2x\\2y\end{pmatrix}$$

   Au point $(-3,2)$ on obtient

$$\frac{1}{\|\nabla\phi\|}\nabla\phi(-3,2) = \frac{1}{2\sqrt{13}}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$$

3. Le taux de changement de la température en fonction de la distance au point $(1,2)$ dans la direction $3\vec{i} - \vec{j}$ est défini par

$$\langle(3,-1);\nabla\phi(2,1)\rangle = 3\times 2 + (-1)\times(-4) = 10$$

exercice 12 Modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra

Dans les années qui suivirent la première guerre mondiale, les quantités de sardines péchées dans l'Adriatique avaient considérablement diminuées alors que, dans le même temps, ont observait une recrudescence des requins. Or, les années de guerre avaient contraint les pécheurs à réduire leur activité et on pouvait s'attendre à ce que cette réduction bénéficie aux sardines plutôt qu'aux requins !

Pour décrire et comprendre ce phénomène Vito Volterra et Alfred Lotka proposèrent le modèle simple suivant :

• On considère deux espèces : proies en quantité $x > 0$ et prédateurs en quantité $y > 0$.

• On suppose que les prédateurs se nourrissent exclusivement des proies. Les proies bénéficient de ressources illimités.

Le modèle le plus simple consiste à supposer que les taux de croissance *per capita* de chaque espèce sont des fonctions affines $y \mapsto a - by$ pour les proies et $x \mapsto dx - c$ pour les prédateurs, avec $(a, b, c, d) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$.

Ces hypothèses expriment les propriétés qualitatives suivantes :

• sans prédateurs, les proies prospéreraient avec taux de croissance $a > 0$ mais celui-ci décroit proportionnellement au nombre de prédateurs.

• sans proies, les prédateurs déclineraient avec un taux de croissance de $-b$ (avec $b > 0$) mais plus il y a de proies, plus les prédateurs prospèrent et on augmente le taux de dx.

Cela conduit au système différentiel :

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(cx - d) \end{cases} \qquad (\mathcal{VL})$$

On admettra que, pour tout $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, il existe un unique couple de fonctions x et y tel que telle que $x(0), y(0) = (x_0, y_0)$

1. Soit $H : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^2)^2, H(x, y) = cx - d\ln(x) + by - a\ln(y)$$
Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de H.

2. Montrer que, si (x, y) est un couple de fonctions solution du système différentiel $(\mathcal{VL})$, alors il existe une ligne de niveau de H contenant tous les $(x(t), y(t))$ ($t > 0$).

3. Adapter les codes Python vus dans le cours pour afficher les ligne de niveau de H.
On prendra `a, b, c, d = 0.5, 0.3, 0.2, 0.1`.

4. ($\star\star$) En s'inspirant des méthodes d'Euler, écrire un code Python représentant les courbes représentatives de x et de y dans un même repère. Adapter le code pour retrouver les lignes de niveau.

<u>*Proposition de corrigé*</u> :

1. On a, pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

$$\partial_1 H(x,y) = c - \frac{d}{x} \qquad \partial_2 H(x,y) = b - \frac{a}{y}$$

2. Posons $f(t) = H(x(t), y(t))$, on a alors, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= x'(t)\left(c - \frac{d}{x(t)}\right) + y'(t)\left(b - \frac{a}{y(t)}\right) \\ &= x(t)(a - by(t))\left(c - \frac{d}{x(t)}\right) + y(t)(cx(t) - d)\left(b - \frac{a}{y(t)}\right) \\ &= (a - by(t))(cx(t) - d) + (cx(t) - d)(by(t) - a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto H(x(t), y(t))$ est constante, ainsi le point $(x(t), y(t))$ appartient toujours à la courbe de niveau $H(x_0, y_0)$ de la fonction H.

