

**MATHEMATIQUES**  
**Var discrètes et algèbre linéaire**

**Problème :**

**Préliminaire : Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans  $I_n$**

*Rappel de notations :* Pour tout entier naturel  $n$ ,  $I_n$  désigne l'ensemble des entiers naturels  $k$  tels que  $0 \leq k \leq n$  et  $I_n^*$  l'ensemble des entiers naturels  $k$  tels que  $1 \leq k \leq n$ .

Pour une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , on pose, pour tout réel  $t$  pour lequel cela a un sens,

$$g_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k$$

où  $\mathbb{E}$  désigne l'espérance. La fonction  $g_X$  est appelée fonction génératrice de la variable aléatoire  $X$ .

Pour tout  $k \in I_n$ , on note  $a_k = \mathbb{P}(X = k)$  la probabilité que  $X$  prenne la valeur  $k$ .

- ① a) *Montrons que  $g_X$  est une fonction polynôme à coefficients réels dont on précisera le degré maximal. Quelle est la valeur de  $g_X(1)$  ?*

Si  $X(\Omega) \subset I_n = \llbracket 0, n \rrbracket$ , alors  $a_k = \mathbb{P}(X = k) = 0, \forall k > n$ . D'où :

$\forall t \in \mathbb{R}, g_X(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ . Ce qui prouve que  $g_X$  est un polynôme de degré **au plus**  $n$ .

$$g_X(1) = \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) = 1 \text{ puisque } X(\Omega) \subset I_n = \llbracket 0, n \rrbracket.$$

**Conclusion :**  $g_X(1) = 1$ .

**Lu dans le rapport de jury :** « [AgroB 2011] Certains candidats conservent des séries et parlent de polynômes de degré infini. On voit des formules mathématiques fausses, par

exemple : pour tout  $k$  de  $I_n$ , pour tout  $x$   $g_x(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ , quelques résultats fantaisistes,

par exemple :  $g_X(1) = a_0 + a_1$  ou  $g_X(1) = \frac{n+1}{2}(a_0 + a_n)$  ».

- b) On souhaite montrer que si  $g_X$  est donnée, alors la loi de  $X$  est entièrement connue :
- i. Pour tout  $k \in I_n$  fixé, montrons que pour tout entier naturel  $i$ , la dérivée  $i$ -ième du monôme  $X^k$  vaut :

$$(X^k)^{(i)} = \begin{cases} \frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i} & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$k$  étant fixé, on commence par noter que si  $i > k$ , l'ordre de la dérivée est supérieur au degré du monôme  $X^k$  et donc  $(X^k)^{(i)} = 0$ .

On peut alors montrer par récurrence sur  $i$  que  $\forall i \leq k, (X^k)^{(i)} = \frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i} : (\mathcal{R}_i)$ .

En effet :

- Pour  $i = 0$  :  $(X^k)^{(0)} = X^k = \frac{k!}{k!} X^{k-0}$ . La relation  $(\mathcal{R}_0)$  est donc vraie au rang 0.
- On suppose  $(\mathcal{R}_i)$  vraie pour  $i$  fixé,  $0 \leq i < k$ .
- Montrons que  $(\mathcal{R}_{i+1})$  est vraie :

$$(X^k)^{(i+1)} = ((X^k)^{(i)})' = \left( \frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i} \right)' = \frac{k!}{(k-i)!} (k-i) X^{k-i-1}$$

Soit  $(X^k)^{(i+1)} = \frac{k!}{(k-i+1)!} X^{k-(i+1)}$ . Ce qui prouve que  $\mathcal{R}_{i+1}$  est vraie.

- **Conclusion** :  $\boxed{\mathcal{R}_i \text{ est vraie pour tout } i \leq k}$ .

**Lu dans le rapport de jury** : « [AgroB-2011] Bien traitée dans 50% des copies ».

- ii. Exprimons  $g_X^{(i)}(t)$  sous forme d'une somme qui dépend des  $a_k$ ,  $t$  et  $i$  :

Nous savons que pour tout  $t$  réel,  $g_X(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ .

Donc par linéarité de la dérivation :

$$g_X^{(i)}(t) = \sum_{k=0}^n a_k (t^k)^{(i)} = \sum_{k=0}^{i-1} a_k (t^k)^{(i)} + \sum_{k=i}^n a_k (t^k)^{(i)} = \sum_{k=i}^n a_k \frac{k!}{(k-i)!} t^{k-i}$$

On en déduit que  $g_X^{(i)}(0) = \sum_{k=i}^n a_k \frac{k!}{(k-i)!} 0^{k-i} = a_i \cdot i!$

- iii. Il suffit de diviser l'égalité précédente par  $i!$  pour obtenir l'expression de  $a_i = \frac{g_X^{(i)}(0)}{i!}$

**Conclusion** :  $\boxed{\forall k \in I_n, \mathbb{P}(X = k) = \frac{g_X^{(k)}(0)}{k!}}$ .

- c)  $g_X$  est une fonction polynôme. Elle est donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et en particulier dérivable deux fois sur  $\mathbb{R}$ . Un calcul immédiat donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g_X'(t) = \sum_{k=1}^n a_k k t^{k-1}$$

soit

$$\boxed{g_X'(1) = \sum_{k=1}^n a_k k = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X)}$$

De même :

$$g_X''(t) = \sum_{k=2}^n a_k k(k-1) t^{k-2} \text{ et donc } g_X''(1) = \sum_{k=2}^n k(k-1) \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X(X-1))$$

D'après le théorème de transfert.

Dès lors, d'après le théorème de Koëning-Huygens et par linéarité de l'intégrale :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}^2(X)$$

**Conclusion** :  $\boxed{\mathbb{V}(X) = g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2}$

- ② Soient  $(m_1, m_2)$  deux entiers naturels et  $(Z_1, Z_2)$  deux variables aléatoires réelles à valeurs respectivement dans  $I_{m_1}$  et  $I_{m_2}$ . On suppose que  $Z_1$  et  $Z_2$  sont indépendantes.

