MATHEMATIQUES
Algèbre linéaire et Variables aléatoires à densité

Problème 1 :

I. Préliminaires

Dans cette partie **I.**, λ désigne un réel strictement positif.

① Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

a) **N.B.** Passer par la fonction de répartition évite d'avoir à calculer des (simples) intégrales impropres.
$\mathrm{P}(X > x) = 1 - \mathrm{P}(X \leq x) = 1$ si $x \leq 0$ et
$= 1 - \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = 1 - \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = e^{-\lambda x}$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(X > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}$ (appelée *fonction de survie de X*).

b) Pour x et y strictement positifs :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{X>x}(X > x+y) &= \frac{\mathrm{P}(X > x+y \cap X > x)}{\mathrm{P}(X > x)} \\ &= \frac{\mathrm{P}(X > x+y)}{\mathrm{P}(X > x)} \text{ car } x+y \geq x \\ &= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y} \\ &= \mathrm{P}(X > y) \end{aligned}$$

Si X modélise la durée de vie d'un phénomène, le fait d'avoir duré au moins x [$(X > x)$ est réalisé] ne change pas la loi de la durée de vie restante.
Conclusion : La durée de vie ne dépend pas du vécu. On peux donc le dire « sans vieillissement ».

② Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

a) On a $\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n\frac{1}{\lambda}}$ par linéarité de l'espérance

et comme les (X_k) sont indépendantes, $\boxed{\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = n\frac{1}{\lambda^2}}$

b) Pa récurrence :
$S_1 = X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ donc S_1 a pour densité

$$t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ \dfrac{\lambda^1}{(1-1)!} e^{-\lambda t} t^{1-1} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la densité de S_n soit

$$f_n : t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} t^{n-1} & \text{si } t \geq 0. \end{cases} = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} t^{n-1} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

alors $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ est la somme de deux variables aléatoires à densités indépendantes car, d'après le lemme de coalition, $X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}$ mutuellement indépendantes implique que $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et X_{n+1} le sont.

Donc, d'après le rappel proposé par l'énoncé, S_{n+1} est une variable à densité dont une densité est donnée par

$$f_{n+1}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, f_1(t-x)\, dx$$

Par ailleurs, $S_{n+1}(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc $f_{n+1}(t) = 0$ si $t < 0$
et si $t > 0$

$$f_{n+1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda x} x^{n-1} \lambda e^{-\lambda(t-x)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t-x) dx$$

Or

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t-x) = 1 \text{ si } t-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq t$$

donc, pour tout t strictement positif,

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t-x) = \mathbf{1}_{]-\infty,t]}(x) \text{ et } \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t-x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}+\cap]-\infty,t]}(x) = \mathbf{1}_{[0,t]}(x)$$

et donc :

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda x} x^{n-1} \lambda e^{-\lambda(t-x)} \mathbf{1}_{[0,t]}(x) dx \\
&= \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda x} x^{n-1} \lambda e^{-\lambda(t-x)}\, dx \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \int_0^t x^{n-1}\, dx \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \left[\frac{x^n}{n}\right]_0^t \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{n!} e^{-\lambda t} t^n \text{ avec } (n-1)!n = n!
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ une densité de } S_n \text{ est la fonction } f_n}$

II. Loi de Pareto (Vilfredo Pareto (1848-1923), sociologue et économiste italien)

Soient a et b des réels strictement positifs. Par définition, on dit d'une variable aléatoire qu'elle suit la loi de Pareto de paramètres a et b si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < b\,; \\ a\dfrac{b^a}{t^{a+1}} & \text{si } t \geq b. \end{cases}$$

Soit alors X une variable aléatoire de loi de Pareto de paramètres a et b.

① — f est positive sur $]-\infty, b[$ car nulle et positive sur $[b, +\infty[$ car par hypothèse a et b sont deux réels strictement positifs. Elle est donc positive sur $\mathbb{R}$.

— f est continue sur $]-\infty, b[$ car constante égale à 0 et sur $[b, +\infty[$ car $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{a+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc sur $[b, +\infty[$.

Par ailleurs, $\underset{t \to b}{lim} a\dfrac{b^a}{t^{a+1}} = a\dfrac{b^a}{b^{a+1}} = \dfrac{a}{b} \neq 0$. D'où $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \setminus \{b\}}$.

— On note que $\int_b^{+\infty} a\dfrac{b^a}{t^{a+1}}dt$ est impropre en $+\infty$. Pour tout $x \geq b$:

$$\begin{aligned}\int_b^x a\frac{b^a}{t^{a+1}}dt &= \left[-\frac{b^a}{t^a}\right]_b^x \\ &= -\frac{b^a}{x^a}+\frac{b^a}{b^a} \to 1 \text{ quand } x \to +\infty \text{ car } a>0\end{aligned}$$

Donc, d'après la relation de Chales, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1. .

