25 Équations Différentielles

CE QU'IL FAUT SAVOIR FAIRE À L'ISSUE DE LA SÉQUENCE...

- ☐ *Revoir la première partie du cours sur les équations différentielles à coefficients constants.*
- ☐ *Résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients non constants et à second membre non constant, avec ou sans conditions initiales.*
- ☐ *Résoudre une équation linéaire du second ordre à coefficients constants et à second membre non constant, avec ou sans conditions initiales.*
- ☐ *Résoudre de façon approchée avec la méthode d'Euler dans un programme Python.*

Les équations différentielles sont omniprésentes en modélisation de phénomènes physiques. Par exemple, la vitesse de charge d'un condensateur à un instant t dépend de sa charge au même moment t. La croissance d'une population dépend du nombre d'individu (le nombre de naissances est proportionnel au nombre d'individus), ou encore les lois de Newton mettent en relation l'accélération (dérivée seconde de la position) avec les forces s'appliquant au système, dont certaines comme les frottements dépendent de la vitesse...

Dans la suite, nous noterons généralement $y, y', y'', y^{(3)}$ ... la fonction inconnue et ses dérivées successives. La variable par rapport à laquelle on dérive sera généralement le temps t, parfois une autre variable x.

Dans tous les cours, « EDL » signifie « équation différentielle linéaire »

Définitions et principes généraux

Équation différentielle du premier ordre

Définition 1

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une relation de la forme :

$$\forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = f(t) \qquad (E_1)$$

souvent simplement notée :

$$y' + a(t)y = f(t) \qquad (E_1)$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, a et f deux fonctions données définies sur I.

$f(t)$ est appelé second membre de l'équation différentielle.

Exemple n° 1 En sciences Physiques, la charge q d'un condensateur soumis à une tension $f(t)$ suit l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}q(t) = f(t)$$

Le nombre d'atomes N d'atomes radioactifs qui se sont désintégrés au temps t vérifie une équation différentielle de la forme :

$$N'(t) = \lambda N(t)$$

...

Équations différentielles du second ordre

Définition 2

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants une relation de la forme :

$$\forall t \in I, y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t) \qquad (E_2)$$

souvent simplement notée

$$y'' + ay' + by = f(t) \qquad (E_2)$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, a et f deux fonctions données définies sur I.

$f(t)$ est appelé second membre de l'équation différentielle.

Exemple n° 2 Oscillateurs
En Physique, on rencontre souvent des grandeurs oscillantes (masse sur ressort, pendules, circuit RLC et, plus généralement, de nombreux phénomènes périodiques)
Tous vérifient une équation présentant une forme commune :

$$y'' + 2\lambda y' + \omega^2 y = f(t)$$

ω est la pulsation propre du système et λ le coefficient d'amortissement (correspond aux « frottements » ou tout facteur empêchant la variation de y). Si $f \neq 0$ on parle d'oscillations forcées.

Résolution d'une équation différentielle

Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions y dérivables sur I et vérifiant la relation (E).

On parle parfois aussi d'intégrer une équation différentielle. En effet, nous verrons que les cas qui nous intéressent sont en lien étroit avec la recherche de primitives.

Définition 3 ***(Problème de Cauchy)***

Soit a et b deux fonctions réelles de la variable réelle, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Le problème

$$(\mathcal{P}) : \quad \begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

est appelé un problème de Cauchy.

De même, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, c une fonction réelle de la variable réelle, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{R}^2$, le problème

$$(\mathcal{P}) : \quad \begin{cases} y'' + ay' + by = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

Il est important que les deux conditions initiales portent sur le même instant t_0.

est aussi appelé un problème de Cauchy.

Propriété 1

On peut démontrer que dans les cas définis dans la définition précédente, un problème de Cauchy admet une unique solution.

Principe de superposition

Propriété 2 ***(Principe de superposition pour les équations de degré 1)***

Soit a, b_1 et b_2 trois fonctions réelles de la variable réelle et soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
Soit y_1 une solution de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b_1(t)$
et soit y_2 une solution de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b_2(t)$.

Alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de $y' + a(t)y = \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$.

Soit a, b_1 et b_2 trois fonctions réelles de la variable réelle et soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
Soit y_1 une solution de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b_1(t)$
et soit y_2 une solution de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b_2(t)$.
Soit alors $f = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$. On a $f' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2'$.
D'où, pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(t) + a(t)f(t) &= \lambda_1 y_1'(t) + \lambda_2 y_2'(t) + a(t)\left(\lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)\right) \\ &= \lambda_1\left(y_1'(t) + a(t)y_1(t)\right) + \lambda_2\left(y_2'(t) + a(t)y_2(t)\right) \\ &= \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t) \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est bien une solution de $y' + a(t)y = \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$.

Propriété 3 ***(Principe de superposition pour les équations de degré 2)***

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, c_1 et c_2 deux fonctions réelles de la variable réelle et soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
Soit y_1 une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c_1(t)$
et soit y_2 une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c_2(t)$.

Alors $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est une solution de $y'' + ay' + by = \lambda_1 c_1(t) + \lambda_2 c_2(t)$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, soit c_1 et c_2 deux fonctions réelles de la variable réelle et soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.
Soit y_1 une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c_1(t)$ et soit y_2 une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c_2(t)$.
Soit alors $f = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$. On a $f' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2'$ et $f'' = \lambda_1 y''_1 + \lambda_2 y''_2$.
D'où, pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f''(t) + af'(t) + bf(t) &= \lambda_1 y''_1(t) + \lambda_2 y''_2(t) + a\left(\lambda_1 y_1'(t) + \lambda_2 y_2'(t)\right) + b\left(\lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)\right) \\ &= \lambda_1\left(y_1''(t) + ay_1'(t) + by_1(t)\right) + \lambda_2\left(y_2''(t) + ay_2'(t) + by_2(t)\right) \\ &= \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t) \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est bien une solution de $y'' + ay' + by = \lambda_1 b_1(t) + \lambda_2 b_2(t)$.

Le principe de superposition est très utile en physique et en particulier en mécanique. Considérons une solide de masse M soumis à deux forces $\overrightarrow{F_1}(t)$ et $\overrightarrow{F_2}(t)$ que l'on suppose colinéaires à l'axe Ox. Le solide est alors en mouvement rectiligne et sa position au cours du temps $x(t)$ vérifie le principe fondamental de la dynamique

$$Mx''(t) = F_1(t) + F_2(t)$$

Il est parfois compliqué de résoudre cette équation différentielle. Toutefois le principe de superposition nous dit qu'il suffit de résoudre les équations différentielles

$$Mx''(t) = F_1(t) \qquad \text{et } Mx''(t) = F_2(t)$$

et d'additionner les solutions.

Le principe de superposition nous donne des propriétés remarquables sur la structure des ensembles de solutions

Propriété 4

Soit $(\mathcal{H})$ une équation différentielle linéaire homogène. Notons $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$. Alors $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel

On peut être un peu plus précis, si $(\mathcal{H})$ est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre k alors $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension k

Propriété 5 ***(Structure de l'ensemble des solutions)***

Soit $(\mathcal{E})$ une équation différentielle linéaire et $(\mathcal{H})$ l'équation homogène associée. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$. Soit y_0 une solution de $(\mathcal{E})$ alors

$$\mathcal{S} = \{y_0 + y \ , \ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}\}$$

De manière prosaïque cela signifie que l'on obtient les solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ en additionnant une solution particulière de $(\mathcal{E})$ aux solutions de $(\mathcal{H})$

Ce résultat est valable pour les équation différentielles linéaires d'ordre 1 et 2.

- Cas des équations différentielle linéaire d'ordre 1.

  Soit a et b deux fonctions réelles de la variable réelle. On considère l'équation différentielle

  $$y' + a(t)y = b(t)$$

  et son équation homogène associée

  $$y' + a(t)y = 0$$

  Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$.
  Soit y_0 une solution particulière de $(\mathcal{E})$.
  Soit y une solution de $(\mathcal{H})$ alors, d'après le principe de superposition, $y + y_0$ est une solution de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t) + 0$, c'est-à-dire de $(\mathcal{E})$.
  Ainsi

  $$\{y_0 + y \ , \ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}\} \subset \mathcal{S}$$

  Soit maintenant f une solution de $(\mathcal{E})$ et $g = f - y_0$. D'après le principe de superposition, $g = f - y_0$ est une solution de l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t) - b(t)$, c'est-à-dire de $(\mathcal{H})$.
  Ainsi, comme $f = y_0 + g$, f s'exprime bien comme la somme de la solution particulière y_0 et d'une solution de $(\mathcal{H})$.
  D'où

  $$\mathcal{S} \subset \{y_0 + y \ , \ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}\}$$

  Et donc

  $$\mathcal{S} = \{y_0 + y \ , \ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}\}$$

- Cas des équations différentielle linéaire d'ordre 2.
  Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et c une fonction réelle de la variable réelle. On considère l'équation différentielle

  $$y'' + ay' + by = c(t)$$

  et son équation homogène associée

  $$y'' + ay' + by = 0$$

  Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$.
  Soit y_0 une solution particulière de $(\mathcal{E})$.
  Soit y une solution de $(\mathcal{H})$ alors, d'après le principe de superposition, $y + y_0$ est une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c(t) + 0$, c'est-à-dire de $(\mathcal{E})$.
  Ainsi

  $$\{y_0 + y \ , \ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}\} \subset \mathcal{S}$$

  Soit maintenant f une solution de $(\mathcal{E})$ et $g = f - y_0$. D'après le principe de superposition, $g = f - y_0$ est une solution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c(t) - c(t)$, c'est-à-dire de $(\mathcal{H})$.

Ainsi, comme $f = y_0 + g$, f s'exprime bien comme la somme de la solution particulière y_0 et d'une solution de $(\mathcal{H})$.
D'où

$$\mathcal{S} \subset \{y_0 + y \ , \ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}\}$$

Et donc

$$\mathcal{S} = \{y_0 + y \ , \ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}\}$$

Méthode

On en déduit une méthode pour résoudre les équations différentielle linéaire

- S'il n'est pas imposé, on détermine le domaine de définition de l'équation.
- On résoud l'équation homogène $(\mathcal{H})$ (par une méthode que l'on verra plus loin)
- On trouve une solution particulière de $(\mathcal{E})$.
- On obtient la forme générale des solutions de $(\mathcal{E})$ en additionnant notre solution particulière à la forme générale des solutions de $(\mathcal{H})$.

