



Diagonaliser une matrice ;
Calculer les puissances d'une matrice diagonalisable (avec ou sans aide de calcul).

Exercice 1 : ★

- ① Déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés pour les matrices A et B suivantes, considérées respectivement comme les matrices d'endomorphismes de \mathbb{R}^2 et de \mathbb{R}^3 .

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi[;$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

- ② Dire, parmi ces matrices, celles qui sont inversibles.
③ Calculer les puissances n èmes de ces matrices.

Exercice 2 : ★ Agro-Véto 2008

Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynômes réelles définies sur \mathbb{R}_+^* , de degré inférieur ou égale à 4, fonction nulle comprise. On considère l'application φ qui à toute fonction P de E associe la fonction $\varphi(P)$ définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\varphi(P)(x) = P(x) + 2x^4P(1/x)$$

- ① Montrer que φ est un endomorphisme de E .
② Exprimer φ^2 en fonction de φ et de l'identité. En déduire une relation vérifiée par les valeurs propres de φ . Montrer que φ est inversible et déterminer son inverse.
③ Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ . L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 3 : ★

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, matrice canoniquement associée à f et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- ① Donner une base de $\text{Ker } f$ et de $\text{Im } f$
② Montrer que tout vecteur de $\text{Im } f$ est vecteur propre de f .
③ En déduire sans calcul supplémentaire le spectre de f . f est-il diagonalisable ? Si oui, donner une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.
④ En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de N .

Exercice 4 : ★ Agro-Véto 2007

On note f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On note $e_1 = (1, 1, 1, 1)$ et $e_2 = (1, 0, 0, 1)$

- ① Montrer que (e_1, e_2) est une base de $\text{Im} f$ et déterminer une base de $\text{Ker} f$.
- ② Soit g définie sur $\text{Im} f$ par $g(x) = f(x)$. Justifier brièvement que g est un endomorphisme et écrire sa matrice dans la base (e_1, e_2) .
- ③ Déterminer une base de vecteurs propres de g , puis de f .

Exercice 5 : ★★★

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{Card}(\text{Sp}(A)) = n$. On cherche, si elles existent, les matrices de carré égale à A .

- ① On suppose que A est diagonale et qu'il existe X telle que $X^2 = A$.
 - a. Préciser la taille de X et montrer que $AX = XA$.
 - b. Calculer les coefficients de AX et de XA et en déduire que X est une matrice diagonale.
 - c. Conclure, selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , la forme et l'existence des matrices X possibles.
- ② A est cette fois non diagonale telle que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$. Déterminer les matrices B telles que $B^2 = A$.
- ③ *Application* : Déterminer les matrices de carré égale à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 9 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 : **

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ canoniquement associée à $f \in \mathcal{L}_3(\mathbb{R})$.

- ① Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de la matrice A .
- ② Soit g , un endomorphisme de \mathbb{R}^3 tel que $g^3 + 2g = f$
 - a. Démontrer que $g \circ f = f \circ g$.
 - b. En déduire que tous les sous-espaces propres de f sont stables par g et que g est diagonalisable.
 - c. Trouver tous les endomorphismes de \mathbb{R}^3 tels que $g^3 + 2g = f$.

Exercice 7 : ★★★ Agro-Véto 2007

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice A relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .

- ① Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f . A est-elle diagonalisable ?
- ② Déterminer une base \mathcal{B}'_3 de $\text{Ker}(f - 3id)^2$ et montrer que la juxtaposition d'une base \mathcal{B}_1 de $\text{Ker}(f - id)$ et de \mathcal{B}'_3 donne une base de \mathbb{R}^3 .
- ③ En déduire qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- ④ Calculer T^n pour n entier naturel non nul et en déduire A^n .

Exercice 8 : ** Agro-Véto 2019

Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{C}^3$. On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ définie par $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$.

- ① On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculer j^2 , j^3 et j^4 .

② a. Soit r et s deux nombres complexes non nuls.

Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & r^2 \\ s^2 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Donner une base de vecteurs propres de M .

b. La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & r^2 \\ s^2 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable lorsque $r = 0$ ou $s = 0$?

③ Écrire une fonction `decalage(L)` qui renvoie, si $L=[a_1, \dots, a_n]$, la liste $[a_2, \dots, a_n, a_1]$.

Utiliser cette fonction pour écrire une fonction `matrice(a1, a2, a3)` qui renvoie la matrice A .

On pourra par exemple compléter le script suivant :

```
1         def matrice(a1, a2, a3):
2             A = ...
3             L = ...
4             for i in ...
5                 A.append(L[:])
6             ...
7             return ...
```

④ Si a_1, a_2, a_3 sont réels, la matrice A est-elle diagonalisable ?

⑤ Montrer que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A . Quelle est la valeur propre associée ?

⑥ On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$. On pourra utiliser sans le justifier que la famille (U, X_1, X_2) est libre.

a. Calculer AX_1 et AX_2 .

En déduire qu'il existe des complexes r et s tels que $AX_1 = s^2 X_1$ et $AX_2 = r^2 X_1$.

b. Déterminer le spectre de A .

On pourra exprimer les valeurs propres à l'aide des complexes r et s introduits à la question 6. et utiliser la question 2.

⑦ Préciser si A est diagonalisable : (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$ et (b) $A = \begin{pmatrix} j & 1 & 0 \\ 1 & 0 & j \\ 0 & j & 1 \end{pmatrix}$