Conclusion : $\boxed{f \text{ est une densité de probabilités}}$

$\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ si elle converge absolument, avec $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} tf(t)\,dt = 0$.
Or $tf(t) = a\dfrac{b^a}{t^a}$ donc l'intégrale (Riemann) converge si $a>1$ et diverge si $a \leq 1$.
Montrons-le ! Si $a>1$:

$$\begin{aligned}\int_b^x ta\frac{b^a}{t^{a+1}}dt &= a\int_b^x \frac{b^a}{t^a}dt \\ &= ab^a\left[\frac{-1/(a-1)}{t^{a-1}}\right]_b^x \\ &= -\frac{ab^a}{a-1}\left(\frac{1}{x^{a-1}}-\frac{1}{b^{a-1}}\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{\to} \frac{ab}{a-1} \text{car } a>1\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(X) = \dfrac{ab}{a-1} \text{ si } a>1 \text{ n'existe pas sinon.}}$

Pour la variance, on utilise la formule de Koenig-Huygens et on étudie l'existence de $\mathbb{E}(X^2)$:
$t^2f(t) = a\dfrac{b^a}{t^{a-1}}$ donc l'intégrale de $t^2f(t)$ diverge si $a \leq 2$ $(a-1 \leq 1)$ et converge si $a>2$.
Là encore, fendons nous d'une démonstration (qui est une démonstration de cours) :

$$\begin{aligned}\int_b^x a\frac{b^a}{t^{a-1}}dt &= a\int_b^x \frac{b^a}{t^{a-1}}dt \\ &= ab^a\left[\frac{-1/(a-2)}{t^{a-2}}\right]_b^x \\ &= -\frac{ab^a}{a-2}\left(\frac{1}{x^{a-2}}-\frac{1}{b^{a-2}}\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{\to} \frac{ab^2}{a-2} \text{ puisque } a>2\end{aligned}$$

Donc si $a>2$, X^2 a une espérance et $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \dfrac{ab^2}{a-2}$ et X a une variance et

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - E(X)^2 \\ &= \frac{ab^2}{a-2} - \left(\frac{ab}{a-1}\right)^2 \\ &= ab^2\frac{(a-1)^2 - a(a-2)}{(a-1)^2(a-2)}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{si } a > 2 : V(X) = \dfrac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)} \text{ et n'existe pas sinon}}$

② La fonction de répartition de X est $F(x) = 0$ si $x \leq b$ et si $x \geq b$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_b^x a \frac{b^a}{t^{a+1}} dt \\ &= \left[-\frac{b^a}{t^a} \right]_b^x \\ &= -\left(\frac{b}{x}\right)^a + 1 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{F_X(x) = 1 - \left(\dfrac{b}{x}\right)^a \mathbf{1}_{[b,+\infty[}(x)}$.

La fonction de survie s'obtient en écrivant que $G(x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x)$.

Conclusion : $\boxed{G(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{b}{x}\right)^a & \text{si } x \geq b \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}}$

③ F_X est continue sur $]b, +\infty[$ car $x \longmapsto \left(\dfrac{b}{x}\right)^a$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $b > 0$. Elle est strictement croissante sur $]b, +\infty[$ car sa dérivée f est strictement positive sur cet intervalle.
Conclusion : $\boxed{F_X \text{ est une bijection de }]b, +\infty[\text{ sur } F_X(]b, +\infty[) =]0, 1[}$

C'est ensuite à nouveau une question de cours... : Posons $T = F_X^{-1}(U)$
Si $U \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$, alors $T(\Omega) = F_X^{-1}(U)(\Omega) = F_X^{-1}(]0, 1[) =]b, +\infty[= X(\Omega)$.
Dès lors :
— Si $x < b$, $F_T(x) = F_X(x) = 0$
— Si $x \geq b$, $F_T(x) = \mathbb{P}(T \leq x) = \mathbb{P}(F_X^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x))$ car F_X croissante.
D'où, si $x \geq b$, $F_T(x) = F_U(F_X(x)) = F_X(x)$ car $F_X(x) \in]0, 1[$.
On vient de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_T(x) = F_X(x)$ et donc que T et X suivent la même loi.

Conclusion : $\boxed{\text{La var } T = F_X^{-1}(U) \text{ suit une loi de Pareto de paramètres } a \text{ et } b.}$

Pour la fonction Python, on modélise la loi uniforme sur $]0, 1[$ par la fonction de `random()` de la bibliothèque `random`.
Il ne reste donc plus qu'à exprimer la fonction F_X^{-1} :

$$\begin{aligned} F_X(x) = y \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a = y \Leftrightarrow \left(\frac{b}{x}\right)^a = 1 - y \\ \Leftrightarrow e^{a\ln(b/x)} = 1 - y \Leftrightarrow a \ln\left(\frac{b}{x}\right) = \ln(1-y) \\ \Leftrightarrow \ln\left(\frac{b}{x}\right) = \frac{1}{a}\ln(1-y) = \ln\left((1-y)^{1/a}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{b}{x} = (1-y)^{1/a} \Leftrightarrow x = \frac{b}{(1-y)^{1/a}} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall y \in]0,1[,\ F_X^{-1}(y) = \dfrac{b}{(1-y)^{1/a}}}$

Ce qui donne :

```python
def simulPareto(a, b):
    return b/(1-rdm.random())**(1/a)

def estimEsperancePareto(a, b, m = 1000):
    L = [simulPareto(a, b) for k in range(m)]
    return Sum(L)/m
```

