- Programme de colle - Semaine 22 -

Chapitre 9 : Réduction d'endomorphismes

1. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.
2. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments diagonaux de cette matrice.
3. Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
4. Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
5. En dimension finie, endomorphisme diagonalisable. Matrice diagonalisable. En dimension n, f ou M sont diagonalisable ssi la somme des dimensions des SEV propres est égale à n.
   Condition suffisante de diagonalisabilité si le cardinal du spectre vaut n.

Chapitre 10 : Produit scalaire

1. Bilinéarité du produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, norme euclidienne.
2. vecteurs orthogonaux, théorème de Pythagore et bases orthonormales.
3. Matrices carrées symétriques réelles diagonalisables dans une base orthonormale de vecteurs propres.
4. Projections orthogonales sur F. Écriture dans une base orthonormale de F. Relation $p \circ p = p$.
5. Distance d'un vecteur à un sous-espace de $\mathbb{R}^n$

Les questions de cours sont les suivantes :

- **Q1 :** Inégalité de Cauchy-Schwarz (✐ La discussion des cas d'égalité n'est pas un objectif du programme).
- **Q2 :** Si F ssev de $\mathbb{R}^n$ alors $F^\perp$ est ssev de $\mathbb{R}^n$ tel que $F^\perp \cap F = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
  Par ailleurs, si $B_F = (u_1, \cdots, u_q)$ est une base de F, alors $x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!]$, $(x|u_i) = 0$.
- **Q3 :** Une famille orthogonale de vecteurs non nuls de F, ssev de $\mathbb{R}^n$ est libre.
- **Q4 :** Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}' = (u_1, \cdots, u_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.
  Si P désigne la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$, alors : ${}^tPP = I_n$.
- **Q5 :** Le Spectre des matrices symétriques réelles est inclus dans $\mathbb{R}$.
- **Q6 :** Si $\mathcal{B}_F = (u_1, \cdots, u_q)$ est une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ et si p est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur F, alors : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $p(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} (u_i|x)u_i$
- **Q7 :** Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ dont $B_F = (u_1, \cdots, u_q)$ est une base et soit p la projection orthogonale sur F de $\mathbb{R}^n$. Alors : $p \circ p = p$, $\mathrm{Im}(p) = F$ et $\mathrm{Ker}(p) = F^\perp$.
- **Q8 :** Soit F un SEV de $\mathbb{R}^n$. La juxtaposition d'une b.o.n de F et de $F^\perp$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
  Conséquence : $p_F + p_{F^\perp} = id_{\mathbb{R}^n}$.
- **Q9 :** Soit p une projection orthogonale sur F SEV de $E = \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$ et $p \neq id_E$. Alors $\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$.
- **Q10 :** Expression matricielle de la projection orthogonale p sur F, droite vectorielle engendrée par un vecteur a supposé normé.

Exercices :

Tout exercice portant sur les **chapitre 9** et **chapitre 10**.

Bonne dernière semaine de colles !