En utilisant pour tout réel  $t$  l'expression  $g_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$ , montrons que :

$$g_{Z_1+Z_2}(t) = g_{Z_1}(t) \cdot g_{Z_2}(t)$$

Pour tout réel  $t$ ,  $E(t^{Z_1+Z_2}) = E(t^{Z_1}t^{Z_2}) = E(t^{Z_1})E(t^{Z_2})$  car les variables aléatoires  $Z_1$  et  $Z_2$  étant indépendantes,  $t^{Z_1}$  et  $t^{Z_2}$  sont indépendantes. On a bien :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, g_{Z_1+Z_2}(t) = g_{Z_1}(t)g_{Z_2}(t)}$$

**Lu dans le rapport de jury :** « [Agro 2011] Beaucoup de candidats utilisent le résultat donné en début d'énoncé en justifiant son application par l'indépendance de  $X_1$  et  $X_2$  : peu d'entre eux pensent à en déduire l'indépendance de  $t^{X_1}$  et  $t^{X_2}$ .

Quelques candidats justifient l'égalité  $E(t^{X_1}t^{X_2}) = E(t^{X_1})E(t^{X_2})$  par la linéarité de l'espérance !! »

③ **Application :**

- a) Calculons la fonction génératrice d'une variable aléatoire  $X$  suivant la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  avec  $p > 0$  :

Si  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ , alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, g_X(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k = (pt + q)^n. \quad (\text{On a posé } q = 1 - p).$$

**Lu dans le rapport de jury :** « [AgroB-2011] Résultat trouvé dans environ 60% des copies ».

Retrouvons grâce à cette fonction l'espérance d'une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  :

Il suffit, d'après 1.c) de calculer  $g'_X(t) = np(pt + q)^{n-1}$ .

$$\boxed{\text{Conclusion : } \mathbb{E}(X) = g'_X(1) = np(p + q) = np}$$

- b) Soit  $Y$  une variable aléatoire réelle suivant la loi binomiale de paramètres  $n'$  et  $p$  avec  $n'$  un entier naturel. On suppose que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes. Montrons que  $X + Y$  suit la loi binomiale de paramètres  $n + n'$  et  $p$  :

Si  $Y$  suit aussi une loi binomiale de paramètres  $n'$  et  $p$ , et si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t) = (pt + q)^n (pt + q)^{n'} = (pt + q)^{n+n'}$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres  $n + n'$  et  $p$ .

La fonction génératrice caractérise une loi.

$$\boxed{\text{Conclusion : } X + Y \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n + n' \text{ et } p.}$$

**Lu dans le rapport de jury :** « [AgroB-2011] Résultat trouvé correctement dans 50% des candidats. Parmi les autres, quelques uns se contentent de dire que ce résultat est dans le cours ; d'autres essayent de le retrouver à partir de lois, généralement en finissant par affirmer le résultat ».

## Partie I : Simulation numérique

On suppose avoir importé la fonction `randint` du module `random`.

☞ Toute autre fonction est interdite dans cette partie, et cela inclus notamment `np.sum` et `np.mean`

- ① Écrivons une fonction Python `simulZ(n,k)` d'argument l'entier  $n$  égale au nombre de stations distinctes du dépôt et un entier naturel  $k$  et qui renvoie une valeur simulée de la variable aléatoire  $Z_k$  :

Au départ le bus est en  $S=n$ .

Ensuite, à chaque instant, il atteint de façon équiprobable une station dont le numéro est compris entre 0 et  $S$ . Il suffit d'exécuter la fonction `S = rdm.randint(0,S)`. Cette station  $S$  devient son nouveau lieu de départ. Il suffit alors de modéliser  $k$  choix de stations successifs pour simuler la station atteinte au  $k$ -ième trajet en notant que `rdm.random(0,0)` retourne 0.

Une écriture possible est donc la suivante :

```
def simulZ(n,k):
    S = n # station initiale.
    for i in range(k): # pour chaque déplacement
        S = rdm.randint(0,S)
    return S
```

- ② Écrivons une fonction `freqZ(n,k,m)` d'argument l'entier  $n$  associé au nombre de stations, un entier naturel  $k$  et un entier naturel non nul  $m$  (supposé grand) et qui renvoie la liste de longueur  $n+1$  des fréquences de réalisation des événements ( $Z_k = i$ ) pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  au cours de  $m$  simulations indépendantes de la variable aléatoire  $Z_k$  :

On commence par initialiser la liste demandée en exécutant `L = [0]*(n+1)`.

Ensuite on appelle  $m$  fois la fonction précédente. Si elle retourne le sommet `iS`, on augmente de 1 la fréquence de réalisation de l'événement ( $Z_k = i$ ) situé en `L[iS]`.

Une écriture possible est la suivante :

```
def freqZ(n,k,m):
    L = [0]*(n+1) # fréquence de chaque station possible
    for i in range(m):
        nS = simulZ(n,k)
        L[nS] += 1
    return [x/m for x in L]
```

A titre d'exemple, voici quelques fréquences retournées pour  $n = 10$  stations :

```
freqZ(10,2,100) = [0.16, 0.22, 0.14, 0.09, 0.14, 0.1, 0.06, 0.05, 0.02, 0.02, 0]
freqZ(10,4,100) = [0.65, 0.23, 0.07, 0.03, 0.01, 0.0, 0.0, 0.01, 0, 0, 0]
freqZ(10,6,100) = [0.88, 0.08, 0.02, 0.02, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
```

On constate que plus  $k$  augmente, plus la probabilité de se retrouver au dépôt est grande ( $S = 0$ ) et plus la probabilité d'être proche de  $S = n$  est faible.

- ③ Écrivons une fonction `moyEmpirZ(n, k, m)` d'argument l'entier  $n$  associé au nombre de stations, un entier naturel  $k$  et un entier naturel non nul  $m$  (supposé grand) et qui renvoie la moyenne de  $m$  simulations indépendantes de la variable aléatoire  $Z_k$  :

On rappelle que  $\bar{x} = \sum_{i=0}^p \frac{n_i x_i}{n} = \sum_{i=0}^p f_i x_i$  où  $f_i = \frac{n_i}{n}$  et  $\sum_{i=0}^p n_i = n$ .

Dès lors :

```
def moyEmpirZ(n,k,m):
    L = freqZ(n,k,m)
    moy = 0
    for j in range(n+1):
        moy += L[j]*j
    return moy
```

A titre d'exemples, si  $n = 2$  stations entre le bus et son dépôt :

```
moyEmpirZ(2,0,1000) = 2.0
moyEmpirZ(2,1,1000) = 1.022
moyEmpirZ(2,2,1000) = 0.5059
moyEmpirZ(2,3,1000) = 0.2484
moyEmpirZ(2,4,1000) = 0.1291
```

✍ Dans les parties II et III qui suivent, et dans ces parties uniquement, on se place dans le cas particulier où  $n = 2$ . Le bus dessert donc les stations  $S_0$ ,  $S_1$  et  $S_2$  et se trouve initialement en  $S_2$ .