Résolution des EDL du premier ordre

Résolution d'une équation homogène

Propriété 6 ***(cas d'une équation homogène)***

On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad y' + a(t) = 0 \qquad (\mathcal{E}_0)$$

avec a et f des fonctions continues sur I

Comme a est continue sur I, elle admet une primitive A.
Les solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sont les fonctions de la forme :

$$y(t) = C\mathrm{e}^{-A(t)} \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Preuve :

Posons $z : t \mapsto \mathrm{e}^{A(t)}y(t)$ est définie sur I et, comme $\mathrm{e}^{A(t)} \neq 0$,

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (\mathcal{E}_0) &\iff \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in I, \mathrm{e}^{A(t)}y'(t) + a(t)\mathrm{e}^{A(t)}y(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in I, z'(t) = 0 \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall t \in I, z(t) = C \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall t \in I, y(t) = C\mathrm{e}^{-A(t)} \end{aligned}$$

Pour une version « à la physicienne » (mais non rigoureuse), on peut « séparer les variables » :

$$\begin{aligned} y' + a(t)y = 0 &\iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a(t)y = 0 \\ &\iff \frac{\mathrm{d}y}{y} = -a(t)\,\mathrm{d}t \\ &\iff \ln|y| = -A(t) + cte \\ &\iff |y| = C\exp(-A(t)) \\ &\iff y = C\exp(-A(t)) \qquad \text{(car } C \text{ peut être négatif)} \end{aligned}$$

RECHERCHE D'UNE SOLUTION PARTICULIÈRE POUR LES EDL À COEFFICIENTS CONSTANTS

Dans le cas des EDL d'ordre 1 **à coefficients constants**, on peut anticiper la forme d'une solution particulière en remarquant que certaines familles de fonctions sont « stables par dérivation ».

On s'intéresse ici aux EDL de la forme

$$y' + ay = f(x) \text{ avec } a \neq 0 \text{ constante}$$

famille de f	**forme de la solution particulière y_p**
$f : x \mapsto P(x)$ polynômiale	$y_p : x \mapsto Q(x)$ polynômiale de même degré que P
$f : x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{mx}$ avec $m \neq -a$	$y_p : x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{mx}$ avec Q polynômiale de même degré que P
$f : x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{mx}$ avec $m = -a$	$y_p : x \mapsto Q(x)\mathrm{e}^{mx}$ avec $\deg Q = \deg P + 1$
$f : x \mapsto A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$	$y_p : x \mapsto \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

Exemple n° 3 Résoudre $y' + 2y = x^2$

Les solutions de $(\mathcal{E}_H)$ sont les $x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-2x}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p : x \mapsto ax^2 + bx + c$. On a alors $y_p'(x) = 2ax + b$ et

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } \mathcal{E} &\iff 2ax + b + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 \\ &\iff (2a)x^2 + (2b + 2a)x + (b + 2c) = x^2 \\ &\iff \begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $y_p : x \mapsto \frac{1}{2}(x^2 - x)$ est une solution particulière et l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est :

$$\boxed{\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 1); \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

Exemple n° 4 Résoudre $y' - y = (x + 1)\mathrm{e}^x$

Les solutions de $(\mathcal{E}_H)$ sont les $x \mapsto \lambda\mathrm{e}^x$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

On cherche une solution particulière de la forme $y_p : x \mapsto (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^x$. On a alors $y_p'(x) = (ax^2 + (2a + b)x + b + c)\mathrm{e}^x$ et

$$\begin{aligned} y_p \text{ est solution de } \mathcal{E} &\iff (ax^2 + (2a + b)x + b + c)\mathrm{e}^x - (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^x = (x + 1)\mathrm{e}^x \\ &\iff 2ax + b = x + 1 \\ &\iff \begin{cases} 2a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $y_p : x \mapsto (\frac{1}{2}x^2 + x)\mathrm{e}^x$ est une solution particulière et l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est :

$$\boxed{\left\{x \mapsto \lambda\mathrm{e}^x + (\tfrac{1}{2}x^2 + x)\mathrm{e}^x; \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

Recherche d'une solution particulière : cas général

Dans le cas d'une EDL du premier ordre à coefficients non constants, on dispose d'une méthode pour calculer une solution particulière.

Propriété 7 ***(méthode dite« de la variation de la constante »)***

On considère l'équation différentielle

$$\forall t \in I, \quad y' + a(t) = f(t) \qquad (\mathcal{E})$$

avec a et f des fonctions continues sur I

Comme a est continue sur I, elle admet une primitive A. Il existe une solution particulière de la forme :

$$\forall t \in I, y_p(t) = C(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$$

où $C : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I.

Exemple n° 5 Résoudre l'équation différentielle $ty' + 2y = \sqrt{t} \quad (\mathcal{E})$ sur $I =]0; +\infty[$

1 *on présente l'équation différentielle sous forme standard.*
Sur I,

$$(\mathcal{E}) \iff y' + \frac{2}{t}y = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

2 *on identifie la fonction a, on mentionne sa continuité puis on détermine une primitive.*
La fonction $a : t \mapsto \frac{2}{t}$ est continue sur I et $A : t \mapsto 2\ln t$ est une primitive de a.

3 *On résoud l'équation homogène associée.*
Les solutions de l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$ sont les fonctions de la forme :

$$\forall t \in I, y(t) = C\mathrm{e}^{-A(t)} \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

4 *On détermine une solution particulière :*
D'après la méthode de la variation de la constante, il existe une solution particulière sous la forme

$$\forall t \in I, y_p(t) = C(t)\mathrm{e}^{-A(t)} \text{ avec } C \text{ une fonction dérivable sur } I$$

On effectue les calculs jusqu'à trouver l'expression de $C(t)$ puis une expression de $y_p(t)$ en fonction de t.

5 *Conclusion générale*
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ est :

$$\left\{t \mapsto C\mathrm{e}^{-A(t)} + y_p(t) \;\middle|\; C \in \mathbb{R}\right\}$$

Quand on commence à avoir l'oeil pour les dérivées de produits, on peut directement remarquer

$$ty' + 2y = \sqrt{t} \iff t^2y' + 2ty = t^{\frac{3}{2}} \iff (t^2y)' = t^{\frac{3}{2}} \iff t^2y(t) = \frac{5}{2}t^{\frac{5}{2}} \ldots$$

ce qui peut faire gagner un peu de rédaction

Exemple n° 6 Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{t}{t-1}y = \frac{e^{3t}}{t-1}$.

On se place sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$.
On note $\mathcal{H}_1$ l'équation homogène associée $y' + \frac{t}{t-1}y = 0$.
Pour $t > 1$, on a $\frac{t}{t-1} = 1 + \frac{1}{t-1}$. Ainsi $t \mapsto t + \ln(t-1)$ est une primitive de $t \mapsto \frac{t}{t-1}$ sur I.

L'ensemble de solutions de $\mathcal{H}_1$ sur I est donc

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_1} = \left\{t \mapsto Ce^{-t-\ln(t-1)}\ ,\ C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{t \mapsto \frac{Ce^{-t}}{t-1}\ ,\ C \in \mathbb{R}\right\}$$

On va maintenant chercher une solution particulière à $\mathcal{E}_1$ sous la forme $f : t \mapsto \frac{C(t)e^{-t}}{t-1}$ (→ *méthode de la variation de la constante).*
Cela revient à résoudre

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad C'(t) = (t-1)e^t \frac{e^{3t}}{t-1} = e^{4t}$$

Il suffit donc de prendre $C : t \mapsto \frac{e^{4t}}{4}$ (→ *n'importe quelle primitive convient).*
Notre solution particulière est alors $t \mapsto \frac{C(t)e^{-t}}{t-1}$, i.e. $t \mapsto \frac{e^{3t}}{4t-4}$.

Finalement l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_1$ sur $]1, +\infty[$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_1} = \left\{t \mapsto \frac{e^{3t}}{4(t-1)} + \frac{C^e - t}{t-1}\ ,\ C \in \mathbb{R}\right\}$$

Exemple n° 7 Résoudre $y' - \frac{2}{x}y = x^2$

On se place sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.
On note $\mathcal{H}_2$ l'équation homogène associée $y' - \frac{2}{x}y = 0$.
$x \mapsto -2\ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto -\frac{2}{x}$ sur I

L'ensemble de solutions de $\mathcal{H}_2$ sur I est donc

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_2} = \left\{x \mapsto Ce^{2\ln(x)}\ ,\ C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto Cx^2\ ,\ C \in \mathbb{R}\right\}$$

Cherchons une solution particulière à l'équation avec second membre
sous la forme $x \mapsto C(x)x^2$.
Cela revient à résoudre :$\forall x > 0, \qquad C'(x) = \frac{x^2}{x^2} = 1$.
Il suffit de prendre $C : x \mapsto x$. Notre solution particulière est alors $x \mapsto x^3$.

