8 Couples de variables aléatoires discrètes

Les objectifs : « Ce chapitre permet, par le maniement de sommes de séries, d'avoir une approche assez complète des phénomènes liés aux couples de variables aléatoires : lois conjointes, lois marginales, indépendance. »
Le programme se limite aux situations faisant intervenir des couples de variables aléatoires à valeurs positives et des séries doubles à termes positifs.

1 Séries doubles à termes positifs

Notion de suite double : Soit u une application de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note $u_{i,j}$ l'image du couple (i,j) par u. Alors $(u_{i,j})$ est dite suite double indexée par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Propriété

Proposition 1.1. Sommes doubles dans le cas fini

Soit $p,n\in\mathbb{N}^2$, $p<n$. Si $u_{i,j}$ est nul en dehors de $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, alors :

$$S_1=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p}u_{i,j}=\sum_{j=0}^{p}\sum_{i=0}^{n}u_{i,j}\ ;\ S_2=\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{i}u_{i,j}=\sum_{j=0}^{p}\sum_{i=j}^{p}u_{i,j}$$

Propriété

Proposition 1.1. Sommes doubles dans le cas infini

Pour toute suite double $(u_{i,j})$ de réels **positifs ou nuls**, *on a :*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}u_{i,j}=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}u_{i,j}$$

dès que *l'une des deux expressions est constituée de séries convergentes.*

Cette proposition prend une autre forme :

Propriété

Proposition 1.1. Sommes doubles dans le cas infini

Pour toute suite double $(u_{i,j})$ de réels **positifs ou nuls**,

① *Pour tout $i\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{j\geq 0}u_{i,j}$ converge de somme S_i et la série $\sum\limits_{i\geq 0}S_i$ converge.*

② *Pour tout $j\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{i\geq 0}u_{i,j}$ converge de somme T_j et la série $\sum\limits_{j\geq 0}T_j$ converge.*

Lorsque l'un au moins des points précédents est vérifié, alors la somme double existe et vaut :

$$S=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}u_{i,j}=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}u_{i,j}$$

2 Couples de variables aléatoires discrètes

2.1 Loi conjointe

Définition

Définition 2.1

Soit Ω un univers. On appelle `couple de variables aléatoires discrètes positives` *une application de Ω dans $\mathbb{R}_+^2$ définie par :*

$$\forall \omega \in \Omega,\ (X,Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$$

où X et Y sont deux variables aléatoires discrètes positives.

Définition

Définition 2.2

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Définir la `loi conjointe` *ou* `loi du couple` *(X,Y), c'est donner :*

① $(X,Y)(\Omega)$

② $\forall (x,y) \in (X,Y)(\Omega)$, $\mathbb{P}((X=x) \cap (Y=y))$ *aussi noté* $\mathbb{P}(X=x, Y=y)$

Propriété

Proposition 2.1

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ tel que $X(\Omega) = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in \mathbb{N}\}$. Si on pose $p_{i,j} = \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$ $\forall (x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, alors :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} p_{i,j} = 1$$

Exemple

Exemple 2.1

On lance une pièce de monnaie telle que $\mathbb{P}(P) = p$ et $\mathbb{P}(F) = 1 - p = q$ où $0 < p < 1$. Donner la loi du couple (X,Y) où X et Y sont les variables aléatoires discrètes respectivement égales au rang du premier et du deuxième pile.

Propriété

Proposition 2.2 Caractérisation des lois de couples de variables discrètes.

Soit $(p_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :

$$\forall i, j \in \mathbb{N},\ p_{i,j} \geq 0,\ \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{i,j} = 1$$

Alors la suite double $(p_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité d'un couple (X,Y).

2.2 Loi marginale

Définition

Définition 2.3

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$. La loi de X est appelée la `première loi marginale` *du couple (X,Y) et Y est appelée* `la seconde loi marginale`.

Propriété

Proposition 2.3.

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$. On obtient les lois marginales à partir de la conjointe de la façon suivante :

$$\forall x\in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}(X=x,Y=y)$$
$$\forall y\in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x,Y=y)$$

Exemple

Exemple 2.2

Soit (X,Y) un couple de variable aléatoire discrètes dont la loi conjointe est donnée par :

$$p_{i,j}=\frac{a}{i!2^j},\ \forall(i,j)\in\mathbb{N}^2$$

Déterminer a puis les lois marginales.

Exemple

Exemple 2.3

Déterminer les lois marginales du couple dont la loi conjointe a été donnée dans l'exemple 2.1.

2.3 Loi conditionnelle

Définition

Définition 2.4

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$.

① *Pour tout $y\in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y=y)\neq 0$, la* `loi conditionnelle sachant` $(Y=y)$ `de` X *est donnée par :*

$$X(\Omega)\text{ et }\forall x\in X(\Omega),\ \mathbb{P}_{(Y=y)}(X=x)=\frac{\mathbb{P}(X=x,Y=y)}{\mathbb{P}(Y=y)}$$

② *Pour tout $x\in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X=x)\neq 0$, la* `loi conditionnelle` *sachant $(X=x)$ de Y est donnée par :*

$$Y(\Omega)\text{ et }\forall y\in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{(X=x)}(Y=y)=\frac{\mathbb{P}(X=x,Y=y)}{\mathbb{P}(X=x)}$$

Exemple

Exemple 2.4

Reprendre la loi conjointe de l'exemple 2.1. et déterminer la loi conditionnelle sachant $(Y=k)$ de X pour $k\geq 2$.