## Partie II : Étude théorique.

- ① a) Déterminons les lois des variables aléatoires  $Z_0$ ,  $Z_1$  et  $Z_2$  :

$Z_0$  est la variable aléatoire certaine égale à 2. **Conclusion** :  $Z_0 = 2$ .

D'après l'énoncé,  $Z_1$  suit la loi uniforme sur  $[[0, 2]]$ . **Conclusion** :  $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[[0,2]]}$

La loi de  $Z_2$  n'est pas une loi usuelle.

$Z_2(\Omega) = [[0, 2]]$  car le bus peut être sur n'importe laquelle des stations.

Pour déterminer  $\mathbb{P}(Z_2 = k)$ , on applique la formule des probabilités totales en utilisant le système complet d'événements :  $\{(Z_1 = 0), (Z_1 = 1), (Z_1 = 2)\}$ . On obtient :

$$\mathbb{P}(Z_2 = k) = \mathbb{P}(Z_2 = k, Z_1 = 0) + \mathbb{P}(Z_2 = k, Z_1 = 1) + \mathbb{P}(Z_2 = k, Z_1 = 2)$$

Soit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_2 = 0) &= \mathbb{P}_{(Z_1=0)}(Z_2 = 0)\mathbb{P}(Z_1 = 0) + \mathbb{P}_{(Z_1=1)}(Z_2 = 0)\mathbb{P}(Z_1 = 1) + \mathbb{P}_{(Z_1=2)}(Z_2 = 0)\mathbb{P}(Z_1 = 2) \\ &= \mathbb{P}_{(Z_1=0)}(Z_2 = 0)\frac{1}{3} + \mathbb{P}_{(Z_1=1)}(Z_2 = 0)\frac{1}{3} + \mathbb{P}_{(Z_1=2)}(Z_2 = 0)\frac{1}{3} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6 + 3 + 2}{18} = \frac{11}{18} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_2 = 1) &= \mathbb{P}_{(Z_1=0)}(Z_2 = 1)\frac{1}{3} + \mathbb{P}_{(Z_1=1)}(Z_2 = 1)\frac{1}{3} + \mathbb{P}_{(Z_1=2)}(Z_2 = 1)\frac{1}{3} \\ &= 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{0 + 3 + 2}{18} = \frac{5}{18}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_2 = 2) &= \mathbb{P}_{(Z_1=0)}(Z_2 = 2)\frac{1}{3} + \mathbb{P}_{(Z_1=1)}(Z_2 = 2)\frac{1}{3} + \mathbb{P}_{(Z_1=2)}(Z_2 = 2)\frac{1}{3} \\ &= 0 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{18}\end{aligned}$$

**Conclusion :**  $Z_2(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}(Z_2 = 0) = \frac{11}{18}$ ,  $\mathbb{P}(Z_2 = 1) = \frac{5}{18}$ ,  $\mathbb{P}(Z_2 = 2) = \frac{2}{18}$

b) Calculons l'espérance et la variance de chacune des variables aléatoires  $Z_0$ ,  $Z_1$  et  $Z_2$  :

Les calculs sont rapides :

$\mathbb{E}(Z_0) = 2$ ,  $\mathbb{V}(Z_0) = 0$  car  $Z_0$  est une variable aléatoire certaine.

Pour  $Z_1$  :  $\mathbb{E}(Z_1) = \frac{0+2}{2} = 1$  d'après le cours sur les lois uniformes.

$$\mathbb{E}(Z_1^2) = 0^2\mathbb{P}(Z_1 = 0) + 1^2\mathbb{P}(Z_1 = 1) + 2^2\mathbb{P}(Z_1 = 2) = \frac{5}{3}.$$

D'où, d'après la formule de Koëning-Huygens :

$$\mathbb{V}(Z_1) = E(Z_1^2) - \mathbb{E}(Z_1)^2 = \frac{5}{3} - 1^2, \text{ soit } \mathbb{V}(Z_1) = \frac{2}{3}$$

Pour  $Z_2$  :  $\mathbb{E}(Z_2) = 0\mathbb{P}(Z_2 = 0) + 1\mathbb{P}(Z_2 = 1) + 2\mathbb{P}(Z_2 = 2) = \frac{5 + 2 \times 2}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ .

$$\mathbb{E}(Z_2^2) = 0^2\mathbb{P}(Z_2 = 0) + 1^2\mathbb{P}(Z_2 = 1) + 2^2\mathbb{P}(Z_2 = 2) = \frac{5 + 2^2 \times 2}{18} = \frac{13}{18}.$$

D'où, d'après la formule de Koëning-Huygens :

$$\mathbb{V}(Z_2) = E(Z_2^2) - \mathbb{E}(Z_2)^2 = \frac{13}{18} - \frac{1}{4}, \text{ soit } \mathbb{V}(Z_2) = \frac{17}{36}$$

②  $\forall k \in \mathbb{N}$ , on note  $C_k$  la colonne définie par  $C_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Z_k = 0) \\ \mathbb{P}(Z_k = 1) \\ \mathbb{P}(Z_k = 2) \end{pmatrix}$  et  $B$  la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ .

a) Démontrons que pour tout entier naturel  $k$ , on a :  $C_{k+1} = B \cdot C_k$ .

La démonstration repose sur l'application de la formule des probabilités totale en utilisant le système complet d'événements :  $\{(Z_k = 0), (Z_k = 1), (Z_k = 2)\}$ .