Finalement l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_2$ sur $]0, +\infty[$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_2} = \left\{x \mapsto x^3 + Cx^2\ ,\ C \in \mathbb{R}\right\}$$

***Exemple* n° 8** Résoudre $y' + y = \sin(x)$

On note $\mathcal{H}_3$ l'équation homogène associée $y' + y = 0$
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène est alors

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_3} = \{x \mapsto C\mathrm{e}^{-x}\ ,\ C \in \mathbb{R}\}$$

cherchons une solution particulière à l'équation différentielle avec second membre $y' + y = \sin(x)$ sous la forme $y \mapsto K(x)\mathrm{e}^{-x}$.
On a alors, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) = y'(x) + y(x) = K'(x)\mathrm{e}^{-x} - K(x)\mathrm{e}^{-x} + K(x)\mathrm{e}^{-x} = K'(x)\mathrm{e}^{-x}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
K(x) &= \int_0^x \mathrm{e}^t \sin(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \left[\mathrm{e}^t \sin(t)\right]_0^x - \int_0^x \mathrm{e}^t \cos(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^x \sin(x) - \int_0^x \mathrm{e}^t \cos(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^x \sin(x) - \left(\left[\mathrm{e}^t \cos(t)\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^t \sin(t)\ \mathrm{d}t\right) \\
&= \mathrm{e}^x \sin(x) - \mathrm{e}^x \cos(x) + 1 - K(x)
\end{aligned}$$

D'où, pour $x \in \mathbb{R}$

$$K(x) = \frac{\mathrm{e}^x \sin(x) - \mathrm{e}^x \cos(x) + 1}{2}$$

Une solution particulière de $y' + y = \sin(x)$ est donc

$$y : x \mapsto K(x)\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{i.e.} \qquad y : x \mapsto \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = \sin(x)$ est ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_3} = \left\{x \mapsto \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} + K\mathrm{e}^{-x}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}$$

Si on remarquait que l'équation différentielle est à coefficients constants, on pouvait directement chercher une solution particulière de la forme $x \mapsto A\cos x + B\sin x$. Cela pouvait épargner quelques calculs !

EDL du 2ème ordre avec second membre

Résolution de l'équation homogène (rappel)

Propriété 8

Les solutions générales de l'EDL homogène $y'' + ay' + by = 0$ dépendent du signe du discriminant Δ de l'équation caractéristique associée :$r^2 + ar + b = 0$.

- Si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles r_1 et r_2 et
$$y_h(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Si $\Delta = 0$, il y a une racine double $r_0 \in \mathbb{R}$.
$$y_h(t) = e^{r_0 t}(\lambda_1 t + \lambda_2) \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

- Si $\Delta < 0$, il y a deux racines conjuguées $z_1 = \alpha + i\beta$ et $z_1 = \alpha - i\beta$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
$$y_h(t) = e^{\alpha t}(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)) \qquad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$$

Détermination d'une solution particulière

- On trouve une solution évidente, souvent une constante, une fonction usuelle ou une fonction étudiée au préalable dans le problème.
- On cherche une solution « du même type que le second membre », en général l'énoncé vous guide sur la direction dans laquelle orienter votre recherche.

Exemple n° 9 Résoudre $y'' + y = x^2$.

Le second membre est un polynôme de degré 2, on va chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2.
Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P'(x) + P(x) = ax^2 + bx + c + 2a$$
P est donc solution de notre équation si $a = 1$, $b = 0$ et $c = -2$. Ainsi $P : x \mapsto x^2 - 2$ est une solution particulière de l'équation avec second membre.
On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation
$$\mathcal{S}_1 = \{x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) + x^2 - 2\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Exemple n° 10 Résoudre $y'' + 2y' + y = x^4$.

Le second membre est un polynôme de degré 4, on va chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 4.
Soit $P : x \mapsto ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, où $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$. On a alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P''(x) + 2P'(x) + P(x) = ax^4 + (8a + b)x^3 + (12a + 6b + c)x^2 + (6b + 4c + d)x + 2c + 2d + e$$
P est donc solution de notre équation si $a = 1$, $b = -8$, $c = 36$, $d = -96$ et $e = 120$. Ainsi $P : x \mapsto x^4 - 8x^3 + 36x^2 - 96x + 120$ est une solution particulière de l'équation avec second membre
On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation
$$\mathcal{S}_2 = \{x \mapsto x^4 - 8x^3 + 36x^2 - 96x + 120 + (Ax + B)e^{-x}\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Exemple n° 11 Résoudre $y'' - 5y' + 6y = \mathrm{e}^{4t}$

Le second membre est une exponentielle, on va alors chercher une solution sous la forme $t \mapsto K\mathrm{e}^{4t}$
Soit $K \in \mathbb{R}$ et $f : t \mapsto K\mathrm{e}^{4t}$. Alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f''(t) - 5f'(t) + 6f(t) = (16 - 5 \times 4 + 6)\, K\mathrm{e}^{4t} = 2K\mathrm{e}^{4t}$$

f est donc solution de notre équation si $K = \frac{1}{2}$; Ainsi $f : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{4t}}{2}$ est une solution particulière de l'équation
On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{4t}}{2} + A\mathrm{e}^{2t} + B\mathrm{e}^{3t} \ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exemple n° 12 Résoudre $y'' - 5y' + 6y = \mathrm{e}^{2t}$

Là encore le second membre est une exponentielle, toutefois ici tester des fonctions de la forme $t \mapsto K\mathrm{e}^{2t}$ n'a aucune chance d'aboutir (ce sont des solutions de l'équation homogène).
On va alors chercher une solution sous la forme $f : t \mapsto Kt\mathrm{e}^{2t}$.
Soit $K \in \mathbb{R}$ et $f : t \mapsto Kt\mathrm{e}^{2t}$, on a alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f''(t) - 5f'(t) + 6f(t) = (4 + 4t)K\mathrm{e}^{2t} - 5(1 + 2t)Ke2t + 6Kt\mathrm{e}^{2t} = -K\mathrm{e}^{2t}$$

f est donc solution de notre équation si $K = -1$. Ainsi $f : t \mapsto -t\mathrm{e}^{2t}$ est une solution particulière de l'équation avec second membre.
On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation

$$\mathcal{S}_4 = \{ t \mapsto -t\mathrm{e}^{2t} + A\mathrm{e}^{2t} + B\mathrm{e}^{3t} \ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Exemple n° 13 Résoudre $y'' + 4y = \cos(3t)$

Le second membre est une fonction trigonométrique, on va chercher une solution sous la forme $t \mapsto C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)$.
Soit $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ et $f : t \mapsto C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t)$, on a alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f''(t) + 4f(t) = -5C_1 \cos(3t) - 5C_2 \sin(3t)$$

f est donc solution de notre équation si $C_1 = -\frac{1}{5}$ et $C_2 = 0$. Ainsi $f : t \mapsto -\frac{\cos(3t)}{5}$ est une solution particulière de l'équation avec second membre.
On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation

$$\mathcal{S}_5 = \left\{ -\frac{\cos(3t)}{5} + A\cos(2t) + B\sin(2t) \ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Exemple n° 14 Résoudre $y'' + 4y = \sin(2t)$

Là encore le second membre est une fonction trigonométrique, toutefois tester des fonctions de la forme $t \mapsto C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$ n'a aucune chance d'aboutir (ce sont des solutions de l'équation homogène). On va alors chercher une solution sous la forme $t \mapsto C_1 t \cos(2t) + C_2 t \sin(2t)$.

Soit $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ et $f : t \mapsto C_1 t \cos(2t) + C_2 t \sin(2t)$, on a alors, pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f''(t) + 4f(t) &= -4tC_1 \cos(2t) - 4C_1 \sin(2t) - 4tC_2 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t) + 4C_1 t \cos(2t) + 4C_2 t \sin(2t) \\ &= -4C_1 \sin(2t) + 4C_2 \cos(2t) \end{aligned}$$

f est donc solution de notre équation si $C_1 = -\frac{1}{4}$ et $C_2 = 0$; Ainsi $f : t \mapsto -\frac{t\cos(2t)}{4}$ est une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre.

On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation

$$\mathcal{S}_6 = \left\{ t \mapsto -\frac{t\cos(2t)}{4} + A\cos(2t) + B\sin(2t) \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, on note d le degré de P. Soit $\mathcal{E}$ l'équation différentielle

$$\mathcal{E} : \qquad y'' + ay' + by = P(t)$$

Alors il existe une solution particulière de $\mathcal{E}$ de la forme $t \mapsto Q(t)$ où Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à $d + 2$.

Soit $(a, b, \alpha, m) \in \mathbb{R}^4$ et $\mathcal{E}$ l'équation différentielle

$$\mathcal{E} : \qquad y'' + ay' + by = \alpha e^{mt}$$

Soit $P = X^2 + aX + b$ le polynôme caractéristique de $\mathcal{E}$.

- Si m n'est pas une racine de P alors il existe une solution particulière de $\mathcal{E}$ de la forme $t \mapsto Ce^{mt}$ avec C une constante réelle à déterminer.
- Si m est une racine simple de P alors il existe une solution particulière de $\mathcal{E}$ de la forme $t \mapsto Cte^{mt}$ avec C une constante réelle à déterminer.
- Si m est une racine double de P alors il existe une solution particulière de $\mathcal{E}$ de la forme $t \mapsto Ct^2e^{mt}$ avec C une constante réelle à déterminer.

Soit $(a, b, \alpha, \beta, \omega) \in \mathbb{R}^5$ et $\mathcal{E}$ l'équation différentielle

$$\mathcal{E} : \qquad y'' + ay' + by = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)$$

Soit $P = X^2 + aX + b$ le polynôme caractéristique de $\mathcal{E}$.

- Si $i\omega$ n'est pas une racine de P alors il existe une solution particulière de $\mathcal{E}$ de la forme $t \mapsto C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$ avec C_1 et C_2 deux constantes réelles à déterminer.
- Si $i\omega$ est une racine simple de P alors il existe une solution particulière de $\mathcal{E}$ de la forme $t \mapsto C_1 t \cos(\omega t) + C_2 t \sin(\omega t)$ avec C_1 et C_2 deux constantes réelles à déterminer.
- Il n'est possible que $i\omega$ soit une racine double de P.

