- Programme de colle - Semaine 20 -

Chapitres 9 : Réduction d'endomorphismes

1. Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.
2. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments diagonaux de cette matrice.
3. Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
4. Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
5. En dimension finie, endomorphisme diagonalisable. Matrice diagonalisable. En dimension n, f ou M sont diagonalisable ssi la somme des dimensions des SEV propres est égale à n.
   Condition suffisante de diagonalisabilité si le cardinal du spectre vaut n.

Les questions de cours :

— **Q1 :** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, bijectif. Alors :
$$\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \in \mathrm{Sp}(f^{-1}) \text{ et } E_\lambda(f) = E_{1/\lambda}(f^{-1})$$

— **Q2 :** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Rightarrow \lambda^n \in \mathrm{Sp}(f^n)$ et $E_\lambda(f) \subset E_{\lambda^n}(f^n)$.

— **Q3 :** Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

— **Q4 :** Si deux matrices sont semblables alors elles ont même valeurs propres. Preuve et exemple de réciproque fausse.

— **Q5 :** A et ${}^tA$ ont même valeurs propres et $\dim(E_\lambda(A)) = \dim(E_\lambda({}^tA))$.

— **Q6 :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients sont réels. Alors :
$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \mathrm{Sp}(A) \text{ et } X \in E_\lambda(A) \Leftrightarrow \overline{X} \in E_{\bar{\lambda}}(A)$$

— **Q7 :** Si F ssev de $\mathbb{R}^n$ alors $F^\perp$ est ssev de $\mathbb{R}^n$ tel que $F^\perp \cap F = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

— **Q8 :** Si $B_F = (u_1, \cdots, u_q)$ est une base de F, alors $x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!]$, $(x|u_i) = 0$.

— **Q9 :** Une famille orthogonale de vecteurs non nuls de F, ssev de $\mathbb{R}^n$, est libre.

✐ Pas d'exercices sur les matrices symétriques cette semaine.

Les exercices porteront essentiellement sur ce chapitre mais pourront s'inscrire dans des contextes plus larges, « Polynômes, », « Équations différentielles », « variables aléatoires et matrices stochastiques », etc.

Bonne colles à tous !