On obtient pour tout  $i \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$  :

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = k) = \mathbb{P}(Z_{k+1} = k, Z_k = 0) + \mathbb{P}(Z_{k+1} = k, Z_k = 1) + \mathbb{P}(Z_{k+1} = k, Z_k = 2)$$

ou encore :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_{k+1} = k) &= \mathbb{P}_{(Z_k=0)}(Z_{k+1} = k)\mathbb{P}(Z_k = 0) + \mathbb{P}_{(Z_k=1)}(Z_{k+1} = k)\mathbb{P}(Z_k = \\ &1) + \mathbb{P}_{(Z_k=2)}(Z_{k+1} = k)\mathbb{P}(Z_k = 2)\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(Z_{k+1} = 0) &= 1\mathbb{P}(Z_k = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z_k = 1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(Z_k = 2) \\ \mathbb{P}(Z_{k+1} = 1) &= 0\mathbb{P}(Z_k = 0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z_k = 1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(Z_k = 2) \\ \mathbb{P}(Z_{k+1} = 2) &= 0\mathbb{P}(Z_k = 0) + 0\mathbb{P}(Z_k = 1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(Z_k = 2) \end{cases}$$

Ce qui, matriciellement, s'exprime bien sous la forme  $C_{k+1} = B \cdot C_k$

b) Déterminons les valeurs propres de  $B$  et les sous-espaces propres correspondants :

La matrice  $B$  est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

**Conclusion :**  $\text{Sp}(B) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

Déterminons maintenant chacun des sous-espaces vectoriels propres :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 = \ker(B - I_3) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1/2y + 1/3z = 0 \\ -1/2y + 1/3z = 0 \\ 1/3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{1/2} = \ker\left(B - \frac{1}{2}I_3\right) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1/2x + 1/2y + 1/3z = 0 \\ 1/3z = 0 \\ -1/6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{1/3} = \ker\left(B - \frac{1}{3}I_3\right) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2/3x + 1/2y + 1/3z = 0 \\ 1/6y + 1/3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3/2y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z \\ 2x - 3z + 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z \\ x = z \\ \forall z \in \mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } E_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, E_{1/2} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, E_{1/3} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- c) Montrons que la matrice  $B$  est diagonalisable et déterminons une matrice  $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  inversible et dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice  $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  diagonale dont les éléments diagonaux  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  vérifient  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$  telles que :  $B = PDP^{-1}$  :

La matrice  $B$  est une matrice d'ordre 3 qui admet 3 valeurs propres distinctes, donc  $B$  est diagonalisable.

La juxtaposition des bases respectives de  $E_1, E_{1/2}$  et  $E_{1/3}$  forme une famille libre de cardinal 3 de  $\mathbb{R}^3$  donc  $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  formée de vecteurs propres de  $B$ , où on a posé :

$$u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (1, -1, 0) \text{ et } u_3 = (1, -2, 1)$$

On en déduit que :

$$B = PDP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- d) Justifions l'inversibilité de  $P$  et calculons  $P^{-1}$  :

$P$  est la matrice d'une base de  $\mathbb{R}^3$  et à ce titre son rang est égale à son ordre :  $P$  est inversible. Calculons  $P^{-1}$  :

$$PX' = X \Leftrightarrow \begin{cases} x' + y' + z' = x \\ -y' - 2z' = y \\ z' = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' = z \\ y' = -y - 2z \\ x' = x + y + 2z - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = -y - 2z \\ z' = z \end{cases}$$

$$\text{Conclusion : } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P \quad \Leftrightarrow \text{On peut vérifier } P^2 = P \dots$$

- e) Écrivons pour tout entier naturel  $k$  la matrice  $B^k$  comme produit matriciel de matrices connues et déterminer la dernière colonne de  $B^k$  :

D'après la question 2.c) nous avons :  $B = PDP^{-1}$  et donc par récurrence :

$$B^k = PD^k P^{-1}, \forall k \in \mathbb{N} \text{ [à écrire dans la copie]}$$

La dernière colonne  $H_k$  de  $B^k$  s'obtient en effectuant le produit matriciel :  $H_k = B^k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

D'où :

$$\begin{aligned} H_k &= PD^k P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^k & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{3})^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2(\frac{1}{2})^k \\ (\frac{1}{3})^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$



$$\text{Conclusion : } H_k = \begin{pmatrix} 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^k - 2\left(\frac{1}{3}\right)^k \\ \left(\frac{1}{3}\right)^k \end{pmatrix}$$

f) Précisons la valeur de  $C_0$  et déduisons de la question précédente, pour tout entier naturel  $k$ , la loi de la variable aléatoire  $Z_k$  :

Puisque le bus est en  $S_2$ , on a vu que  $Z_0$  est la variable aléatoire certaine égale à 2, soit

$C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et de la relation  $C_{k+1} = B \cdot C_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on en déduit par récurrence :

$C_k = B^k C_0, \forall k \in \mathbb{N}$ .

On a donc :  $C_k = H_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . D'où l'on peut déduire la loi de  $Z_k$  :

$$\text{Conclusion : } Z_k(\Omega) = \llbracket 0, 2 \rrbracket, \begin{cases} \mathbb{P}(Z_k = 0) &= 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ \mathbb{P}(Z_k = 1) &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^k - 2\left(\frac{1}{3}\right)^k \\ \mathbb{P}(Z_k = 2) &= \left(\frac{1}{3}\right)^k \end{cases}$$

g) Calculons l'espérance de pour tout entier naturel  $k$  :

Par définition de l'espérance, on a immédiatement :

$$\mathbb{E}(Z_k) = \mathbb{P}(Z_k = 1) + 2\mathbb{P}(Z_k = 2) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^k - 2\left(\frac{1}{3}\right)^k + 2\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$\text{Conclusion : } \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(Z_k) = \frac{1}{2^{k-1}}$$

### Partie III : Étude du temps d'arrivée au dépôt.

① Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , soit  $A_k$  l'événement : « le bus arrive (pour la première fois) au dépôt à l'instant  $k$  ». En remarquant qu'une fois que le bus arrive en  $S_0$ , il n'en repart plus, exprimer  $A_k$  en fonction des événements  $(Z_k = 0)$  et  $(Z_{k-1} = 0)$ .

On note que  $A_k$  est réalisé si, et seulement si, le bus est au dépôt à l'instant  $k$  et n'y était pas à l'instant  $k-1$ . Autrement dit :

$$A_k = (Z_k = 0) \cap \overline{(Z_{k-1} = 0)} = (Z_k = 0) \setminus (Z_{k-1} = 0)$$

Dès lors :

$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}((Z_k = 0) \setminus (Z_{k-1} = 0)) = \mathbb{P}(Z_k = 0) - \mathbb{P}(Z_{k-1} = 0)$$

puisque  $(Z_{k-1} = 0) \subset (Z_k = 0)$  (en effet s'il est au dépôt à l'instant  $k$ , alors il y sera nécessairement à l'instant  $k+1$ ...)

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_k) &= 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(A_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

- ② Déterminons la probabilité de l'événement  $F$  : « le bus n'arrive jamais au dépôt » :  
On note que  $\{F, (A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}\}$  est un système complet d'événements. Dès lors :

$$\mathbb{P}(F) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = 1$$

On rappelle que, d'après les propriétés des séries géométriques :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

**Conclusion :**  $\mathbb{P}(F) = 0$  - l'événement  $F$  est quasi impossible.

- ③ Soit  $T$  la variable aléatoire égale à l'instant où le bus arrive au dépôt. Donnons la loi de  $T$  et calculons son espérance :

On commence par noter que  $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(A_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

Nous venons de déterminer la loi de  $T$ ...