④ Pour tout réel y positif ou nul et $x > a$ (pour que la probabilité conditionnelle soit définie),

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{(X>x)}(X > x+y) &= \frac{\mathrm{P}\left((X > x+y) \cap (X > x)\right)}{\mathrm{P}(X > x)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(X > x+y)}{\mathrm{P}(X > x)} \\
&= \frac{\left(\frac{b}{x+y}\right)^a}{\left(\frac{b}{x}\right)^a} = \left(\frac{x}{x+y}\right)^a \\
&\to 1 \text{ quand } x \to +\infty \text{ car } a > 0
\end{aligned}$$

Dans une telle modélisation de la durée de vie, plus on a vécut longtemps, plus la probabilité de vivre d'avantage augmente.
Conclusion : $\boxed{\text{c'est un phénomène dans lequel l'expérience fait gagner en endurance.}}$

⑤ On commence par déterminer $Y(\Omega)$

Sachant que $X(\Omega) = [b, +\infty[$, on a $\dfrac{X}{b}(\Omega) = [1, +\infty[$ et donc $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$.
Dès lors :

— Si $x < 0$, $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = 0$

— Si $x \geq 0$,

$$F_Y(x) = \mathbb{P}\left(\ln\left(\tfrac{X}{b}\right) \leq x\right) = \mathbb{P}(X \leq be^x) = F_X(be^x)$$

D'où,

$$\forall x \geq 0,\ F_Y(x) = 1 - \left(\frac{b}{be^x}\right)^a = 1 - e^{-ax}$$

Conclusion : $\boxed{Y \hookrightarrow \varepsilon(a)}$

III. Estimation des paramètres d'une loi de Pareto

✐ *Remarque :* Pour ceux qui seraient curieux de savoir d'où vient cette fonction $\mathcal{L}$ et la raison pour laquelle elle permet de trouver une valeur « vraisemblable » pour le paramètre α, vous trouverez en annexe de cette corretion une justification possible...

① On suppose tout d'abord que le paramètre β fait partie des caractéristiques connues du canal de communication ; on se propose de déterminer un estimateur de α par une méthode dite « du maximum de vraisemblance ». Pour cela, n désignant un entier naturel non nul et x_1, ..., x_n des réels supérieurs ou égaux à β, on introduit la fonction $\mathcal{L}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\mathcal{L}(a) = f_a(x_1) \times \cdots \times f_a(x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_a(x_k),$$

où f_a est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \beta\,; \\ a\dfrac{\beta^a}{t^{a+1}} & \text{si } t \geq \beta. \end{cases}$$

$\beta \leq x_k$ alors $f_a(x_k) = a\dfrac{\beta^a}{x_k^{a+1}}$ pour tout k et

$$\mathcal{L}(a) = a^n \beta^{na} / \left(\prod_{k=1}^{n} x_k^{a+1}\right)$$

tous les termes du produit étant strictement positifs,

$$\boxed{\ln(\mathcal{L}(a)) = n\ln(a) + na\ln(\beta) - (a+1)\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)}$$

② On considère la fonction φ de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$:

$$a \mapsto n\ln(a) + na\ln(\beta) - (a+1)\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)\,.$$

a) φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\begin{aligned} \varphi'(a) &= \frac{n}{a} + n\ln(\beta) - \sum_{k=1}^{n}\ln(x_k) \\ &= \frac{1}{a}\left[n + \left(n\ln(\beta) - \sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)\right)a\right] \end{aligned}$$

Commençons par regarder le signe à l'intérieur de la parenthèse ?

Pour tout k : $x_k \geq \beta$ donc $\ln(x_k) \geq \ln(\beta)$ et $\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k) \geq n\ln(\beta)$

Donc $n\ln(\beta) - \sum_{k=1}^{n}\ln(x_k) < 0$ (expression nulle si tous les x_k sont égaux à β, ce qui est exclus par hypothèse).

Dès lors, la fonction φ' est strictement décroissante et elle s'annule, quand $a > 0$, pour

$$w = -\frac{n}{\left(n\ln(\beta) - \sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)\right)}$$

On a donc le tableau de variation suivant :

a	0		w	
$\varphi'(a)$		$+$	0	$-$
$\varphi(a)$		$\nearrow$		$\searrow$

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ a un unique maximum en } w}$

b) Il n'y a rien à ajouter : $\boxed{w = -\dfrac{n}{n\ln(\beta) - \sum_{k=1}^{n}\ln(x_k)}}$

c) On a $\ln(\mathcal{L}(a)) = \varphi(a)$ donc $\mathcal{L}(a) = \exp(\varphi(a))$ et donc, par stricte croissance de la fonction exponentielle :
Conclusion : $\boxed{\mathcal{L} \text{ est maximale en } w}$

