Exercice 4

① $\lambda \in Sp(A_1) \iff \det(A_1 - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & -4-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$\iff -(4-\lambda)(4+\lambda) - 9 = 0 \iff -(16-\lambda^2) - 9 = 0$

$\iff \lambda^2 - 25 = 0 \iff (\lambda-5)(\lambda+5) = 0.$

Donc $Sp(A_1) = \{-5, 5\}$.

$(x,y) \in E_{-5} \iff (A+5I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff 9x+3y = 0 \iff 3x+y=0$

$(x,y) \in E_5 \iff (A-5I)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff -x+3y=0$

Donc $E_{-5} = \text{Vect}\{u_1\}$ où $u_1 = (1,-3)$

$E_5 = \text{Vect}\{u_2\}$ où $u_2 = (3,1)$.

on vérifie que $(u_1|u_2) = 0$ [cf cours].

on pose $v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,-3)$
$v_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1)$. $\Big\} \Rightarrow (v_1, v_2) = \mathcal{B}'$ est une b.o.n de $\mathbb{R}^2$.

Alors $A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$ avec $P_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$D_1 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

on vérifie que $P_1^{-1} = {}^tP_1$ (ou que ${}^tP_1 P_1 = I$)

Soit $A_1 = P_1 D_1 {}^tP_1$

Remarque En prenant $D_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$, il fallait considérer la matrice de passage:

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ v_2 & v_1 \in E_{-5} \end{array} \end{array}$$

Exercice 4

$\lambda \in Sp(A_2) \iff rg(A_2 - \lambda I) < 3$ avec :

$$rg(A_2 - \lambda I) = rg\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} \boxed{4} & 2 & 3-\lambda \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & -2(\lambda+1) & \lambda+1 \\ 0 & 2(\lambda+1) & (\lambda+1)(7-\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 4L_3 - (3-\lambda)L_1 \end{matrix}$$

$$= rg\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & -2(\lambda+1) & \lambda+1 \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} = \boxed{rg(U_\lambda)}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ [(!) Pas de discussion sur le pivot...]

Donc $\lambda \in Sp(A_2) \iff \lambda + 1 = 0$ ou $P(\lambda) = 0$

avec $P(\lambda) = (\lambda+1)(7-\lambda) + (\lambda+1) = (\lambda+1)(8-\lambda)$.

Conclusion $\boxed{Sp(A_2) = \{-1, 8\}}$.

A_2 est symétrique donc diagonalisable dans une b.o.n de vecteurs propres...

(i) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \iff (A_2 + I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff U_{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff 4x + 2y + 4z = 0 \iff 2x + y + 2z = 0$

base orthonormée de E_{-1} ?
- $u_1 = (1, 0, -1) \in E_{-1}$
- on cherche $u_2 = (x, y, z) \in E_{-1}$ tel que $(u_2|u_1) = 0 \iff \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

$\rightarrow u_2 = (z, -4z, z)$ $\forall z \in \mathbb{R}$.

on prend $u_2 = (1, -4, 1) \in E_{-1}$ avec $(u_2|u_1) = 0$.

Soit $v_1 = \frac{1}{\|u_1\|}u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}u_1$ et $v_2 = \frac{1}{\|u_2\|}u_2 = \frac{1}{\sqrt{18}}u_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}u_2$

Alors (v_1, v_2) est une b.o.n de E_{-1}

(ii) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_8 \iff U_8\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4x + 2y - 5z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2y \\ x = 2y, \ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

$E_8 = Vect\{u_3\}$ où $u_3 = (2, 1, 2)$

$= Vect\{v_3\}$ où $v_3 = \frac{1}{\|u_3\|}u_3 = \frac{1}{3}u_3$.

Alors $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une b.o.n de vecteurs propres.

(iii) $A_2 = P_2 D_2 {}^tP_2$ où $D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$; $P_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & -4/3\sqrt{2} & 1/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \end{pmatrix}$

Exercice 4

$\lambda \in Sp(A_3) \Leftrightarrow rg(A_3 - \lambda I) = rg\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} < 3.$

avec

$rg(A_3 - \lambda I) = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \; L_1 \leftrightarrow L_3 = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} = rg(U_\lambda)$

Donc $\lambda \in Sp(A_3) \Leftrightarrow 1-\lambda = 0$ ou $1-\lambda^2 = (1-\lambda)(1+\lambda) = 0$.

Conclusion $Sp(A_3) = \{-1, 1\}$

Recherche d'une b.o.n de vecteurs propres.

(i) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow (A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow U_{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases} \; \forall z \in \mathbb{R}$

$u_1 = (1,0,-1) \in E_{-1}$ ainsi que $v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} \cdot u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$.

$E_{-1} = \mathrm{Vect}\{v_1\} \; / \; \|v_1\| = 1$

(ii) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow U_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x-z=0 \; \forall y \in \mathbb{R}$.

$E_1 = \{(x, y, x),\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

- $u_2 = (0, 1, 0) \in E_1$
- on cherche $u_3 \in E_1 \; / \; (u_3 | u_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}, \forall z \in \mathbb{R}$.
  Soit par exemple $u_3 = (1, 0, 1)$.
- (u_2, u_3) est une base orthogonale de E_1.

$\rightarrow$ On normalise cette base avec $\left| \begin{array}{l} v_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2 = u_2 \\ v_3 = \frac{1}{\|u_3\|} u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_3 \end{array} \right.$

Alors (v_2, v_3) est une b.o.n de E_1.

(iii) La juxtaposition d'une b.o.n de E_{-1} et E_1 est une b.o.n de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ b.on de $\vec{V}p$ de $\mathbb{R}^3$.

(iv) $A_3 = P_3 D_3 {}^tP_3$ avec $D_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $P_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

et

$A_3 = P_4 D_4 {}^tP_4$ avec $D_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$