Pour l'espérance, on commence par justifier son existence en étudiant la convergence absolue de la série  $\sum k\mathbb{P}(T = k)$  qui est aussi sa convergence puisque ses termes sont positifs. Or les séries  $\sum k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$  et  $\sum k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$  sont des séries géométriques dérivées convergentes car  $|\frac{1}{2}| < 1$  et  $|\frac{1}{3}| < 1$ , donc  $\sum k\mathbb{P}(T = k)$  converge comme combinaison linéaire de séries convergentes. La variable aléatoire  $T$  admet une espérance et

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2})^2} - \frac{2}{3} \frac{1}{(1 - \frac{1}{3})^2} = 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = 4 - \frac{3}{2}$$

**Conclusion :**  $\mathbb{E}(T) = \frac{5}{2}$

- ④ Écrivons une fonction `simulT(n)` d'argument l'indice  $n$  de la station de départ, qui renvoie une valeur simulée de la variable aléatoire  $T$  définie ci-dessus :

Il suffit de faire avancer le bus conformément à la simulation réalisée dans la partie I jusqu'à ce qu'il atteigne le dépôt (on rappelle que dans cette partie, il part de la station  $S_2$ )

On ne sait pas combien d'instant seront nécessaire pour que cet événement (quasi certain) d'arriver au dépôt se réalise aussi on utilise donc une structure répétitive « Tant que ».

Une rédaction possible est :

```
def simulT():
    t = 0
    S = 2 # le bus est en S2 au départ
    while S != 0:
        S = rdm.randint(0,S)
        t += 1
    return t
```

- ⑤ Il s'agit de proposer une méthode utilisant Python permettant de confirmer la valeur théorique de  $\mathbb{E}(T)$  trouvée ci-dessus :

En utilisant le Théorème Central Limite, on peut réaliser un grand nombre de fois la simulation de la variable aléatoire  $T$  dont on calcule la moyenne empirique qui est un estimateur sans biais de  $\mathbb{E}(T)$ .

Puisqu'on ne peut pas utiliser `np.mean` ou `np.sum`, on écrira :

```
def moyEmpirT(m):
    St = 0
    for k in range(m):
        St += simulT()
    return St/m
```

En prenant  $m = 1000$  et en exécutant : `print('moy empirique = ',moyEmpirT(m),'esperance = ',5/2)`

on a obtenu l'affichage : `moy empirique = 2.488 esperance = 2.5`

## Partie IV : Retour au cas général.

Désormais le bus dessert les stations  $S_0, \dots, S_n$  où  $n \in \mathbb{N}^*$  et il est à l'instant 0 à la station  $S_n$ .

### IV/ A. Étude d'un endomorphisme

On note  $E_n$  l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[X]$  ds polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$  et  $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$  la base canonique de  $E_n$ .

On considère  $f$  l'application qui à tout polynôme  $P$  de  $E_n$  associe le polynôme  $Q$  défini par :

$$Q = (X - 1)P' + P$$

c'est-à-dire la fonction polynomiale  $Q$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x)$ .

① Montrons que l'application  $f$  ainsi définie est un endomorphisme de  $E_n$  :

— Linéarité de  $f$  :  $\forall P, Q \in E_n, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,

$$f(\lambda P + \mu Q) = (X-1)(\lambda P + \mu Q)' + \lambda P + \mu Q = \lambda(X-1)P' + \lambda P + \mu(X-1)Q' + \mu Q$$

par linéarité de la dérivée.

$$\text{soit } f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$$

— Montrons que  $f(E_n) \subset E_n$  : Soit  $P \in E_n$ , alors  $\deg(P') \leq n-1 \Rightarrow \deg((X-1)P') \leq n$  car le degré d'un produit de polynôme est égale à la somme de leur degré.

Dès lors  $(X-1)P' \in E_n$  et  $P \in E_n$  donc  $f(P) \in E_n$  car  $E_n$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Conclusion** :  $f$  est un endomorphisme de  $E_n$

② Déterminons la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  :

Il suffit de calculer l'image de la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$  de  $E_n$  par  $f$  :

$$f(1) = 1 \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(X^k) = (X-1)kX^{k-1} + X^k = -kX^{k-1} + (k+1)X^k.$$

Soit **Conclusion** :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}$$

③ En déduire les valeurs propres de  $f$  : Il suffit de noter que  $A$  est une matrice triangulaire supérieure. Ses valeurs propres se lisent donc sur sa diagonale. Soit  $\text{Sp}(f) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$

Par ailleurs  $f$  admet  $n+1$  valeurs propres distinctes dans un espace  $E_n$  dont on rappelle qu'il est de dimension  $n+1$ . Donc  $f$  est diagonalisable.

Le cours assure par ailleurs que, dans ces conditions,  $\dim(E_\lambda(f)) = 1, \forall \lambda \in \text{Sp}(f)$ .

④ Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ . Soit  $P$  un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . Montrons que  $P$  est solution sur  $]1, +\infty[$  d'une équation différentielle linéaire du premier ordre qu'on précisera :

$$\text{On a } f(P) = \lambda P \Leftrightarrow (x-1)P'(x) + P(x) = \lambda P(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc  $P$  est solution sur  $\mathbb{R}$ , et a fortiori sur  $]1, +\infty[$ , de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_\lambda) : (x-1)y' + (1-\lambda)y = 0.$$

⑤ Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , résolvons sur  $]1, +\infty[$  l'équation différentielle  $(E_k) : (x-1)y' - ky = 0$  :

Sur  $]1, +\infty[$ ,  $(E_k) \Leftrightarrow y' - \frac{k}{(x-1)}y = 0$ . Posons  $a : x \mapsto \frac{k}{x-1}$ . Cette fonction est continue sur

$]1, +\infty[$  et admet une primitive  $A : x \mapsto k \ln(x-1)$ .

Dès lors, les solutions de  $(E_k)$  sont les fonctions  $y : x \mapsto C e^{k \ln(x-1)} = C(x-1)^k$

**Conclusion** : L'ensemble des solutions de  $(E_k)$  est  $\text{Vect}\{x \mapsto (x-1)^k\}$

⑥ Déduisons-en une base  $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, \dots, P_n)$  de  $E_n$  dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale et telle que pour  $0 \leq j \leq n$ , le polynôme  $P_j$  soit de degré  $j$  et de coefficient dominant égale à

1 :

$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P_j = (X - 1)^j$  est un polynôme de degré  $j$  et de coefficient dominant égale à 1.