③ On pose dorénavant, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$W_n = \frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{X_k}{\beta}}.$$

où l'on reconnaît la formule donnant w avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{X_k}{\beta} = -\left(n\ln(\beta) - \sum_{k=1}^{n} \ln(X_k)\right)$

a) On a vu (II. 5.) qu'avec X_k suivant une loi de Pareto de paramètres α et β, la variable $\ln \frac{X_k}{\beta}$ suivait alors une loi $\mathcal{E}(a)$).
Au (I 2.b) on a vu qu'une somme de loi exponentielles indépendantes était à densité et avait pour densité f_n.
Les (X_k) étant indépendantes,
Conclusion : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{X_k}{\beta} \text{ admet pour densité la fonction } f_n \text{ avec } \lambda = \alpha}$

b) D'après ce qui précède, on peut dire que $X_n = \dfrac{n}{S_n}$ où S_n est S_n est une variable aléatoire de densité S_n.
Dès lors, d'après le théorème de transfert, W_n a une espérance si $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{t} f_n(t)\,dt$ est absolument convergente ($\Longleftrightarrow$ convergente car tout est positif ou nul)

Or, d'après le relation de Chasles :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{n\alpha^n}{(n-1)!} e^{-\alpha t} t^{n-2} dt$$

Commençons par montrer sa convergence :

— D'après l'énoncé $n \geq 2$, donc $t \longmapsto e^{-\alpha t} t^{n-2}$ est continue en 0. Cette intégrale n'est donc généralisée qu'en l'infini.
— Il est temps de se souvenir du raisonnement suivi pour étudier la fonction Gamma d'Euler... !

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 \left(e^{-\alpha t} t^{n-2}\right) = \lim_{t \to +\infty} e^{-\alpha t} t^n = 0$$

Donc, par définition de la limite :

$$\exists A \in \mathbb{R}+ / \forall t > A,\ 0 < e^{-\alpha t} t^n < 1$$

ou encore

$$\exists A \in \mathbb{R}+ / \forall t > A,\ 0 < e^{-\alpha t} t^{n-2} < \frac{1}{t^2}$$

or $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge donc, par théorème de comparaison sur les intégrales de fonctions positives : $\displaystyle\int_A^{+\infty} e^{-\alpha t} t^{n-2} dt$ converge.

On peut conclure que I converge et donc que $\boxed{\mathbb{E}(W_n) \text{ existe}}$

Calculons sa valeur :

$$\mathbb{E}(W_n) = \int_0^{\infty} \frac{n\alpha^n}{(n-1)!} e^{-\alpha t} t^{n-2} dt = \frac{n}{n-1} \int_0^{\infty} \frac{\alpha^{n-1}}{(n-2)!} e^{-\alpha t} t^{n-2} dt = \frac{n}{n-1}\alpha$$

Car on s'est débrouillé pour faire apparaître f_{n-1} qui est une densité de probabilité de support $\mathbb{R}_+$... Son intégrale entre 0 et l'infini vaut donc 1.

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(W_n) \text{ existe et vaut } \dfrac{n\alpha}{n-1}}$

Pour finir cette question il suffit de poser, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$W'_n = \frac{n-1}{n} W_n.$$

Alors, par linéarité de l'espérance, il est immédiat que $\mathbb{E}(W'_n)$ existe et vaut α.
On dira que W'_n permet d'estimer le paramètre α

④ la fonction `mystere(a, b)` permet de modéliser une loi de Pareto de paramètres a et b. Il suffit, pour le justifier, d'utiliser la question II.3.
En effet, si $U \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$ alors $1 - U \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$.
Cette fonction retourne donc $\dfrac{b}{U^{1/a}}$ qui a même loi que $\dfrac{b}{(1-U)^{1/a}}$ qui a été obtenue en II.3.

La fonction `calcul(Lx, b)` modélise quant à elle la variable W'_n puisque les valeurs de x sont issus de n appels successifs et indépendants de la loi de Pareto de paramètres a et b (ce qu'on peut observer à la ligne 13 de la fonction `mystere2`).

Quant à cette dernière fonction, elle estime l'espérance de W'_n qu'elle retourne dans `np.mean(LW)`. Retourner la valeur de a dans cette fonction est un moyen de vérifier que `np.mean(LW)` permet bien d'obtenir une valeur approchée de a qui a été choisi au hasard, selon une loi uniforme dans $[\![0, 6]\!]$.

Problème 2 :

Dans la suite p est un entier naturel supérieur ou égal à 3.

1 Résultats préliminaires

1. a) On calcule les inverses par l'une des méthodes vues en cours. Par exemple, pour l'inversibilité de D_3 on pourra écrire : Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$D_3X = Y \Leftrightarrow \begin{cases} y &= a \\ z &= b \\ x &= c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= c \\ y &= a \\ z &= b \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Y$$

Conclusion : $\boxed{D_3 \text{ est inversible et } D_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

De même, D_4 est inversible et $D_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Plusieurs réponses sont possibles :

i. On raisonne comme dans la question précédente et on passe par la résolution de (S) $D_pX = Y$, soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{p-1} \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{p-1} \\ a_p \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 &= a_1 \\ x_3 &= a_2 \\ \vdots & \\ x_p &= a_{p-1} \\ x_1 &= a_p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= a_p \\ x_2 &= a_1 \\ \vdots & \\ x_{p-1} &= a_{p-2} \\ x_p &= a_{p-1} \end{cases}$$

par simple permutation circulaire des lignes, à savoir : $L_1 \leftarrow L_p \leftarrow L_{p-1} \leftarrow \cdots \leftarrow L_2 \leftarrow L_1 \cdots$
Soit $\boxed{D_p \text{ inversible et } D_p^{-1} = {}^tP}$

ii. On utilise l'indication de l'énoncé et d'après la question précédente, on conjecture que D_p est inversible et que son inverse est sa transposée, que l'on notera D_p^T. On prouve la conjecture en calculant le produit $D_pD_p^T$: soit $A = D_pD_p^T$, et $a_{i,j}$ le coefficient de A sur la ligne i et la colonne j.