Modèles d'évolution de population

Modèle Malthusien

Dans ce modèle, on suppose que la croissance N' de la population est proportionnelle à la population N, ce qui donne l'EDL du premier ordre :

$$N'(t) = rN(t)$$

Si on prend comme condition initiale $N(0) = N_0$, on trouve comme unique solution

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{rt}$$

On constate que l'effectif diverge rapidement vers $+\infty$. Le modèle est donc faux. En effet, on suppose que le sureffectif ou le sous-effectif n'a pas d'impact sur la reproduction. Or, on peut constater que le manque d'espace, de ressources, le stress lié à la surpopulation... limitent mécaniquement l'augmentation d'une population. (par exemple, une colonie bactérienne dans une boîte de Petri remplira rapidement la boîte et stagnera)

Modèle logistique (de Verhulst)

Si on considère qu'une population maximale K ne peut être dépassée, on peut aussi moduler le facteur r de croissance par un facteur de la forme $\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$, de sorte que plus la population se rapproche de K, plus le facteur $r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$ se rapproche de 0. A l'inverse, si la population est faible par rapport à la capacité de l'écosystème (c'est à dire si $N(t) \ll K$), le facteur est proche de r et on retrouve le modèle malthusien. L'équation différentielle obtenue alors est :

$$N'(t) = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t) \qquad (\mathcal{V})$$

Elle n'est pas linéaire (présence de N^2). On peut toutefois quand même résoudre l'équation différentielle par la méthode dite « de séparation des variables » (fréquemment utilisée en Physique). Le raisonnement qui suit n'est pas à connaître par cœur.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et N une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

$$\begin{aligned} N \text{ est solution de } (\mathcal{V}) \text{ sur } I &\iff \forall t \in I, N'(t) = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t) \\ &\iff \forall t \in I, \frac{N'(t)}{\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)N(t)} = r \\ &\iff \forall t \in I, \frac{N'(t)}{N(t)} + \frac{N'(t)}{K - N(t)} = r \end{aligned}$$

les fonctions en jeu étant continues, on peut intégrer et ce qui précède équivaut à

$$\forall t \in I, \int_0^t \frac{N'(s)}{N(s)}\,\mathrm{d}s + \int_0^t \frac{N'(s)}{K - N(s)}\,\mathrm{d}s = \int_0^t r\,\mathrm{d}s$$

d'où $$\forall t \in I, \ln(N(t)) - \ln(N_0) - \ln(K - N(t)) + \ln(K - N_0) = rt$$

puis en passant à l'exponentielle,

$$\forall t \in I, \frac{N(t)}{N_0} = \frac{K - N(t)}{K - N_0}\mathrm{e}^{rt}$$

en isolant $N(t)$ $$\boxed{\forall t \in I, N(t) = \frac{K}{1 - (1 - K/N_0)\mathrm{e}^{-rt}}}$$

Vous êtes invités à vérifier les calculs par vous même et, à remarquer que, quand $t \to +\infty$, on a bien $N(t) \to K$.

Modèle de Gompertz

On peut également moduler le coefficient r de façon logarithmique avec l'équation différentielle :

$$N'(t) = r\,(\ln K - \ln N(t))\,N(t) \qquad (\mathcal{G})$$

Ici encore l'équation n'est pas linéaire ($\ln N$). Comme précédemment, K représente la population maximale de l'écosystème. Ici encore, on résout par séparation des variables.

$$N'(t) = r\,(\ln K - \ln N(t))\,N(t) \iff -\underbrace{\frac{-N'(t)}{N(t)}}_{u'(t)} \times \underbrace{\frac{1}{\ln K - \ln N(t)}}_{\frac{1}{u(t)}} = r$$

En intégrant entre 0 et t, on obtient :

$$-\left(\ln|\ln K - \ln N(t)| - \ln|\ln K - \ln N_0|\right) = rt$$

Et en passant à l'exponentielle

$$\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) = \ln\left(\frac{K}{N_0}\right)\mathrm{e}^{-rt}$$

puis

$$N(t) = K\exp\left(\ln\left(\frac{N_0}{K}\right)\mathrm{e}^{-rt}\right)$$

Ici encore, vous êtes invités à vous convaincre en refaisant les calculs intermédiaires par vous-mêmes, mais pas besoin d'apprendre par cœur la démarche.

comparaison des méthodes :

Le modèle malthusien est clairement trop simpliste mais peut être intéressant sur un court intervalle de temps.
Concernant les modèles de Verhulst et de Gompertz, ils sont tous les deux pertinents selon les situations et on choisira celui qui s'accorde le mieux aux données expérimentales (éventuellement par des méthodes de régressions linéaires).

Méthodes numériques : Méthode d'Euler

Dans la plupart des cas, on ne peut pas déterminer explicitement les solutions d'une équation différentielle. Toutefois il est possible grâce à l'outil informatique de déterminer une allure approchée d'une solution à partir des conditions initiales vérifiées par cette fonction. Le contexte est le suivant :

Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$, on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

où l'inconnue est une fonction y de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Des théorèmes nous assure que, sous des hypothèses raisonnables, un tel problème admet une unique solution.

Un telle solution vérifie alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall h > 0, \qquad y(t+h) - y(t) = \int_t^{t+h} y'(s)\ \mathrm{d}s = \int_t^{t+h} F(y(s))\ \mathrm{d}s$$

L'idée est alors la suivante, pour h petit, on va approcher l'intégrale $\int_t^{t+h} F(y(s))\ \mathrm{d}s$ par $hF(y(t))$ (il s'agit de l'approximation obtenue par une méthode des rectangles à gauche) et considérer donc que $y(t+h) \approx y(t) + hF(y(t))$.

Soit $h > 0$ (idéalement h est assez petit). On va approcher l'allure de la courbe de la solution du problème de Cauchy par le polygone défini par la suite de points $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} p_0 = y_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad p_{n+1} = p_n + hF(p_n) \end{cases}$$

On appelle cette méthode la méthode d'Euler explicite. Cette méthode est dite d'ordre 1, il faut comprendre que l'écart entre la solution réelle et la solution estimée est du même ordre de grandeur que h^1.

Il existe d'autres méthodes plus efficaces mais bien plus complexe. Toutefois dans le contexte des équations issues de la biologie vues plus haut, cette méthode fonctionne relativement bien.

En Python on programmera cette méthode de la sorte

```python
def euler(F, y0, h,n):
    '''Prend en argument
    - une fonction F,
    - une condition initiale y0
    - un pas h
    - un nombre d'étapes n (entier)
    et renvoie la liste des valeurs [y_0, ... y_n]
    obtenus par la méthode d'Euler'''
    Y = [y0]
    y = y0
    for i in range(n):
        y = y + h*F(y)
        Y.append(y)
    return Y
```

Exercices

exercice 1 Résoudre les problème de Cauchy suivants :

a. $\begin{cases} y'' = y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

e. $\begin{cases} y'' - 1 = 2y' + y \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} y'' + 5y' = y + 2 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

f. $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 3 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y'' = 6 \\ y(0) = 8 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

g. $\begin{cases} y'' + y' = 1 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} y'' - 6y' + 13y = 0 \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$

h. $\begin{cases} y'' + 12y' + 23y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

Proposition de corrigé :

a. $\begin{cases} y'' = y \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_1$ admet une unique solution. On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_1 \qquad y'' - y = 0$$

Cette équation est homogène. Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{E}_1$ est $P(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.
P admet donc deux racines réelles distinctes 1 et -1.
On sait alors que les solutions de $\mathcal{E}_1$ sont de la forme

$$y : t \mapsto Ae^t + Be^{-t}$$

où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0) = A + B$$

$$y'(0) = A - B$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 1 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A, B) = (1, 0)$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_1$ est la fonction

$$y : t \mapsto e^t$$

b. $\begin{cases} y'' + 5y' = y + 2 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_2$ admet une unique solution. Si on a de l'intuition on pourrait le trouver tout de suite et conclure que c'est la seule. On va faire comme si on n'avait aucune intuition à ce sujet.
On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_2 \qquad y'' + 5y' - y = 2$$

L'équation homogène associée est

$$\mathcal{H}_2 \qquad y'' + 5y' - y = 0$$

Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{H}_2$ est $P(x) = x^2 + 5x - 1$.
Déterminons les racines de P. Le discriminant de P est $25 + 4 = 29$. P admet deux racines réelles distinctes

$$\lambda = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \qquad \mu = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}$$

L'ensemble des solutions de $\mathcal{H}_2$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_2} = \{y : t \mapsto Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

D'après le théorème de structure de l'espace des solutions on sait que, si y_0 est une solution de $\mathcal{E}_2$ alors l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_2$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_2} = \{y + y_0 \ , \ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}_2}\}$$

Il nous faut donc trouver une solution particulière de $\mathcal{E}_2$. Pour cela on va commencer par essayer de trouver une solution constante. Ici la fonction $y_0 : t \mapsto -2$ est une solution de $\mathcal{E}_2$.
Ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_2} = \{t \mapsto 2 + Ae^{\lambda t} + Be^{\mu t} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0) = A + B - 2$$

$$y'(0) = \lambda A + \mu B$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A + B - 2 = -2 \\ \lambda A + \mu B = 0 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A, B) = (0, 0)$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_2$ est la fonction

$$y : t \mapsto -2$$

c. $\begin{cases} y'' = 6 \\ y(0) = 8 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

Ce problème peut très bien être résolu de manière simple sans utiliser la méthode vue en cours.
On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_3$ admet une unique solution. Soit y cette solution.
On a alors $y'' = 6$. Ainsi y' est un primitive de la fonction constante égale à 6. C'est donc une fonction de la forme $y' : t \mapsto 6t + K$, où K est une constante. On sait que $y'(0) = -1$, ainsi $K = -1$.
Par suite y est une primitive de la fonction $t \mapsto 6t - 1$. Elle est donc de la forme $y : t \mapsto 3t^2 - t + C$, où C est une constante. On sait que $y(0) = 8$, ainsi $C = 8$.
Finalement l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_3$ est

$$y : t \mapsto 3t^2 - t + 8$$

Retrouvons ce résultat en appliquant la méthode du cours
On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_3 \qquad y'' = 6$$

L'équation homogène associée est

$$\mathcal{H}_3 \qquad y'' = 0$$

Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{H}_3$ est $P(x) = x^2$. P admet 0 comme racine double.
l'ensemble des solutions de $\mathcal{H}_3$ est donc

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_3} = \{y : t \mapsto Ae^{0t} + Bte^{0t} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

D'après le théorème de structure de l'espace des solutions on sait que, si y_0 est une solution de $\mathcal{E}_3$ alors l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_3$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_3} = \{y + y_0 \ , \ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}_3}\}$$

