26 Vecteurs Aléatoires

Ce qu'il faut savoir faire à l'issue de la séquence...

□

Dans tout le chapitre, Ω désigne un univers fini. $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble des parties de Ω. C'est l'ensemble des issues. P est une probabilité.

Couples de variables aléatoires

Définition 1

On appelle couple de variables aléatoires la donnée de deux variables aléatoires X et Y sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On parle aussi de vecteur aléatoire (X, Y).

Exemple n° 1 Étant donné une expérience aléatoire, on associe donc à toute issue deux caractéristiques quantitatives. Par exemple, on choisit un individu ω au hasard dans une population. $X(\omega)$ représente son âge et $Y(\omega)$ son poids.

Exemple n° 2 On lance deux dés à six faces.
X associe à une issue le produit des deux dés. Y associe la somme.

LOI CONJOINTE, LOI MARGINALE

Définition 2

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire et $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$.
• On appelle loi conjointe de X et de Y la donnée des réels :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;m]\!] \, , P\Big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\Big)$$

• On appelle lois marginales du couple (X, Y) les lois des variables aléatoires X et Y.

Propriété 1 ***(Lien entre loi conjointe et loi marginale)***

La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Y = y_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$

$$\forall i \in [\![1;n]\!] \, , P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P\Big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\Big)$$

et de même avec le s.c.e $(X = x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$

$$\forall j \in [\![1;m]\!] \, , P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P\Big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\Big)$$

Les formules précédentes permettent de comprendre la terminologie « loi marginale ».
Si on prend l'exemple d'un couple de v.a.r (X, Y)
tel que $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et $Y(\Omega) = \{1, 2\}$), on a :

$y_i \backslash x_i$	x_1	x_2	x_3	total
y_1	$P([X = x_1] \cap [Y = y_1])$	$P([X = x_2] \cap [Y = y_1])$	$P([X = x_3] \cap [Y = y_1])$	$P(Y = y_1)$
y_2	$P([X = x_1] \cap [Y = y_2])$	$P([X = x_2] \cap [Y = y_2])$	$P([X = x_3] \cap [Y = y_2])$	$P(Y = y_2)$
total	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	$P(X = x_3)$	1

Les lois « marginales » sont les lois qu'on obtient « dans les marges ».

Propriété 2

Avec le notations précédentes,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} P(Y = j) = 1$$

LOI CONDITIONNELLE, V.A.R INDÉPENDANTES

Définition 3

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire et $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) \neq 0$.

On appelle <u>loi de Y conditionnée par l'événement $[X = x]$</u> la donnée des probabilités :

$$\forall j \in [\![1; m]\!], P([Y = y_j]/[X = x]) = \frac{P\Big([X = x] \cap [Y = Y_j]\Big)}{P(X = x)}$$

De même, si $y \in Y(\Omega)$, on définit la <u>loi de Y conditionnée par l'événement $[Y = y]$</u> par

$$\forall i \in [\![1; n]\!], P([X = x_i]/[Y = y])) = \frac{P\Big([Y = y] \cap [X = x_i]\Big)}{P(Y = y)}$$

Définition 4

On dit que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes ssi

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P\Big([X = x] \cap [Y = y]\Big) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

En d'autres termes, chaque évémenent que l'on peut définir à partir de X est indépendant de chaque événement défini à partir de Y.

Dans un exercice, on pourra soit avoir à prouver l'indépendance de deux v.a.r X et Y (à l'aide de la définition) soit utiliser l'indépendance si elle est donnée en hypothèse.

Propriété 3

Soit $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$. Si X et Y sont indépendantes,
- la loi de X conditionnée par $[Y = y]$ est la même que la loi de X.
- la loi de Y conditionnée par $[X = x]$ est la même que la loi de Y.