— *Rédaction 1 :* On utilise la définition du produit, à savoir, si on note $d_{i,j}$ les coefficients de D_p et $d_{i,j}^T$ les coefficients D_p^T :

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} d_{i,k}d_{k,j}^T = \sum_{k=1}^{p} d_{i,k}d_{j,k}$$

or, si $i \in [\![1, p-1]\!]$, on a : $d_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Dès lors $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i+1 = j+1 \Leftrightarrow i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et $a_{p,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} d_{p,k}d_{j,k} = 1$ si $j = p$ car $d_{p,k} = 1 \Leftrightarrow k = 1$...

— *Rédaction 2 : « à la main »* Ce coefficient $a_{i,j}$ est obtenu en faisant le produit (matriciel) de la ligne i de D_p par la colonne j de D_p^T, dont les coefficients sont ceux de la ligne j de D_p. Or chaque ligne de D_p ne comporte qu'un seul 1, qui se trouve en position $i+1$ pour la ligne i (position 1 pour la ligne p) ; le 1 de la ligne i est donc dans la même position que celui de la ligne j si et seulement $i = j$, donc $a_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.

Conclusion : $\boxed{\text{Tout ça prouve que } A = I_n\text{, ce qui montre que } D_p \text{ est inversible d'inverse } D_p^T.}$

2. a) Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}), X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

On a $X + \lambda X' = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda x'_1 \\ \vdots \\ x_p + \lambda x'_p \end{pmatrix}$ d'où :

$$f(X + \lambda X') = \sum_{k=1}^{p} (x_k + \lambda x'_k) = \sum_{k=1}^{p} x_k + \lambda \sum_{k=1}^{p} x'_k = f(X) + \lambda f(X'),$$

ce qui prouve que f est une application $\mathbb{C}$-linéaire.

b) La fonction f n'est pas injective car par exemple $f(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}) = 0$ (le noyau de f contient un vecteur non nul).

c) La fonction f est surjective : soit $x \in \mathbb{C}$, cet élément de l'espace d'arrivée a pour antécedent par f par exemple le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) La dimension de $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel est 1, donc le rang de f vaut 1 puisqu'elle est surjective, et donc d'après le théorème du rang, la dimension de son noyau est $\dim(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})) - 1$ c'est-à-dire $p - 1$.

3. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison différente de 1, puisque $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}} = \left(e^{\frac{2i\pi}{p}}\right)^k$. On en déduit :

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} z_k = \frac{1}{p}\frac{1 - \left(e^{\frac{2i\pi}{p}}\right)^p}{1 - e^{\frac{2i\pi}{p}}} = 0.$$

Géométriquement, $\frac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} z_k$ est l'affixe de l'isobarycentre des points $A_0, \dots, A_{p-1}$, et on a trouvé que cet isobarycentre est le centre O du cercle sur lequel sont placés ces points.

4. Soit z un complexe non nul ; on peut l'écrire $z = re^{i\theta}$ où r est un réel strictement positif et θ un réel quelconque. On a alors :

$$z^p = 1 \iff r^p e^{pi\theta} = 1 \iff \begin{cases} r^p = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, p\theta = 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi/p \end{cases}$$

2 Étude d'un modèle de diffusion sur le cercle

5. Il s'agit de relier la loi de U_{n+1} à celle de U_n. On va utiliser le système complet d'événements $\{(U_n = k)\}_{k\in[\![0,p-1]\!]}$ et la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(U_{n+1} = i) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}_{(U_n=j)}(U_{n+1} = i) \times \mathbb{P}(U_n = j)$$

Commençons en distinguant les cas $i = 0$ et $i = p-1$:

— <u>Pour $i = 0$:</u>
$\mathbb{P}_{(U_n=p-1)}(U_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}_{(U_n=1)}(U_{n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}_{(U_n=j)}(U_{n+1} = 0) = 0$, $\forall 2 \leq j \leq p-2$. Soit

$$\mathbb{P}(U_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(U_n = 1) + \mathbb{P}(U_n = p-1))$$

— <u>Pour $i = p-1$:</u>
$\mathbb{P}_{(U_n=p-2)}(U_{n+1} = p-1) = \dfrac{1}{2} = \mathbb{P}_{(U_n=0)}(U_{n+1} = p-1)$ et $\mathbb{P}_{(U_n=j)}(U_{n+1} = 0) = 0$, $\forall j \in [\![1, p-1]\!] \setminus \{p-2\}$. Soit

$$\mathbb{P}(U_{n+1} = p-1) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(U_n = 0) + \mathbb{P}(U_n = p-2))$$