On rappelle par ailleurs que  $f(P_j) = (X - 1)P_j'(X) + P_j$ .

Donc :

— Pour  $P_0 = 1$ ,  $f(P_0) = f(1) = 1 = P_0$  :  $P_0$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 1

— Et d'après les questions IV.4. et IV.5., pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$f(P_j) = (j + 1)P_j$$

Ou encore,  $P_j = (X - 1)^j$  est vecteur propre associé à la valeur propre  $1 - \lambda$ .

La famille de polynôme  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  étant échelonnée en degré, elle est libre. Et comme son cardinal est égale à  $n + 1 = \dim(E_n)$ , c'est une base de  $E_n$  formée de vecteurs propres de  $f$ .

**Conclusion** :  $\mathcal{B}' = ((1 - X)^j, j \in \llbracket 0, n \rrbracket)$  est une base de  $E_n$  dans laquelle  $f$  est diagonale

⑦ Justifions que  $f$  est bijectif :

Il suffit de dire que  $0 \notin \text{Sp}(f)$ . **Conclusion** :  $f$  est bijectif.

On note par la suite  $g = f^{-1}$ .

⑧ Justifions que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$  l'égalité :  $g^k(P_j) = \frac{1}{(j + 1)^k} P_j$

C'est une question de cours.

Dans un premier temps,  $(j + 1) \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow \frac{1}{j + 1} \in \text{Sp}(g)$  et  $E_{j+1}(f) = E_{\frac{1}{j+1}}(g)$ .

Donc,  $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $g(P_j) = \frac{1}{j + 1} P_j$ .

Par récurrence, on montre alors que,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $g^k(P_j) = \frac{1}{(j + 1)^k} P_j$ .

En effet,

$$\begin{aligned} g^{k+1}(P_j) &= g(g^k(P_j)) = g\left(\frac{1}{(j + 1)^k} P_j\right) = \frac{1}{(j + 1)^k} g(P_j) \\ &= \frac{1}{(j + 1)^k} \frac{1}{(j + 1)} P_j = \frac{1}{(j + 1)^{k+1}} P_j \end{aligned}$$

**Conclusion** :  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, g^k(P_j) = \frac{1}{(j + 1)^k} P_j$

#### IV/ B. Étude de la variable aléatoire $Z_k$

Pour tout entier naturel  $k$  on note  $F_k$  la fonction génératrice de  $Z_k$  dont on rappelle qu'elle est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_k(x) = \sum_{r=0}^n \mathbb{P}(Z_k = r) x^r = \mathbb{P}(Z_k = 0) + \mathbb{P}(Z_k = 1)x + \dots + \mathbb{P}(Z_k = n)x^n$$

① Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , rappelons ce que valent  $F_k(1)$  et  $F_k'(1)$  pour la variable aléatoire  $Z_k$  :

On l'a en effet vu dans les préliminaires :  $F_k(1) = 1$  et  $F_k'(1) = \mathbb{E}(Z_k)$

② Précisons les polynômes  $F_0$  et  $F_1$  dans la base canonique :

— Comme  $Z_0$  est la variable aléatoire certaine égale à  $n$ , on a  $\mathbb{P}(Z_0 = n) = 1$ . Donc :

$$F_0(x) = 0 + 0x + \dots + 0x^{n-1} + 1x^n = x^n$$

**Conclusion :**  $F_0 = X^n$

— Comme  $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,n]}$ ,  $\mathbb{P}(Z_1 = r) = \frac{1}{n+1}$ ,  $\forall r \in [0, n]$ . Donc :

$$F_1(x) = \sum_{r=0}^n \mathbb{P}(Z_1 = r)x^r = \frac{1}{n+1} \sum_{r=0}^n x^r$$

**Conclusion :**  $F_1 = \frac{1}{n+1}(1 + X + \dots + X^n)$

③ Pour utiliser la formule des probabilités totales, on note que  $\{(Z_k = n), n \in [0, n]\}$  est un système complet d'événement. Donc

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = r) = \sum_{j=0}^n \mathbb{P}(Z_{k+1} = r, Z_k = j) = \sum_{j=0}^n \mathbb{P}_{(Z_k=j)}(Z_{k+1} = r)\mathbb{P}(Z_k = j)$$

On rappelle que si le bus est à la station  $S_r$  alors il ne peut venir d'un arrêt  $S_k$  où  $k < r$ . Autrement dit,  $\mathbb{P}_{(Z_k=j)}(Z_{k+1} = r) = 0$  si  $j < r$ .

Dès lors :

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = r) = \sum_{j=r}^n \mathbb{P}_{(Z_k=j)}(Z_{k+1} = r)\mathbb{P}(Z_k = j) = \sum_{j=r}^n \frac{1}{j+1} \mathbb{P}(Z_k = j)$$

puisque, si  $(Z_k = j)$  est réalisé, alors le bus se rend selon une loi uniforme sur des stations d'indice dans  $[0, j]$ .

**Conclusion :**  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall r \in [0, n], \mathbb{P}(Z_{k+1} = r) = \sum_{j=r}^n \frac{\mathbb{P}(Z_k = j)}{j+1}$

④ Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $r \in [0, n-1]$ , montrons les deux égalités demandées à l'aide de la relation qui précède :

— pour  $r = n$ , on a :  $\mathbb{P}(Z_{k+1} = n) = \sum_{j=n}^n \frac{\mathbb{P}(Z_k = j)}{j+1} = \frac{\mathbb{P}(Z_k = n)}{n+1}$ .