Il nous faut donc trouver une solution particulière de $\mathcal{E}_3$. On ne peut pas trouver de fonctions constante ou affine qui fonctionne. On essaye alors les polynômes de degré 2 et on voit alors que $t \mapsto 3t^2$ est une solution de $\mathcal{E}_3$ Ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_3} = \{t \mapsto 3t^2 + A + Bt\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0) = A$$

$$y'(0) = B$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A = 8 \\ B = -1 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A, B) = (8, -1)$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_3$ est la fonction

$$y : t \mapsto 3t^2 - t + 8$$

d. $\begin{cases} y'' - 6y' + 13y = 0 \\ y(0) = 4 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_4$ admet une unique solution. On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_4 \qquad y'' - 6y' + 13y = 0$$

Cette équation est homogène.
Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{H}_4$ est $P(x) = x^2 - 6x + 13$.
Déterminons les racines de P. Le discriminant de P est $36 - 4 \times 13 = -16$. P admet deux racines complexes conjuguées

$$\lambda = 3 + 2i \qquad \mu = 3 - 2i$$

L'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_4$ est donc

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_4} = \{y : t \mapsto e^3t\,(A\cos(2t) + B\sin(2t))\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0) = A$$

$$y'(0) = 3A + 2B$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A = 4 \\ 3A + 2B = 4 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A, B) = (4, -4)$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_4$ est la fonction

$$y : t \mapsto e^{3t}\,(4\cos(2t) - 4\sin(2t))$$

On peut réutiliser ce que l'on a vu en trigonométrie pour mettre cette fonction sous une autre forme. Soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $z = 4 - 4i = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$. Alors

$$4\cos(2t) - 4\sin(2t) = \mathfrak{Re}(\bar{z}e^{2it}) = 4\sqrt{2}\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_4$ est la fonction

$$y : t \mapsto 4\sqrt{2}e^{3t}\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

e. $\begin{cases} y'' - 1 = 2y' + y \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_5$ admet une unique solution. On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_5 \qquad y'' - 2y' - y = 1$$

L'équation homogène associée est

$$\mathcal{H}_5 \qquad y'' - 2y' - y = 0$$

Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{H}_5$ est $P(x) = x^2 - 2x - 1$.
Déterminons les racines de P. Le discriminant de P est 8. P admet deux racines réelles distinctes $1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$.
L'ensemble des solutions de $\mathcal{H}_5$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_5} = \{y : t \mapsto Ae^{(1-\sqrt{2})t} + Be^{(1+\sqrt{2})t} \ , \ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$$

D'après le théorème de structure de l'espace des solutions on sait que, si y_0 est une solution de $\mathcal{E}_5$ alors l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_5$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_5} = \{y + y_0 \ , \ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}_5}\}$$

Il nous faut donc trouver une solution particulière de $\mathcal{E}_5$. Pour cela on va commencer par essayer de trouver une solution constante. Ici la fonction $y_0 : t \mapsto -1$ est une solution de $\mathcal{E}_5$.
Ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_5} = \{t \mapsto Ae^{(1-\sqrt{2})t} + Be^{(1+\sqrt{2})t} - 1 \ , \ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$$

On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0) = A + B - 1$$

$$y'(0) = (1-\sqrt{2})A + (1+\sqrt{2})B$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ (1-\sqrt{2})A + (1+\sqrt{2})B = 1 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A,B) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_5$ est la fonction

$$y : t \mapsto -\frac{\sqrt{2}}{4}e^{(1-\sqrt{2})t} + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{(1+\sqrt{2})t} - 1$$

C'est-à-dire

$$y : t \mapsto \frac{\sqrt{2}}{4}e^{(1+\sqrt{2})t}\left(2e^{\sqrt{2}t} - 1\right) - 1$$

f. $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 3 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_6$ admet une unique solution. On retrouve ici l'équation différentielle

$$\mathcal{E}_6 \qquad y'' + y' - 2y = 3$$

L'équation homogène associée est

$$\mathcal{H}_6 \qquad y'' + y' - 2y = 0$$

Le polynôme caractéristique de l'équation $\mathcal{H}_6$ est $P(x) = x^2 + x - 2$.
Déterminons les racines de P. Le discriminant de P est 9. P admet deux racines réelles distinctes -2 et 1.
L'ensemble des solutions de $\mathcal{H}_6$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}_6} = \{y : t \mapsto Ae^{-2t} + Be^{t} \ , \ (A,B) \in \mathbb{R}^2\}$$

D'après le théorème de structure de l'espace des solutions on sait que, si y_0 est une solution de $\mathcal{E}_6$ alors l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}_6$ est

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_6} = \{y + y_0 \ , \ y \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}_6}\}$$

Il nous faut donc trouver une solution particulière de $\mathcal{E}_6$. Pour cela on va commencer par essayer de trouver une solution constante. Ici la fonction $y_0 : t \mapsto -\frac{3}{2}$ est une solution de $\mathcal{E}_6$.

Ainsi

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}_6} = \left\{ t \mapsto Ae^{-2t} + Be^{t} - \frac{3}{2} \ , \ (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On va déterminer A et B à l'aide des conditions initiales. On a

$$y(0) = A + B - \frac{3}{2}$$

$$y'(0) = B - 2A$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} A + B = \frac{3}{2} \\ B - 2A = 2 \end{cases}$$

L'unique solution de ce système est $(A,B) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{3}\right)$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_6$ est la fonction

$$y : t \mapsto -\frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{5}{3}e^{t} - \frac{3}{2}$$

g. $\begin{cases} y'' + y' = 1 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

Soit y l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_7$. Soit $z = y'$. Alors z vérifie

$$\begin{cases} z' + z = 1 \\ z(0) = 2 \end{cases}$$

Ainsi $z : t \mapsto e^{-t} + 1$. y est alors une primitive de z. D'où

$$y : t \mapsto -e^{-t} + t + C$$

où C est une constante.
Comme $y(0) = 3$ on alors $C = 4$. Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_7$ est

$$y : t \mapsto -e^{-t} + t + 4$$

h. $\begin{cases} y'' + 12y' + 23y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

On sait que le problème de Cauchy $\mathcal{P}_8$ admet une unique solution. On remarque aisément que la fonction $y : t \mapsto 0$ est une solution de $\mathcal{P}_8$.
Ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\mathcal{P}_8$ est

$$y : t \mapsto 0$$

---

exercice 2 Résoudre les équations différentielles suivantes

a. $y' + \cos(x)y = 0$

b. $y' + \frac{1}{x\ln(x)}y = 0$

c. $y' + \cos^3(x)y = 0$

d. $(1 + x^2)y' - 2xy = 0$

e. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 0.$

Proposition de corrigé :

- $y' + \cos(x)y = 0$
  Il nous faut calculer une primitive de $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$ en est une. L'ensemble des solutions de notre équation différentielle est alors

$$\mathcal{S}_1 = \left\{x \mapsto Ke^{-\sin(x)}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(x \mapsto e^{-\sin(x)}\right)$$

- $y' + \frac{1}{x\ln(x)}y = 0$
  Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est $x \mapsto \ln(\ln(x))$. L'ensemble des solutions de notre équation différentielle est alors

$$\mathcal{S}_2 = \left\{x \mapsto Ke^{-\ln(\ln(x))}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto \frac{K}{ln(x)}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}\right)$$

- $y' + \cos^3(x)y = 0$
  Il nous faut calculer une primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$, pour cela on va linéariser $\cos^3(x)$

$$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8} = \frac{\cos(3x)+3\cos(x)}{4}$$

  Un primitive de $x \mapsto \cos^3(x)$ est alors $x \mapsto \frac{\sin(3x)+9\sin(x)}{12}$
  L'ensemble des solutions de notre équation différentielle est alors

$$\mathcal{S}_3 = \left\{x \mapsto K\exp\left(-\frac{\sin(3x)+9\sin(x)}{12}\right)\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(x \mapsto \exp\left(-\frac{\sin(3x)+9\sin(x)}{12}\right)\right)$$

- $(1+x^2)y' - 2xy = 0$
  $x \mapsto 1+x^2$ ne s'annule jamais, notre équation différentielle est donc équivalente à l'équation

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0$$

  Une primitive de $x \mapsto \frac{-2x}{1+x^2}$ est $x \mapsto -\ln(1+x^2)$.
  L'ensemble des solutions de notre équation différentielle est alors

$$\mathcal{S}_4 = \left\{x \mapsto Ke^{\ln(1+x^2)}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto K(1+x^2)\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(x \mapsto (1+x^2)\right)$$

- $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 0.$
  Une primitive de $x \mapsto \frac{1-2x}{x^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x} - 2\ln(x)$.
  L'ensemble des solutions de notre équation différentielle est alors

$$\mathcal{S}_5 = \left\{x \mapsto Ke^{\frac{1}{x}+2\ln(x)}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto Kx^2e^{\frac{1}{x}}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(x \mapsto x^2e^{\frac{1}{x}}\right)$$

---

exercice 3 Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes :

a. $y' + y = \cos(x) + \sin(x)$

b. $y' + 2y = \cos(x)$

c. $y' + xy = x + 1$

d. $xy' + (x-2)y = (x-2)$ sur $]0, +\infty[$

e. $y' + y = \sin(x)$

f. $y' - e^x y = e^{e^x}$

g. $y' + \frac{2y}{x^2+1} = \exp(-2\arctan(\text{x}))$

h. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$

i. $xy' + y = e^x$

j. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1.$

k. $y' - y = e^{2x}$

l. $y' - y = e^x$

m. $y' - y = xe^x$

Proposition de corrigé :

- $y' + y = \cos(x) + \sin(x)$

La forme générale des solutions de l'équation homogène est $x \mapsto Ke^{-x}$, $K \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est une solution particulière de l'équation avec second membre. Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = \cos(x) + \sin(x)$ est

$$\mathcal{S}_1 = \{x \mapsto \sin(x) + Ke^{-x} \ , \ K \in \mathbb{R}\}$$

- $y' + 2y = \cos(x)$
  La forme générale des solutions de l'équation différentielle homogène $y' + 2y = 0$ est

$$x \mapsto Ke^{-2x} \qquad K \in \mathbb{R}$$

On doit ensuite trouver une solution particulière à l'équation différentielle avec second membre $y' + 2y = \cos(x)$.
On va ici utiliser la méthode de variation de la constante. On cherche donc une solution particulière de $y' + 2y = \cos(x)$ sous la forme $y \mapsto K(x)e^{-2x}$.
On a alors, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$cos(x) = y'(x) + 2y(x) = K'(x)e^{-2x} - 2K(x)e^{-x} + 2K(x)e^{-x} = K'(x)e^{-2x}$$