3.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
a, b, c, d = 0.5, 0.3, 0.2, 0.1
def f(x,y):
    return c*x-d*np.log(x)+b*y-a*np.log(y)
X, Y = np.linspace(0,2,201),np.linspace(0,5,201)
x, y = np.meshgrid(X,Y)
z = f(x,y)

contours=plt.contour(x,y,z,40, cmap='Vega20')
plt.show()
```

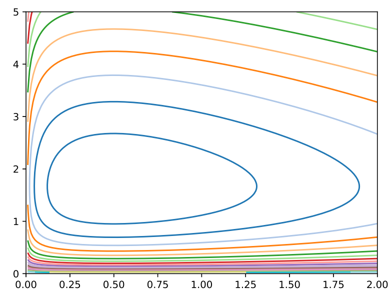


Figure 1.7 :

4.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a, b, c, d = 0.5, 0.3, 0.2, 0.1

# ---- initialisations --------
x = 1
y = 1
t = 0
T = [t] ; X=[x] ; Y=[y]

# ---- méthode d'Euler --------
N = 2000 # nombre d'itération
h = 0.1 # pas
for k in range(N):
    x = x + h*x*(a-b*y) ; X.append(x)
    y = y + h*y*(c*x-d) ; Y.append(y)
    t += h ; T.append(t)

# ---- affichage
plt.plot(T,X)
plt.plot(T,Y)
plt.show()
```

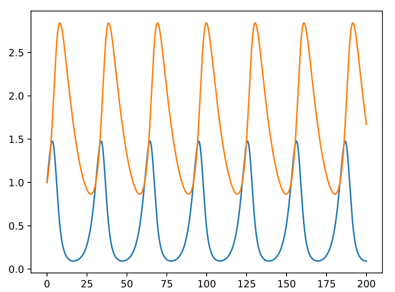


Figure 1.8 :

Quand on représente x et y en fonction du temps, On voit les cycles. Une augmentation du nombre de prédateurs précède une diminution du nombre de proies, qui entraîne une diminution du nombre de prédateurs, qui permet la prospérité des proies, d'où une augmentation du nombre de prédateurs et on repart pour un tour.
Dans la représentation par lignes de niveaux, on voit qu'un déséquilibre des popolations aboutit à des cycles très amples (en réalité cela peut amener l'extinction de l'espèce). On devine l'existence d'un point d'équilibre.
On peut déterminer celui-ci. Si on suppose que l'on est dans un état d'équilibre, x et y sont constantes donc leurs dérivées nulles et les populations x_e et y_e d'équilibre vérifient :

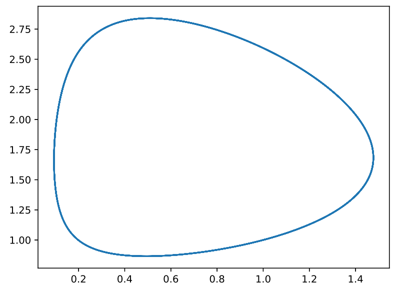


Figure 1.9 :

$$\begin{cases} 0 = x_e(a - by_e) \\ 0 = y_e(cx_e - d) \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = ax_e - bx_ey_e \\ 0 = cx_ey_e - dy_e \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = x_e(a - by_e) \\ 0 = y_e(cx_e - d) \end{cases} \iff \begin{cases} y_e = \frac{a}{b} \\ x_e = \frac{d}{c} \end{cases} \quad \text{car } x > 0 \text{ et } y > 0$$

Pour représenter le cycle, il suffit de remplacer les deux `plt.plot` par `plt.plot(X,Y)`

On trouve dans la littérature spécialisée de nombreuses études expérimentales mettant en évidence des oscillations temporelles dans des populations présentant des interactions de type proies-prédateurs. Par exemple l'évolution des populations de loups et d'élans dans le parc naturel de l'Isle Royale étudiée depuis plus de 50 ans colle relativement bien au modèle. Il faut toutefois se garder de penser que le modèle est parfait et s'applique de manière universelle : un exemple classique de dynamique proie-prédateurs est celui qui concerne l'évolution des populations de lynx et de lièvres des neiges au Canada ; estimée à partir des registres des ventes de peaux de la Compagnie de la baie d'Hudson dont les données montrent clairement des oscillations. Mais une étude plus approfondie de ces données montre que les oscillations du lynx précèdent celles du lièvre et se font dans le sens opposé du modèle de Lotka-Volterra ; comme si le lièvre était le prédateur du lynx ! Cela nous montre qu'il faut bien sur se garder d'une utilisation trop rapide des modèles mathématiques ; mais surtout que l'intérêt de ces modèles réside plus dans leur pouvoir à interroger la réalité qu'à la décrire.
Même si le modèle de Lotka Volterra ne pas être universellement utilisé pour modéliser les évolutions de populations il n'est pas pour autant inutile puisqu'il a été adapté avec succès pour modéliser des évolutions de concentrations d'espèce chimiques dans des réactions oscillantes ou encore la modélisation des réseaux de neurones.