**Conclusion :**  $(n+1)\mathbb{P}(Z_{k+1} = n) = \mathbb{P}(Z_k = n)$

— Pour  $r \in [0, n-1]$ , on a :

$$\begin{aligned} (r+1)\mathbb{P}(Z_{k+1} = r) &= (r+1) \sum_{j=r}^n \frac{\mathbb{P}(Z_k = j)}{j+1} = (r+1) \left( \frac{\mathbb{P}(Z_k = r)}{r+1} + \sum_{j=r+1}^n \frac{\mathbb{P}(Z_k = j)}{j+1} \right) \\ &= \mathbb{P}(Z_k = r) + (r+1) \sum_{j=r+1}^n \frac{\mathbb{P}(Z_k = j)}{j+1} \\ &= \mathbb{P}(Z_k = r) + (r+1)\mathbb{P}(Z_{k+1} = r+1) \text{ d'après 3.} \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $(r+1)\mathbb{P}(Z_{k+1} = r) - (r+1)\mathbb{P}(Z_{k+1} = r+1) = \mathbb{P}(Z_k = r)$

⑤ Pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , établissons en utilisant les égalités ci-dessus la relation suivante :

$$(S) : (X - 1)F'_{k+1}(X) + F_{k+1}(X) = F_k(X) \text{ (ce résultat peut être admis pour la suite)}$$

On rappelle que par définition,  $F_{k+1}(x) = \sum_{r=0}^n \mathbb{P}(Z_{k+1} = r)x^r$ . Donc,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} (x - 1)F'_{k+1}(x) &= \sum_{r=1}^n (x - 1)\mathbb{P}(Z_{k+1} = r)rx^{r-1} \\ &= \sum_{r=1}^n \mathbb{P}(Z_{k+1} = r)rx^r - \sum_{r=1}^n \mathbb{P}(Z_{k+1} = r)rx^{r-1} \end{aligned}$$

Donc,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} (x - 1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) &= \sum_{r=1}^n \mathbb{P}(Z_{k+1} = r)rx^r - \sum_{r=1}^n \mathbb{P}(Z_{k+1} = r)rx^{r-1} + \sum_{r=0}^n \mathbb{P}(Z_{k+1} = r)x^r \\ &= \sum_{r=0}^n \mathbb{P}(Z_{k+1} = r)(r + 1)x^r - \sum_{r=1}^n \mathbb{P}(Z_{k+1} = r)rx^{r-1} \\ &= \sum_{r=0}^n \mathbb{P}(Z_{k+1} = r)(r + 1)x^r - \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(Z_{k+1} = j + 1)(j + 1)x^j \\ &\hspace{15em} \text{en posant } j = r - 1 \\ &= \sum_{r=0}^n \mathbb{P}(Z_{k+1} = r)(r + 1)x^r - \sum_{r=0}^{n-1} \mathbb{P}(Z_{k+1} = r + 1)(r + 1)x^r \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} (\mathbb{P}(Z_{k+1} = r) - \mathbb{P}(Z_{k+1} = r + 1))(r + 1)x^r + \mathbb{P}(Z_{k+1} = n)(n + 1)x^n \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} \mathbb{P}(Z_k = r)x^r + \mathbb{P}(z_k = n)x^n \text{ d'après les égalités ci-dessus} \\ &= F_k(x) \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $(S) : (X - 1)F'_{k+1}(X) + F_{k+1}(X) = F_k(X)$

⑥ Calculons l'espérance de  $Z_k$  :

a) En dérivant une première fois la relation (S), on obtient pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$F'_{k+1}(x) + (x - 1)F''_{k+1}(x) + F'_{k+1}(x) = F'_k(x)$$

et en particulier pour  $x = 1$ , on a :  $2F'_{k+1}(1) = F'_k(1)$ . **Conclusion :**  $F'_{k+1}(1) = \frac{F'_k(1)}{2}$

En posant  $u_k = F'_k(1)$ , on vient d'obtenir que  $u_{k+1} = \frac{u_k}{2}, \forall k \in \mathbb{N}$ .

b) En reconnaissant une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $u_0 = F'_0(1) = \mathbb{E}(Z_0) = n$ , on obtient :

**Conclusion :**  $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(Z_k) = u_k = \frac{u_0}{2^k} = \frac{n}{2^k}$

- c) Dans le cas particulier où  $n = 2$ , on retrouve  $\mathbb{E}(Z_k) = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$ , à savoir la valeur calculée dans la partie II.

⑦ **Détermination de la loi de  $Z_k$  :**

- a) En utilisant le résultat de la question IV/B.5, on a :  $F_k = f(F_{k+1})$  où  $f$  est l'endomorphisme défini dans la partie B/I.

On grâce la question IV/A.7,  $f$  étant bijectif avec  $g = f^{-1}$ , on en déduit que  $F_{k+1} = g(F_k)$ .

Un raisonnement par récurrence, on en déduit immédiatement que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :  $F_k = g^k(F_0)$ .

Et comme  $F_0 = X^n$  d'après IV/B.2, on a **Conclusion** :  $\forall k \in \mathbb{N} : F_k = g^k(X^n)$

- b) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , d'après la formule du binôme de Newton :

$$X^n = (X - 1 + 1)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (X - 1)^j = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j$$

où  $P_0, P_1, \dots, P_n$  sont les polynômes définis en IV/A.6.

- c) On utilise que  $g^k$  est un endomorphisme puisque  $g \in \mathcal{L}(E_n)$ . Dès lors :

$$\forall k \in \mathbb{N} : F_k = g^k\left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} P_j\right) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} g^k(P_j)$$

Et comme  $g^k(P_j) = \frac{1}{(j+1)^k} P_j$ , on a :

$$\mathbf{Conclusion} : F_k = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{1}{(j+1)^k} P_j$$

- d) Pour déterminer la loi, il suffit de rappeler le résultat des préliminaires, à savoir :

$$\mathbb{P}(Z_k = r) = \frac{F^{(r)}(0)}{r!} = \frac{1}{r!} \sum_{j=0}^r \binom{n}{j} \frac{1}{(j+1)^k} P_j^{(r)}(0)$$

Mais

$$P_j^{(r)}(X) = ((X-1)^j)^{(r)} = \frac{j!}{(j-r)!} (X-1)^{j-r}$$

et donc,

$$P_j^{(r)}(0) = \frac{j!}{(j-r)!} (-1)^{j-r}$$

Soit, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , l'égalité :

$$\mathbb{P}(Z_k = r) = \sum_{j=r}^n (-1)^{(j-r)} \frac{\binom{n}{j} \binom{j}{r}}{(j+1)^k}$$



### Complément. Fonction génératrice de variables à valeurs dans $\mathbb{N}$ .

Dans la suite, nous admettrons la propriété suivante, généralisant le résultat des Préliminaires, A.1.b) : si  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , alors la connaissance de  $g_X(t)$  pour tout  $t \in [-1, 1]$  entraîne la connaissance de la loi de  $X$ . Ceci permet donc de reconnaître la loi d'une variable aléatoire dont on connaît la fonction génératrice.

Par ailleurs, si  $g_X$  est dérivable en 1, alors  $\mathbb{E}(X)$  existe et vaut  $\mathbb{E}(X) = g'_X(1)$ .