— <u>Pour $1 \leq i \leq p-2$:</u>
Lorsque la particule se trouve en A_j, elle ne peut se déplacer que vers A_{j+1} ou A_{j-1} et ceci avec probabilité $1/2$. On a donc :

$$\mathbb{P}(U_{n+1} = i) = \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(U_n = i-1) + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(U_n = i+1)$$

Ceci montre qu'on a bien une formule du type $X_{n+1} = MX_n$, où M est la matrice carrée dont les coefficients sont les $P_{U_n=j}(U_{n+1} = i)$. Autrement dit la matrice qui a des $1/2$ sur la surdiagonale, la sousdiagonale, et les coins en haut à droite et en bas à gauche, et des 0 partout ailleurs. Ou encore :

$$M_p = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(D_p + D_p^T).$$

6. On a $X_n = M_p^n X_0$, où $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. La formule demandée découle de celle obtenue à la question 5) et de la propriété $D_p^{-1} = D_p^T$ de la question 1)b).

8. a) On cherche donc les valeurs de $\lambda \in \mathbb{C}$ telles que $rg(M_3 - \lambda I_3) < 3$; on calcule ce rang par pivot, et on trouve après calculs (je ne les ai pas rédigés mais ils doivent figurer sur la copie) :

$$rg(M_3 - \lambda I_3) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\lambda \\ 0 & -2\lambda - 1 & 1 + 2\lambda \\ 0 & 0 & (1+2\lambda)(2-2\lambda) \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda = -1/2 \\ 2 & \text{si } \lambda = 1 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}.$$

b) On détermine ensuite les noyaux demandés, à partir de la dernière matrice du calcul ci-dessus :

$$E_{-1/2} = Ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Vect}\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}.$$

Conclusion : $\boxed{E_{-1/2} = \text{Vect}\{u_1, u_2\} \text{ où } u_1 = (-1,1,0) \text{ et } u_2 = (-1,0,1)}$

$$E_1 = Ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Vect((1,1,1)).$$

Conclusion : $\boxed{E_1 = \text{Vect}\{u_3\} \text{ où } u_3 = (1,1,1)}$

Par ailleurs, on vérifie comme nous le demande l'énoncé, que :

$$X \in E_\lambda(M_3) \Leftrightarrow (M_3 - \lambda I_3)X = 0 \Leftrightarrow (f_3 - \lambda id_3)(u) = 0 \Leftrightarrow f_3(u) - \lambda u = 0 \Leftrightarrow f_3(u) = \lambda u$$

Conclusion : $\boxed{f_3(u_1) = -\frac{1}{2}u_1,\ f_3(u_2) = -\frac{1}{2}u_2 \text{ et } f_3(u_3) = u_3}$

c) Montrons que M_3 et $D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables : Cela découle immédiatement de la question précédente, à condition de montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, si c'est le cas, alors par construction, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f_3) = D$.

Montrons donc que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$: C'est une famille de cardinal égale à 3 qui est la dimension de $\mathbb{R}^3$. Il suffit de montrer que c'est une famille libre pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. On fait le choix ici de calculer le rang de cette famille de vecteurs en passant par le rang de la matrice des coordonnées de cette famille de vecteur qui n'est autre que la matrice de passage qui est demandée en fin de question.

$$\text{rg}\{u_1, u_2, u_3\} = \text{rg}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

On peut donc conclure que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Conclusion : $\boxed{M_3 = PDP^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

d) Après calcul, on trouve $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ [✎ *A faire. C'est très rapide*]

e) D'après la question 6), X_n est la première colonne de M_3^n. On a, par une récurrence à écrire dans la copie, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} M_3^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -(-1/2)^n & -(-1/2)^n & 1 \\ (-1/2)^n & 0 & 1 \\ 0 & (-1/2)^n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1/2)^n + 1 & -(-1/2)^n + 1 & -(-1/2)^n + 1 \\ -(-1/2)^n + 1 & 2(-1/2)^n + 1 & -(-1/2)^n + 1 \\ -(-1/2)^n + 1 & -(-1/2)^n + 1 & 2(-1/2)^n + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La limite de $P(U_n = k)$ quand n tend vers $+\infty$ est donc $1/3$, quel que soit $k \in [\![0, 2]\!]$. Les trois positions tendent à devenir équiprobables lorsque le nombre de déplacements tend vers l'infini.

9. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur et λ un complexe. On a :

$$D_pX = \lambda X \iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_p = \lambda x_{p-1} \\ x_1 = \lambda x_p \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \vdots \\ x_p = \lambda^{p-1} x_1 \\ x_1 = \lambda^p x_1 \end{cases}$$
$$\iff X = 0 \text{ ou } \left(\lambda^p = 1 \text{ et } X = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{p-1} \end{pmatrix} x_1 \right)$$

Conclusion : Les valeurs de λ pour lesquelles il existe $X \neq 0$ avec $D_pX = \lambda X$ sont donc les complexes λ tels que $\lambda^p = 1$.