Il nous faut donc trouver une fonction K telle que $K'(x) = e^{2x}\cos(x)$, on va donc calculer $\int_0^x e^{2t}\cos(t)\ \mathrm{d}t$ via deux intégrations par parties successives. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} K(x) &= \int_0^x e^{2t}\cos(t)\ \mathrm{d}t \\ &= \left[e^{2t}\sin(t)\right]_0^x - \int_0^x 2e^{2t}\sin(t)\ \mathrm{d}t \\ &= e^{2x}\sin(x) - \int_0^x 2e^{2t}\sin(t)\ \mathrm{d}t \\ &= e^{2x}\sin(x) - \left(\left[-2e^{2t}\cos(t)\right]_0^x + \int_0^x 4e^{2t}\cos(t)\ \mathrm{d}t\right) \\ &= e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x}\cos(x) - 2 - 4K(x) \end{aligned}$$

D'où, pour $x \in \mathbb{R}$

$$K(x) = \frac{e^{2x}\sin(x) + 2e^{2x}\cos(x) - 2}{5}$$

Une solution particulière de $y' + 2y = \cos(x)$ est donc

$$y : x \mapsto K(x)e^{-2x} \qquad \text{i.e.} \qquad y : x \mapsto \frac{\sin(x) + 2\cos(x)}{5} - \frac{2e^{-2x}}{5}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + 2y = \cos(x)$ est ainsi

$$\mathcal{S}_2 = \{x \mapsto \frac{\sin(x) + 2\cos(x)}{5} + \left(K - \frac{2}{5}\right)e^{-2x} \ , \ K \in \mathbb{R}\}$$

- $y' + xy = x + 1$
  L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y' + xy = 0$ a été déterminé dans l'exercice précédent, elles sont de la forme $x \mapsto Ke^{-\frac{x^2}{2}}$, $K \in \mathbb{R}$. On détermine une solution particulière par la méthode de variation de la constante en la cherchant sous la forme $x \mapsto K(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, on a alors $K'(x) = (x+1)e^{\frac{x^2}{2}}$
  On a

$$\int_0^x (t+1)e^{\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t = e^{\frac{t^2}{2}} + \int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$$

L'intégrale $\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$ ne se calcule pas (il n'existe pas d'expression de cette intégrale à partir des fonctions usuelles) on va la noter $\Phi(x)$. Une solution particulière de l'équation différentielle $y' + xy = x + 1$ est donc

$$y : x \mapsto 1 + \Phi(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + xy = x + 1$ est donc

$$\mathcal{S}_3 = \left\{x \mapsto 1 + \Phi(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + Ke^{-\frac{x^2}{2}} \ , \ K \in \mathbb{R}\right\}$$

- $xy' + (x-2)y = (x-2)$ sur $]0, +\infty[$
  Sur $]0, +\infty$ cette équation différentielle est équivalente à
  $$y' + \frac{x-2}{x}y = \frac{x-2}{x}$$
  Une primitive de $x \mapsto \frac{x-2}{x}$ est $x \mapsto x - 2\ln(x)$, les solutions de l'équation différentielle homogène sont donc de la forme $x \mapsto Ke^{-x+2\ln(x)}$, $K \in \mathbb{R}$. La fonction constante $x \mapsto 1$ est une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre. Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $xy' + (x-2)y = (x-2)$ sur $]0, +\infty[$ est
  $$\mathcal{S}_4 = \{x \mapsto Kx^2e^{-x} + 1 \ , \ K \in \mathbb{R}\}$$

- $y' + y = \sin(x)$
  La forme générale des solutions de l'équation différentielle homogène $y' + y = 0$ est
  $$x \mapsto Ke^{-x} \qquad K \in \mathbb{R}$$
  On doit ensuite trouver une solution particulière à l'équation différentielle avec second membre $y' + y = \sin(x)$.
  On va ici utiliser la méthode de variation de la constante, on cherche donc une solution particulière de $y' + y = \sin(x)$ sous la forme $y \mapsto K(x)e^{-x}$.
  On a alors, pour $x \in \mathbb{R}$,
  $$\sin(x) = y'(x) + y(x) = K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x} + K(x)e^{-x} = K'(x)e^{-x}$$
  Soit $x \in \mathbb{R}$, on a
  $$\begin{aligned} \text{K(x)} = \int_0^x e^t \sin(t) \ \mathrm{d}t \\ &= [e^t \sin(t)]_0^x - \int_0^x e^t \cos(t) \ \mathrm{d}t \\ &= e^x \sin(x) - \int_0^x e^t \cos(t) \ \mathrm{d}t \\ &= e^x \sin(x) - \left([e^t \cos(t)]_0^x + \int_0^x e^t \sin(t) \ \mathrm{d}t \right) \\ &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) + 1 - K(x) \end{aligned}$$
  D'où, pour $x \in \mathbb{R}$
  $$K(x) = \frac{e^x \sin(x) - e^x \cos(x) + 1}{2}$$
  Une solution particulière de $y' + y = \sin(x)$ est donc
  $$y : x \mapsto K(x)e^{-x} \qquad \text{i.e.} \qquad y : x \mapsto \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} + \frac{1}{2}e^{-x}$$
  L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + y = \sin(x)$ est ainsi
  $$\mathcal{S}_5 = \left\{ x \mapsto \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} + \frac{1}{2}e^{-x} + Ke^{-x} \ , \ K \in \mathbb{R} \right\}$$

- $y' - e^x y = e^{e^x}$
  Une primitive de $x \mapsto -e^x$ est $x \mapsto -e^x$. Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' - e^x y = 0$ sont donc de la forme $x \mapsto Ke^{-e^x}$, $K \in \mathbb{R}$
  On détermine une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante sous la forme $x \mapsto K(x)e^{e^x}$. Il nous faut alors trouver une fonction K telle que $K'(x)e^{e^x} = e^{e^x}$.
  La fonction $K : x \mapsto x$ convient.
  L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - e^x y = e^{e^x}$ est donc
  $$\mathcal{S}_6 = \{x \mapsto Ke^{e^x} + xe^{e^x} \ , \ K \in \mathbb{R}\}$$

- $y' + \frac{2y}{x^2+1} = \exp(-2\arctan(\text{x}))$

  Une primitive de $x \mapsto \frac{2}{x^2+1}$ est $x \mapsto 2\arctan(x)$. Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' + \frac{2y}{x^2+1} = 0$ sont donc de la forme $x \mapsto Ke^{-2\arctan(x)}$, $K \in \mathbb{R}$.

  On détermine une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante sous la forme $x \mapsto K(x)e^{-2\arctan(x)}$. Il nous faut alors trouver une fonction K telle que $K'(x)e^{-2\arctan(x)} = e^{-2\arctan(x)}$. La fonction $K : x \mapsto x$ convient.

  L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + \frac{2y}{x^2+1} = \exp(-2\arctan(\text{x}))$ est donc

$$\mathcal{S}_7 = \left\{x \mapsto Ke^{-2\arctan(x)} + xe^{-2\arctan(x)}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}$$

- $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$

  La fonction $x \mapsto 1+x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, notre équation différentielle est alors équivalente à

$$y - \frac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2$$

  Une primitive de $x \mapsto -\frac{2x}{1+x^2}$ est $x \mapsto -\ln(1+x^2)$. Les solutions de l'équation différentielle homogène $y - \frac{2x}{1+x^2}y = 0$ sont donc de la forme $x \mapsto Ke^{\ln(1+x^2)}$, i.e. $x \mapsto K(1+x^2)$, $K \in \mathbb{R}$.

  On détermine une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante sous la forme $x \mapsto K(x)e^{-2\arctan(x)}$. Il nous faut alors trouver une fonction K telle que $K'(x)(1+x^2) = 1+x^2$. La fonction $K : x \mapsto x$ convient.

  L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ est donc

$$\mathcal{S}_8 = \{x \mapsto K(1+x^2) + x + x^3\ ,\ K \in \mathbb{R}\}$$

- $xy' + y = e^x$

  On se place sur l'intervalle $]0, +\infty[$, sur cet intervalle notre équation différentielle est équivalente à

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{e^x}{x}$$

  Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\ln(x)$, les solutions de l'équation différentielle homogène sont de la forme $x \mapsto Ke^{-\ln(x)}$, i.e. $x \mapsto \frac{K}{x}$, $K \in \mathbb{R}$.

  On détermine une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante sous la forme $x \mapsto \frac{K(x)}{x}$. Il nous faut alors trouver une fonction K telle que $\frac{K'(x)}{x} = e^x$.

  On va calculer $\int_0^x te^t\ \mathrm{d}t$ via une intégration par parties.

$$\int_0^x te^t\ \mathrm{d}t = [te^t]_0^x - \int_0^x e^t\ \mathrm{d}t = xe^x - e^x + 1$$

  Une solution particulière de l'équation différentielle est donc $x \mapsto \frac{xe^x - e^x + 1}{x}$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $xy' + y = e^x$ sur $]0, +\infty$ est alors

$$\mathcal{S}_9 = \left\{x \mapsto \frac{xe^x - e^x + K + 1}{x}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}$$

- $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$

  On se place sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Sur cet intervalle une primitive de $x \mapsto \frac{1-2x}{x^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x} - 2\ln(x)$.

  Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 0$ sont ainsi de la forme $x \mapsto Ke^{\frac{1}{x}+2\ln(x)}$, $K \in \mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x^2$ est une solution particulière de l'équation avec second membre. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est ainsi

$$\mathcal{S}_{10} = \left\{x \mapsto x^2 + Kx^2 e^{\frac{1}{x}} \ , \ K \in \mathbb{R}\right\}$$

- $y' - y = e^{2x}$
  Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' - y = 0$ sont de la forme $x \mapsto Ke^x$, $K \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto e^{2x}$ est une solution particulière de l'équation avec second membre. Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = e^{2x}$ est

$$\mathcal{S}_{11} = \{x \mapsto e^{2x} + Ke^x \ , \ K \in \mathbb{R}\}$$

- $y' - y = e^x$
  Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' - y = 0$ sont de la forme $x \mapsto Ke^x$, $K \in \mathbb{R}$. On va déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variations de la constante. Il nous faut alors trouver une fonction K telle que $K'(x)e^x = e^x$. La fonction $K : x \mapsto x$ convient. Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = e^x$ est

$$\mathcal{S}_{12} = \{x \mapsto xe^x + Ke^x \ , \ K \in \mathbb{R}\}$$

- $y' - y = xe^x$
  Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' - y = 0$ sont de la forme $x \mapsto Ke^x$, $K \in \mathbb{R}$. On va déterminer une solution particulière de l'équation avec second membre par la méthode de variations de la constante. Il nous faut alors trouver une fonction K telle que $K'(x)e^x = xe^x$. La fonction $K : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ convient. Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = xe^x$ est

$$\mathcal{S}_{13} = \left\{x \mapsto \frac{x^2 e^x}{2} + Ke^x \ , \ K \in \mathbb{R}\right\}$$

---

exercice 4 Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes :

a. $y'' + y' - 2y = e^{-t}$

b. $y'' + \omega^2 y = -2$, où $\omega > 0$,

c. $4y'' + 4y' + y = \cos(2t)$

d. $y'' - 2y' + y = t^2 + e^{2t}$

e. $y'' - 2y' + 2y = 25te^{-t} + 4$

f. $y'' + 6y' + 9y = x^2 + e^x \cos(x) + e^{3x}$

Proposition de corrigé :

Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes :

- L'ensemble des solutions de l'équation $y'' + y' - 2y = 0$ est

$$\{t \mapsto Ae^{-2t} + Be^t \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Il nous faut maintenant trouver une solution particulière à $y'' + y' - 2y = e^{-t}$, on la cherche sous la forme $t \mapsto Ke^{-t}$, ce qui revient à $K - K - 2K = 1$ d'où $K = -\frac{1}{2}$
Finalement, l'ensemble des solutions de $y'' + y' - 2y = e^{-t}$ est

$$\left\{t \mapsto Ae^{-2t} + Be^t - \frac{e^{-t}}{2} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- L'ensemble des solutions de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ est

$$\{t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Il nous faut maintenant trouver une solution particulière à $y'' + \omega^2 y = -2$, on la cherche sous la forme $t \mapsto K$, ce qui revient à $K = -\frac{2}{\omega^2}$
Finalement, l'ensemble des solutions de $y'' + \omega^2 y = -2$ est

$$\left\{t \mapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) - \frac{2}{\omega^2} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- L'ensemble des solutions de l'équation $4y'' + 4y' + y = 0$ est

$$\{t \mapsto Ae^{-\frac{t}{2}} + Bte^{-\frac{t}{2}} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Il nous faut maintenant trouver une solution particulière à $4y'' + 4y' + y = \cos(2t)$, on la cherche sous la forme $t \mapsto C\cos(2t) + D\sin(2t)$, ce qui revient à $(-16C + 8D + C)\cos(2t) + (-16D - 8C + D)\sin(2t) = \cos(2t)$ d'où $C = -\frac{15}{289}$ et $D = \frac{8}{289}$
Finalement, l'ensemble des solutions de $4y'' + 4y' + y = \cos(2t)$ est

$$\left\{t \mapsto Ae^{-\frac{t}{2}} + Bte^{-\frac{t}{2}} + \frac{8\sin(2x) - 15\cos(2x)}{289} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- L'ensemble des solutions de l'équation $y'' - 2y' + y = 0$ est

$$\{t \mapsto Ae^t + Bte^t \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Il nous faut maintenant trouver une solution particulière à $y'' - 2y' + y = t^2 + e^{2t}$, pour cela on va exploiter le principe de superposition et trouver des solutions particulières à $y'' - 2y' + y = t^2$ et $y'' - 2y' + y = e^{2t}$
On cherche une solution à $y'' - 2y' + y = t^2$ sous la forme d'un polynôme de degré 2 : $t \mapsto t^2 + at + b$, on aboutit alors à $t^2 + (a - 4)t + 2 - 2a + b = t^2$, ainsi $t \mapsto t^2 + 4t + 6$ est une solution de $y'' - 2y' + y = t^2$
On cherche une solution à $y'' - 2y' + y = e^{2t}$ sous la forme $t \mapsto Ke^{2t}$, on aboutit à $t \mapsto e^{2t}$.
Finalement l'ensemble des solution de $y'' - 2y' + y = t^2 + e^{2t}$ est

$$\{t \mapsto Ae^t + Bte^t + t^2 + 4t + 6 + e^{2t} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

- L'ensemble des solutions de l'équation $y'' - 2y' + 2y = 0$ est

$$\{t \mapsto e^t(A\cos(t) + B\sin(t)) \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Il nous faut maintenant trouver une solution particulière à $y'' - 2y' + 2y = 25te^{-t} + 4$, pour cela on va exploiter le principe de superposition et trouver des solutions particulières à $y'' - 2y' + 2y = 25te^{-t}$ et $y'' - 2y' + 2y = 4$
La fonction $t \mapsto 2$ est une solution particulière de $y'' - 2y' + 2y = 4$.
On cherche une solution à $y'' - 2y' + 2y = 25te^{-t}$ sous la forme $t \mapsto (at + b)e^{-t}$, on aboutit à $t \mapsto (5t + 4)e^{-t}$
Finalement l'ensemble des solutions de $y'' - 2y' + 2y = 25te^{-t} + 4$ est

$$\{t \mapsto e^t(A\cos(t) + B\sin(t)) + 2 + (5t + 4)e^{-t} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

- L'ensemble des solutions de l'équation $y'' + 6y' + 9y = 0$ est

$$\{t \mapsto Ae^{-3x} + Bxe^{-3x} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$$

Il nous faut maintenant trouver une solution particulière à $y'' + 6y' + 9y = x^2 + e^x\cos(x) + e^{3x}$, pour cela on va exploiter le principe de superposition et trouver des solutions particulières à $y'' + 6y' + 9y = x^2$, $y'' + 6y' + 9y = e^x\cos(x)$ et $y'' + 6y' + 9y = e^{3x}$
On cherche une solution particulière à $y'' + 6y' + 9y = x^2$ sous la forme d'un polynôme de degré 2, on trouve $x \mapsto \frac{3x^2-4x+2}{27}$.
On cherche une solution particulière à $y''+6y'+9y = e^x\cos(x)$ sous la forme $x \mapsto e^x(A\cos(x)+B\sin(x))$, on trouve $x \mapsto \frac{8e^x\sin(x)+15e^x\cos(x)}{289}$.
Enfin on cherche une solution particulière à $y'' + 6y' + 9y = e^{3x}$ sous la forme $x \mapsto Ke^{3x}$, on trouve $x \mapsto \frac{e^{3x}}{36}$.
Finalement l'ensemble des solutions de $y'' + 6y' + 9y = x^2 + e^x\cos(x) + e^{3x}$ est

$$\left\{t \mapsto Ae^{-3x} + Bxe^{-3x} + \frac{3x^2-4x+2}{27} + \frac{8e^x\sin(x) + 15e^x\cos(x)}{289} + \frac{e^{3x}}{36}\ ,\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

---

exercice 5 Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

Proposition de corrigé :

On va procéder par analyse-synthèse :

Soit (x,y) une solution du système. Alors

$$x' = 4x - 3y$$

D'où

$$x'' = 4x' - 3y' = 4x' - 3(2x-y) = 4x' - 6x + 3y = 4x' - 6x + (4x - x') = 3x' - 2x$$

Ainsi $x'' - 3x' + 2 = 0$.
Le polynôme caractéristique de cette équation est $P(t) = t^2 - 3t + 2$. Les racines de P sont 1 et 2. Ainsi il existe deux constantes réelles A et B telles que $x : t \mapsto Ae^t + Be^{2t}$.
Par suite on a

$$y = \frac{4x - x'}{3}$$

D'où

$$y : t \mapsto \frac{3Ae^t + 2Be^{2t}}{3}$$

Ainsi, si x et y sont solutions du système alors il existe deux constantes A et B telles que

$$x : t \mapsto Ae^t + Be^{2t}$$

$$y : t \mapsto \frac{3Ae^t + 2Be^{2t}}{3}$$

Réciproquement il est facile de vérifier que, si x et y sont définies par

$$x : t \mapsto Ae^t + Be^{2t}$$

$$y : t \mapsto \frac{3Ae^t + 2Be^{2t}}{3}$$

avec A et B deux constantes réelles, alors x et y sont solution de notre système.
Ainsi l'ensemble des solutions du système est

$$\left\{\left(t \mapsto Ae^t + Be^{2t}, t \mapsto \frac{3Ae^t + 2Be^{2t}}{3}\right)\ ,\ (A,B)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

---

exercice 6 Résoudre les problèmes de Cauchy suivants

a. $\begin{cases} y' - y\tan(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

b. $\begin{cases} y' - \frac{1}{x\ln(x)}y = 0 \\ y(e) = 1 \end{cases}$ sur $]1, +\infty[$

c. $\begin{cases} y' + xy = 2x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$.

d. $\begin{cases} y' + y = 3\sin(x) \\ y(0) = C \end{cases}$ $C \in \mathbb{R}$ fixé.