Soit maintenant  $X$  une variable aléatoire réelle à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$a_n = \mathbb{P}(X = n) \text{ et donc } g_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \text{ en tout } t \text{ réel où la série converge}$$

- ① Montrons que pour tout  $t \in [-1, 1]$ , la série  $\sum a_n t^n$  est absolument convergente. En déduire que  $g_X$  est définie sur  $[-1, 1]$  et donner la valeur de  $g_X(1)$  :

$$\forall t \in [-1, 1], \forall n \in \mathbb{N}, |a_n t^n| \leq a_n.$$

Par définition d'une loi de probabilité ( $\sigma$ -additivité), la série  $\sum a_n$  converge, et sa somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ vaut } 1 \text{ car } X(\Omega) = \mathbb{N}.$$

Par application du théorème de comparaison des séries à termes positifs nous pouvons conclure que la série  $\sum a_n t^n$  converge absolument. Or la convergence absolue entraîne la convergence.

**Conclusion :**  $g_X$  est défini sur  $[-1, 1]$  et  $g_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$ .

*Remarque :* On pouvait aussi écrire que  $\forall t \in [-1, 1], \forall n \in \mathbb{N}, |a_n t^n| \leq |t^n|$ .

Or,  $\forall t \in ]-1, 1[, \sum |t^n| = \sum |t|^n$  converge car c'est une série géométrique avec  $|t| < 1$  donc, par application du théorème de comparaison,  $\sum |a_n t^n|$  converge.

Par ailleurs, pour  $|t| = 1$ ,  $\sum |a_n t^n| = \sum |a_n| = \sum a_n$  converge de somme égale à 1. Ce qui permet de conclure que  $\sum a_n t^n$  converge absolument et donc que  $g_X$  est défini sur  $[-1, 1]$ .

**Lu dans le rapport de jury :** « Question très rarement bien traitée (10% des candidats montrent correctement l'absolue convergence).

La majoration  $|a_k t^k| \leq |t^k|$  ne permet de montrer l'absolue convergence que lorsque  $|t| < 1$ . Le cas  $|t| = 1$  doit alors être étudié à part, ce que les candidats remarquent très rarement. La solution la plus rapide consiste à effectuer la majoration  $|a_k t^k| \leq a_k$ . Quelques candidats se lancent dans des calculs avec des séries !!

Parmi les erreurs rencontrées dans plusieurs copies, on trouve :

- la série de terme général  $a_k |t|^k$  est une série géométrique...
- $\lim_{k \rightarrow +\infty} |a_k t^k| = 0$ , donc la série est absolument convergente... -  $a_k |t|^k$  est majorée par 1, donc la série est absolument convergente...

- des candidats écrivent  $|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k |t|^k$ , pour en déduire la convergence de la série... »

- ② Soit  $Y$  une variable aléatoire réelle à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Montrons que si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors pour tout  $t \in [-1, 1]$ ,  $g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t)$  :

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\forall t \in [-1, 1]$  les variables aléatoires  $t^X$  et  $t^Y$  sont indépendantes et admettent des espérances d'après le 1.

Donc  $g_{X_1+X_2}(t) = E(t^{X_1+X_2}) = E(t^{X_1}t^{X_2}) = E(t^{X_1})E(t^{X_2}) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t)$ .

$$\boxed{g_{X_1+X_2}(t) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t)}$$

- ③ a) ☉ On suppose que  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ , à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ . Calculons  $g_X(t)$  pour  $t \in [-1, 1]$  (on pourra poser  $q = 1 - p$ ). En déduire l'existence et la valeur de  $\mathbb{E}(X)$ .

$X$  suit une loi géométrique de paramètre  $p$ .

On rappelle que  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et  $\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ .

Alors la question B.1. justifie l'existence de  $g_X(t)$  pour tout  $t \in [-1, 1]$  (sinon on écrit que la série  $\sum_{k \geq 1} pq^{k-1}t^k$  est de même nature que  $\sum_{k \geq 1} (qt)^{k-1} = \sum_{i \geq 0} (qt)^i$  qui est une série géométrique convergente).

$$\forall t \in [-1, 1], g_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}t^k = pt \sum_{k=0}^{+\infty} (qt)^k = \frac{pt}{1-qt}, \text{ car } |qt| < 1$$

**Lu dans le rapport de jury :** « Cette question a permis aux élèves moyens, mais sérieux, de faire la différence.

Attention,  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  : trop de candidats ont commencé la somme à 0. Trop ont oublié ou n'ont pas justifié correctement la convergence de la série géométrique. »

On rappelle ensuite que  $\mathbb{E}(X) = g'_X(1)$ .

$$\text{Or } g'_X(t) = \frac{p(1-qt) + qpt}{(1-qt)^2} = \frac{p}{(1-qt)^2}$$

☞ On note que  $\forall t \in [-1, 1]$ ,  $1-qt \neq 0$  puisque  $t = 1/q$  impossible (en effet :  $\frac{1}{q} > 1$ )

$$\text{Conclusion : } \boxed{\mathbb{E}(X) \text{ existe et vaut } \mathbb{E}(X) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}}$$

☞ Pour la méthode « usuelles », on se rapportera au cours.

- b) On suppose ici que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .

- i. ☉ Calculons  $g_X(t)$  pour  $t \in [-1, 1]$  et retrouvons l'existence et la valeur de  $\mathbb{E}(X)$  :

On rappelle que  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

Alors,  $\forall t \in [-1, 1]$ ,  $g_X(t)$  est la somme d'une série convergente et :

$$\forall t \in [-1, 1], g_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} t^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t}$$

**Lu dans le rapport de jury :** « Souvent bien traitée. »

Pour  $\mathbb{E}(X)$ ,  $g'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$ , donc  $\mathbb{E}(X)$  existe et vaut  $\mathbb{E}(X) = g'_X(1) = \lambda$

- ii. ☺ Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables indépendantes qui suivent respectivement une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$  et  $\mu$ . Déterminons  $g_{X+Y}(t)$  et en déduire que  $X + Y$  suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre :

Par application de la question 2. on obtient que  $S = X + Y$  admet pour fonction de répartition :

$$g_S(t) = g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi de Poisson de paramètre  $\lambda + \mu$ .

La fonction de répartition caractérisant la loi d'une variable aléatoire (cf introduction des ces « compléments » ou question 1.b.ii) des préliminaires...), on peut conclure que :

$$S \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$$