3 Théorème de transfert - applications

Propriété

Proposition 3.1 Théorème de transfert

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ et soit u une fonction **positive** *définie sur $X(\Omega)\times Y(\Omega)$. Alors, sous réserve de convergence,*

$$\mathbb{E}(u(X,Y)) = \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} u(x,y)\mathbb{P}(X=x,Y=y)$$

Exemple

Exemple 3.1

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose que X et Y sont deux var à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ dont la loi est donnée par :

$$\forall i,j\in[\![1,n]\!]^2,\ \mathbb{P}(X=i,Y=j) = \begin{cases} \dfrac{2}{n(n+1)} & \text{si } i\leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $Z=XY$. Déterminer $\mathbb{E}(Z)$.

Propriété

Proposition 3.2 Espérance d'une somme

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes **positives** *sur $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ tel que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$ existent.*
Alors $\mathbb{E}(X+Y)$ existe et $\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$.
Plus généralement, si $X_1,\cdot,X_n$ sont n variables aléatoires discrètes positives qui admettent une espérance, alors $S_n = X_1+\cdot+X_n$ admet une espérance et $\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)$

Définition

Définition 3.1 Covariance

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes **positives** *sur $(\Omega,\mathcal{T},\mathbb{P})$ tel que $\mathbb{V}(X)$ et $\mathbb{V}(Y)$ existent. Alors on appelle* `covariance` *de X et de Y le réel :*

$$Cov(X,Y)=\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)))$$

Le théorème de transfert assure que, sous ces hypothèses :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} (x-\mathbb{E}(X))(y-\mathbb{E}(Y))\mathbb{P}(X=x,Y=y)$$

Pour autant, on préférera utiliser la linéarité de l'espérance et écrire que :

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)} \text{ où } \mathbb{E}(XY) = \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X=x,Y=y)$$

Propriété

Proposition 3.3 Propriétés de la covariance

Si X et Y admettent des variances, alors :

① $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$ *[Symétrie]*

② $Cov(aX_1 + bX_2, Y) = a\,Cov(X_1, Y) + b\,Cov(X_2, Y)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$
$Cov(X, cY_1 + dY_2) = c\,Cov(X, Y_1) + d\,Cov(X, Y_2)$, $\forall c, d \in \mathbb{R}$ *[Bilinéarité]*

③ $Cov(X, X) = \mathbb{V}(X)$

④ $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,Cov(X, Y)$
$\mathbb{V}(X - Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) - 2\,Cov(X, Y)$

4 Indépendance

Définition

Définition 4.1 Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. X et Y sont `indépendantes` *si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a : $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$*

Exemple

Exemple 4.1

Soit (X, Y) le couple de variables aléatoires définies dans l'exemple 2.1. Ces variables sont-elles indépendantes ?

⚠ On reliera avec attention les définitions et propriétés de l'indépendance données dans le cadre général du chapitre 2 : « Concepts de base des probabilités et des variables aléatoires ».

Propriété

Proposition 4.1 Propriétés de l'indépendance

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :

✦ $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

✦ $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$ *puisque* $Cov(X, Y) = 0$.

⚠ Attention : Si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, cela n'assure pas que X et Y sont indépendantes.

5 Loi de $u(X,Y)$:

5.1 loi du minimum et du maximum de deux ou n var indépendantes

Méthode

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires **indépendantes** *de fonctions de répartition respectives F_{X_1} et F_{X_2}.*

① *Soit $Y = max(X_1, X_2)$. On détermine $Y(\Omega)$ et sa fonction de répartition F_Y en écrivant :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \mathbb{P}\left(max(X_1, X_2) \leq x\right) = \mathbb{P}((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x)) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leq x) = F_{X_1}(x) \cdot F_{X_2}(x)$$

Dès lors, $\boxed{\forall k \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}(Y = k) = F_Y(k) - F_Y(k-1) \text{ où } F_Y(k) = F_{X_1}(k) \cdot F_{X_2}(k)}$

② *Soit $Z = min(X_1, X_2)$. On détermine $Z(\Omega)$ et on précise que :*

$$\boxed{\forall k \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \geq k) - \mathbb{P}(Z \geq k+1)}$$

Exemple

Exemple 5.1

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p')$. Déterminer la loi de $Z = min(X,Y)$

5.2 loi d'une fonction u de deux var discrètes.

Propriété

Proposition 4.2

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et soit u une fonction définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ telle que $Z = u(X,Y)$ est une variable aléatoire discrète.
Alors la loi de Z s'exprime à l'aide de la loi conjointe du couple (X,Y) avec :

$$\forall z \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}(Z = z) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ z = u(x,y)}} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

Propriété

Proposition 4.2 Somme de deux var discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Alors $S = X + Y$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ dont la loi est donnée par : $S(\Omega) = (X+Y)(\Omega)$ et $\forall z \in S(\Omega)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S = z) &= \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ z = x + y}} \mathbb{P}(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)/x \leq z} \mathbb{P}(X = x, Y = z - x) = \sum_{y \in Y(\Omega)/y \leq z} \mathbb{P}(X = z - y, Y = y)\end{aligned}$$

Exemple

Exemple 5.2

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Déterminer la loi de $S = X + Y$, son espérance et sa variance.

Exemple

Exemple 5.3

Reprendre cette fois encore le couple (X, Y) défini dans l'exemple 2.1 et déterminer la loi $Z = Y - X$

Propriété

Proposition 4.3 Loi de la somme de deux var indépendantes suivant des lois de Poisson

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Alors $S = X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
Plus généralement :
Si $X_1, \cdot, X_n$ sont des variables mutuellement indépendantes telles que X_k suit une loi de Poisson de paramètre λ_k pour tout $k \in [\![1, k]\!]$. Alors : $S_n = X_1 + \cdot + X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k)$