Proposition de corrigé :

- $\begin{cases} y' - y\tan(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
  On travaille ici sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, une primitive de $x \mapsto -\tan(x)$ y est $x \mapsto \ln(\cos(x))$. La forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' - y\tan(x) = 0$ est donc
  $$x \mapsto Ke^{-\ln(\cos(x))} \qquad \text{i.e.} \qquad x \mapsto \frac{K}{\cos(x)} \quad K \in \mathbb{R}$$
  La condition initiale impose $K = 1$. L'unique solution de notre problème de Cauchy est donc
  $$f_1 : x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$$
- $\begin{cases} y' - \frac{1}{x\ln(x)}y = 0 \\ y(e) = 1 \end{cases}$ sur $]1, +\infty[$
  On travaille ici sur $]1, +\infty[$. On peut remarquer que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est solution de ce problème de Cauchy et est donc l'unique solution. On va toutefois le retrouver par la méthode générale.
  Une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1, +\infty[$ est $x \mapsto \ln(\ln(x))$. La forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' - \frac{1}{x\ln(x)}y = 0$ est donc
  $$x \mapsto Ke^{\ln(\ln(x))} \qquad \text{i.e.} \qquad x \mapsto K\ln(x)$$
  La condition initiale impose $K = 1$. L'unique solution de notre problème de Cauchy est donc bien
  $$f_2 : x \mapsto \ln(x)$$
- $\begin{cases} y' + xy = 2x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$.
  On va commencer par déterminer la forme générale des solutions de l'équation différentielle homogène. Une primitive de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{x^2}{2}$. La forme générale des solutions de l'équation différentielle homogène $y' + xy = 0$ est donc
  $$x \mapsto Ke^{-\frac{x^2}{2}}$$
  On doit ensuite trouver une solution particulière à l'équation différentielle avec second membre $y' + xy = 2x$. La fonction constante $x \mapsto 2$ convient ici. La forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + xy = 2x$ est donc
  $$x \mapsto 2 + Ke^{-\frac{x^2}{2}}$$
  La condition initiale impose $K = -1$. Ainsi l'unique solution de notre problème de Cauchy est
  $$f_3 : x \mapsto 2 - e^{-\frac{x^2}{2}}$$
- $\begin{cases} y' + y = 3\sin(x) \\ y(0) = C \end{cases}$ $C \in \mathbb{R}$ fixé.
  La forme générale des solutions de l'équation différentielle homogène $y' + y = 0$ est
  $$x \mapsto Ke^{-x} \qquad K \in \mathbb{R}$$
  On doit ensuite trouver une solution particulière à l'équation différentielle avec second membre $y' + y = 3\sin(x)$. Deux méthodes s'offrent à nous :

- On peut, comme le second membre est une somme de cosinus et de sinus, chercher une solution sous la forme d'une somme de cosinus et de sinus de même période $x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$ avec A et B deux constantes réelles.

- On peut aussi utiliser la méthode de variation de la constante.

On va ici utiliser la méthode de variation de la constante qui est plus lente mais dont la maitrise est fondamentale. On cherche donc une solution particulière de $y' + y = 3\sin(x)$ sous la forme $y \mapsto K(x)e^{-x}$. On a alors, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$3\sin(x) = y'(x) + y(x) = K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x} + K(x)e^{-x} = K'(x)e^{-x}$$

Il nous faut donc trouver une fonction K telle que $K'(x) = 3e^x \sin(x)$, on va donc calculer $\int_0^x 3e^t \sin(t)\ \mathrm{d}t$ via deux intégrations par parties successives. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
K(x) &= \int_0^x 3e^t \sin(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \left[3e^t \sin(t)\right]_0^x - \int_0^x 3e^t \cos(t)\ \mathrm{d}t \\
&= 3e^x \sin(x) - \int_0^x 3e^t \cos(t)\ \mathrm{d}t \\
&= 3e^x \sin(x) - \left(\left[3e^t \cos(t)\right]_0^x + \int_0^x 3e^t \sin(t)\ \mathrm{d}t\right) \\
&= 3e^x \sin(x) - 3e^x\cos(x) + 3 - K(x)
\end{aligned}$$

D'où, pour $x \in \mathbb{R}$

$$K(x) = \frac{3e^x \sin(x) - 3e^x\cos(x) + 3}{2}$$

Une solution particulière de $y' + y = 3\sin(x)$ est donc

$$y : x \mapsto K(x)e^{-x} \qquad \text{i.e.} \qquad y : x \mapsto \frac{3\sin(x) - 3\cos(x)}{2} + \frac{3}{2}e^{-x}$$

La forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + y = 3\sin(x)$ est ainsi

$$x \mapsto \frac{3\sin(x) - 3\cos(x)}{2} + \frac{3}{2}e^{-x} + Ke^{-x}$$

La condition initiale impose $K = C$. Ainsi l'unique solution de notre problème de Cauchy est

$$f_4 : x \mapsto \frac{3\sin(x) - 3\cos(x)}{2} + \left(C + \frac{3}{2}\right)e^{-x}$$

---

exercice 7 Résoudre les équations homogènes suivantes sur un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

a. $(1 + x^2)y' + xy = 0$

b. $2y' - \dfrac{1}{1+x}y = 0$

c. $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}y = 0$

d. $xy' + x^2 y = 0$

e. $\cos(x)y' + \sin(x)y = 0$ à l'aide d'une solution évidente.

Proposition de corrigé :

- $(1+x^2)y' + xy = 0$
  La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, notre équation différentielle est alors équivalente à
  $$y + \frac{x}{1+x^2}y = 0$$
  Une primitive de $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Les solutions de l'équation différentielle homogène $y + \frac{x}{1+x^2}y = 0$ sont donc de la forme $x \mapsto Ke^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$, i.e. $x \mapsto \frac{K}{\sqrt{1+x^2}}$, $K \in \mathbb{R}$.
  L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $((1+x^2)y' + xy = 0$ sur $\mathbb{R}$ est donc
  $$\mathcal{S}_1 = \left\{x \mapsto \frac{K}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}$$
- $2y' - \dfrac{1}{1+x}y = 0$
  On se place sur $]-1,+\infty[$. Notre équation différentielle est équivalente à $y' - \frac{1}{2+2x}y = 0$. Une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$ est $x \mapsto -\frac{1}{2}\ln(1+x)$
  L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $2y' - \dfrac{1}{1+x}y = 0$ sur $]-1,+\infty[$ est alors
  $$\left\{x \mapsto K\sqrt{1+x}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}$$
- $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}y = 0$
  On se place sur $]-\infty, 1\}$. Sur cet intervalle, une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est $x \mapsto 2\sqrt{1-x}$
  L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}y = 0$ sur $]-\infty, 1\}$ est alors
  $$\mathcal{S}_3 = \left\{Ke^{-2\sqrt{1-x}}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}$$
- $xy' + x^2y = 0$
  On se place sur $]0,+\infty$, sur cet intervalle notre équation est équivalente à $y' + xy = 0$. Une primitive de $x \mapsto x$ est $x \mapsto \frac{x^2}{2}$.
  L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $xy' + x^2y = 0$ sur $]0,+\infty[$ est alors
  $$\mathcal{S}_4 = \left\{x \mapsto Ke^{-\frac{x^2}{2}}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}$$
- $\cos(x)y' + \sin(x)y = 0$
  On sait que l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène de degré 1 est un espace vectoriel de dimension 1. Il est donc engendré par n'importe lequel de ses éléments non-nuls. On peut remarquer que la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est une solution de cette équation différentielle, ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $\cos(x)y' + \sin(x)y = 0$ est
  $$\mathcal{S}_5 = \mathrm{Vect}(x \mapsto \cos(x)) = \{x \mapsto K\cos(x)\ ,\ K \in \mathbb{R}\}$$

---

exercice 8

1. On considère l'équation différentielle
   $$(E_1): \qquad (1+x^2)y' + xy = 1 + 2x^2$$
   Résoudre (E_1) sur $\mathbb{R}$ en trouvant une solution évidente.
2. On considère l'équation différentielle
   $$(E_2): \qquad \cos(x)y' + \sin(x)y = 1$$
   Résoudre (E_2) sur $\mathbb{R}$ en trouvant une solution évidente.
3. On considère l'équation différentielle
   $$(E_3): \qquad (x+1)y' + y = x^2$$

Montrer qu'il existe une unique solution polynomiale de degré 2 sur $\mathbb{R}$ puis résoudre (E_3) sur un intervalle à préciser.

Proposition de corrigé :

- (E_1) : $\qquad (1+x^2)y' + xy = 1 + 2x^2$
  Sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle (E_1) est équivalente à
  $$y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1+2x^2}{1+x^2}$$
  On sait, d'après l'exercice précédent que les solutions de l'équation homogène $y' + \frac{x}{1+x^2}y = 0$ sont de la forme $x \mapsto \frac{K}{\sqrt{1+x^2}}$.
  De plus, la fonction $x \mapsto x$ est une solution évidente de l'équation avec second membre.
  Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1) est
  $$\mathrm{s}_1 = \left\{x \mapsto x + \frac{K}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}$$
- (E_2) : $\qquad \cos(x)y' + \sin(x)y = 1$
  On sait, d'après l'exercice précédent que les solutions de l'équation homogène $\cos(x)y' + \sin(x)y = 0$ sont de la forme $x \mapsto K\cos(x)$, $K \in \mathbb{R}$.
  La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est une solution évidente de l'équation avec second membre, ainsi l'ensemble des solutions de (E_2) est
  $$\mathcal{S}_2 = \{x \mapsto \sin(x) + K\cos(x)\ ,\ K \in \mathbb{R}\}$$
- (E_3) : $\qquad (x+1)y' + y = x^2$
  On va procéder par analyse-synthèse :
  Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$, $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ une fonction polynomiale de degré 2 solution de (E_3). On a alors
  $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (x+1)(2ax+b) + ax^2 + bx + c = x^2$$
  C'est-à-dire
  $$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 3ax^2 + (2a+2b)x + b + c = x^2$$
  Par unicité des coefficients d'un polynôme on a alors
  $$\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = \frac{1}{3} \end{cases}$$
  Ainsi, si P est une fonction polynomiale de degré 2 solution de (E_3) alors nécessairement P est la fonction $x \mapsto \frac{x^2-x+1}{3}$.
  Réciproquement il est ainsi de montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x^2-x+1}{3}$ est solution de (E_3).
  Finalement la fonction $x \mapsto \frac{x^2-x+1}{3}$ est bien l'unique fonction polynomiale de degré 2 solution de (E_3).
  On se place sur $]-1,+\infty[$ pour résoudre (E_3), sur cet intervalle (E_3) est équivalente à $y' + \frac{y}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$.
  Sur $x \in]-1,+\infty[$ une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est $x \mapsto \ln(x+1)$. Ainsi l'ensemble des solutions de (E_3) est
  $$\mathcal{S}_3 = \left\{x \mapsto \frac{x^2-x+1}{3} + \frac{K}{x+1}\ ,\ K \in \mathbb{R}\right\}$$