En prenant $x_1 = 1$, on obtient qu'il existe p valeurs λ complexes, à savoir les $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, obtenus à la question I.4. pour lesquelles $D_pX_k = z_kX_k$ avec $X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ z_k \\ z_k^2 \\ \vdots \\ z_k^{p-1} \end{pmatrix}$.

10. Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & z_1^{p-1} & z_2^{p-1} & \cdots & z_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix}$. *On cherche à montrer que Q est inversible :*

✐ La question qu'il faut se poser c'est, quel est l'intérêt de montrer cette inversibilité. La réponse est immédiate si on note que la matrice Q est la matrice des coordonnées des vecteurs X_k obtenus à la question précédente (puisque $z_0 = 1$). Dès lors, montrer l'inversibilité de Q c'est montrer que son rang vaut p et donc que la famille $\{X_0 \cdots, X_{p-1}\}$ est libre...

Allons-y et, conformément à l'énoncé, on pose $R = {}^tQ$ et on considère le système homogène (S) : $RX = 0$ où $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix}$.

— *Montrons que* $1, z_1, \cdots z_{p-1}$ *sont racines du polynôme* $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots a_{p-1}X^{p-1}$ *:*

Le système (S) donne :

$$RX = 0 \Leftrightarrow {}^tQX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & z_1 & \cdots & z_1^{p-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{p-1} \\ 1 & z_{p-1} & \cdots & z_{p-1}^{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 + \cdots + a_{p-1} & = 0 \\ a_0 + z_1 a_1 + \cdots + z_1^{p-1} a_{p-1} & = 0 \\ a_0 + z_2 a_1 + \cdots + z_2^{p-1} a_{p-1} & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_0 + z_{p-1} a_1 + \cdots + z_{p-1}^{p-1} a_{p-1} & = 0 \end{cases}$$

ou encre : $1, z_1, \cdots, z_{p-1}$ sont racines du polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{p-1} X^{p-1}$.

— *Concluons que la seule solution de (S) est la solution nulle :* Il suffit de dire que le polynôme P est un polynôme de degrés inférieur ou égale à $p-1$. Or il possède p racines distinctes (cf. 1.4.).
Conclusion : $\boxed{P \text{ est le polynôme nul ou encore } a_0 = 0 = a_1 = \cdots a_{p-1}}$

— On en déduit que le système homogène $(S) : RX = 0$ admet une unique solution qui est la solution nulle. C'est un système de Cramer. La matrice $R = {}^tQ$ associée au système est donc inversible.
Et si on rappelle que $\text{rg}(Q) = \text{rg}({}^tQ)$, alors $\text{rg}(Q) = \text{rg}({}^tQ) = p = ordre(Q)$.
Conclusion : $\boxed{Q \text{ est inversible}}$

11. Posons $X_k = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(v_k)$ ou $\mathcal{B}_2$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^p$. *Montrons que la famille $(v_0, v_1, \cdots, v_{p-1})$ est une base de $\mathbb{C}^p$:* Cela découle immédiatement de la question précédente. Le rang de la famille $(v_0, \cdots, v_{p-1})$ est égale au rang de la matrice des coordonnées de cette famille de vecteur, autrement dit la matrice Q.
Dès lors, $\text{rg}(v_0, \cdots, v_{p-1}) = \text{rg}(Q) = p$. Ce qui prouve que cette famille est libre.
Par ailleurs $\text{Card}(v_0, \cdots, v_{p-1}) = p = \dim(\mathbb{C}^p)$.
Conclusion : $\boxed{\mathcal{B}'' = (v_0, \cdots, v_{p-1}) \text{ est une base de } \mathbb{C}^p.}$

12. Soit $D_p = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(g_p)$ où g_p est un endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ et $\mathcal{B}_2$ est sa base canonique.
On sait grâce à la question 9. que $D_p X_k = z_k X_k$, soit $g_p(v_k) = z_k v_k$.
L'expression de la matrice de g_p dans la base $\mathcal{B}''$ donne immédiatement :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}''}(g_p) = \Delta = \begin{pmatrix} z_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & z_{p-1} \end{pmatrix}$$

Et d'après les formules de changement de base, puisque par construction $Q = Pass(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'')$, on a : $\boxed{D_p = Q\Delta_p Q^{-1}}$

13. *Justifions l'inversibilité de D_p et exprimons D_p^{-1} en fonction de Q et Δ_p :*
La matrice Δ_p est inversible car elle est diagonale et n'a pas de 0 sur sa diagonale.
On en déduit, à l'aide de la formule $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ pour des matrices A et B inversibles, que $D_p^{-1} = (Q^{-1})^{-1}\Delta_p^{-1}Q^{-1} = Q\Delta_p^{-1}Q^{-1}$.

Par ailleurs, grâce à la question 7., $M_p = \dfrac{1}{2}(D_p + D_p^{-1}) = \dfrac{1}{2}\left(Q\Delta_p Q^{-1} + Q\Delta_p^{-1}Q^{-1}\right)$, soit :

$$M_p = \frac{1}{2}Q(\Delta_p + \Delta_p^{-1})Q^{-1} = \frac{1}{2}Q\begin{pmatrix} z_0 + \frac{1}{z_0} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & z_1 + \frac{1}{z_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & z_{p-1} + \frac{1}{z_{p-1}} \end{pmatrix}Q^{-1}.$$

On peut alors conclure que dans la base $\mathcal{B}''$ de $\mathbb{C}^p$, la matrice de l'endomorphisme f_p dont M_p est la matrice, est diagonale.

14. *Montrons que M_p est semblable à* $T_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cos(2\pi/p) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cos(4\pi/p) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cos\left(\frac{2(p-1)\pi}{p}\right) \end{pmatrix}$ *:*

    Il suffit pour ça de dire que :

    $$\frac{1}{2}\left(z_k + \frac{1}{z_k}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{2ik\pi}{p}} + e^{-\frac{2ik\pi}{p}}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)$$

    ✐ Remarque que les valeurs sur la diagonales sont donc toutes réelles...

15. On suppose dans cette question que p est impair.
    a) Soit $k \in [\![1; p-1]\!]$. *Déterminons* $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)^n$:
    Cette limite vaut 0 car avec les hypothèses sur k, p étant impair, l'angle $\frac{2k\pi}{p}$ est dans l'intervalle $]0, 2\pi[\setminus\{\pi\}$, et donc son cosinus est strictement compris entre -1 et 1.
    b) En déduire $\mathop{lim}\limits_{n\to\infty} T_p^n$. On commence par rappeler qu'on obtient la puissance n-ième d'une matrice diagonale en élevant les termes de sa diagonale à la puissance n. Dès lors :

    $$\mathop{lim}_{n\to\infty} T_p^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

    c) Comme $\mathop{lim}\limits_{n\to\infty} X_n = \mathop{lim}\limits_{n\to\infty} M_p^n X_0 = \mathop{lim}\limits_{n\to\infty} QT_p^n Q^{-1} X_0 = Q \cdot \mathop{lim}\limits_{n\to\infty} T_p^n \cdot Q^{-1} X_0$
    on obtient :

    $$\lim_{n\to\infty} X_n = Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

    La première colonne de la matrice obtenue par le produit de

    $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ par } Q^{-1}$$

a tous ses coefficients égaux au coefficient en haut à gauche de Q^{-1}. On ne connaît pas ce coefficient, mais on sait que la somme des coefficients de X_n vaut 1 (et la multiplication par X_0 retournera justement cette première colonne...), donc la somme de leurs limites (qui est la limite de la somme) vaut 1 aussi. Donc ce coefficient vaut forcément $1/p$.

d) *Interprétons le résultat obtenu :* Comme dans le cas particulier $p = 3$, les différentes positions possibles pour la particules tendent vers l'équiprobabilité lorsque le nombre de déplacements tend vers l'infini.

ANNEXE PROBLEME 1 : « MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE »

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose disposer d'un n-échantillon $\{x_1, \cdots, x_n\}$ d'une loi de Pareto de paramètres α et β dont seul le paramètre β est connu.
Posons $X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha, \beta)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$, n variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi de Pareto dont il s'agit d'estimer la valeur la plus « vraisemblable » de α au regard de l'échantillon proposé.
On notera par la suite f_a sa densité.

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction g par :

$$g(a) = \mathbb{P}\left((|X_1 - x_1| \leq \varepsilon) \cap (|X_2 - x_2| \leq \varepsilon) \cap \cdots \cap (|X_n - x_n| \leq \varepsilon)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (|X_k - x_k| \leq \varepsilon)\right)$$

étant entendu que pour chaque valeur de a, la valeur de $\mathbb{P}(|X_k - x_k| \leq \varepsilon)$ sera distincte.

Comme les variables aléatoires X_k sont supposées indépendantes, on peut écrire avec ε aussi petit qu'on le souhaite :

$$g(a) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(|X_k - x_k| \leq \varepsilon)$$

La valeur de a qui semble la plus « vraisemblable » est celle pour laquelle $g(a)$ est maximale.
Recherchons donc la valeur de a qui maximise g...

On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_k - x_k| \leq \varepsilon) &= \mathbb{P}(x_k - \varepsilon \leq X_k \leq x_k + \varepsilon) \\ &= F_{X_k}(x_k + \varepsilon) - F_{X_k}(x_k - \varepsilon) \\ &= 2\varepsilon f_a(c) \text{ où } x_k - \varepsilon < c < x_k + \varepsilon \text{ d'après le Th. des accroissements finis} \end{aligned}$$

En effet, F_{X_k} est une fonction de répartition de variable aléatoire à densité et à ce titre elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le support de $X_k(\Omega) = [\beta, +\infty[$ et le T.A.F. peut donc s'appliquer sur l'intervalle $]x_k - \varepsilon, x_k + \varepsilon[$...

Dès lors, les valeurs de a qui maximisent $g(a)$ sont celles qui maximisent :

$$\frac{1}{2\varepsilon} g(a) = \prod_{k=1}^{n} f_a(c_i)$$

et en faisant tendre ε vers 0, on cherche a tel que :

$$\mathcal{L}(a) = \prod_{k=1}^{n} f_a(x_i)$$

soit maximal...