Propriété 4

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

composition avec une fonction de deux variables

Propriété 5

Soit $\left| (X, Y) \right.$ un vecteur aléatoire tel que $\left| \begin{smallmatrix} X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\} \\ Y(\Omega)=\{y_1,\dots,y_m\} \end{smallmatrix} \right.$ g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

On définit $Z = g(X, Y)$. Son support $Z(\Omega)$ vérifie

$$Z(\Omega) \subset \left\{ g(x_i, y_j) \;\middle|\; x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega) \right\}$$

$$\forall z \in Z(\Omega), P(Z = z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega) \\ g(x,y)=z}} P([X = x] \cap [Y = y])$$

Si de plus X et Y sont indépendantes, on a

$$\forall z \in Z(\Omega), P(Z = z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega) \\ g(x,y)=z}} P(X = x)P(Y = y)$$

on a $Z(\Omega) \subset \left\{ g(x_i, y_j) \;\middle|\; x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega) \right\}$
et pas $Z(\Omega) = \left\{ g(x_i, y_j) \;\middle|\; x_i \in X(\Omega), y_j \in Y(\Omega) \right\}$
En effet, les variables X et Y peuvent être corrélées dans ce cas tous les couples ne sont pas nécessairement atteints.

Espérance, formule de transfert

Propriété 6

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire, g une fonction de deux variables et $Z = g(X, Y)$.

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} g(x_i, y_j) P\Big([X = x_i] \cap [Y = y_j] \Big)$$

Exemple n° 3 Calculer directement l'espérance de $\sup(X_1, X_2)$.

Propriété 7 ***(linéarité de l'espérance)***

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\mathbf{E}(aX+bY)=a\mathbf{E}(X)+b\mathbf{E}(Y)$$

Preuve : avec la formule de transfert et la linéarité de la somme

Propriété 8

Soit (X,Y) un vecteur aléatoire tel que X et Y sont indépendantes. Alors

$$\mathbf{E}(XY)=\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$

Preuve : avec la formule de transfert et la linéarité de la somme

La réciproque est fausse !

CAS PARTICULIER : SOMME DE V.A.R

Propriété 9

Soit (X,Y) un vecteur aléatoire tel que $\left| \begin{smallmatrix} X(\Omega)=[\![0;n]\!] \\ Y(\Omega)=[\![0;m]\!] \end{smallmatrix} \right.$

Alors, si $Z=X+Y$, $Z(\Omega)\subset[\![0;n+m]\!]$

$$\forall z\in Z(\Omega), P(Z=z)=\sum_{k=0}^{n+m}P([X=k]\cap[Y=z-k])$$

Il est plus élégant de rédiger ce résultat avec la formule des probabilités totales.

La formule des probabilités totales avec le s.c.e $([X=i])_{0\leqslant i\leqslant n}$ donne :

$$\begin{aligned} P(Z=z) &= \sum_{i=0}^{n}P([X=i]\cap[Z=z]) \\ &= \sum_{i=0}^{n}P([X=i]\cap[X+Y=z]) \\ &= \sum_{i=0}^{n}P([X=i]\cap[Y=z-i]) \end{aligned}$$

On utilise ensuite la loi conditionnelle si on la connaît ou, si X et Y sont indépendantes, on continue les calculs.

Exemple n° 4

Exemple n° 5 **Somme de v.a.r indépendantes suivant une loi binômiale**

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ indépendantes. Déterminer la loi de $X+Y$.

On a $(X+Y)(\Omega) = [\![0; n+m]\!]$. Soit $k \in [\![0; m+n]\!]$

La famille $(X=i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ forme un s.c.e et la formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{n} P([X=i]\cap[Z=k]) \\ &= \sum_{i=0}^{n} P([X=i]\cap[X+Y=k]) \\ &= \sum_{i=0}^{n} P([X=i]\cap[Y=k-i]) \\ &= \sum_{i=0}^{n} P(X=i)P(Y=k-i) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i(1-p)^{n-i}\binom{m}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-(k-i)} \\ &= p^k(1-p)^{n+m-k}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} \\ &= p^k(1-p)^{n+m-k}\binom{n+m}{k} \text{ avec la formule de Van der Monde} \end{aligned}$$

$$\boxed{X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m,p)}$$

COVARIANCE, CORRÉLATION

Définition 5

Soit x et Y deux variables aléatoires. On appelle <u>covariance de X et Y</u> le réel

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}((X-\mathbf{E}(X))(Y-\mathbf{E}(Y)))$$

Propriété 10 ***(formule de Kœnig Huygens)***

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$

Propriété 11

Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbf{Cov}(X,Y) = 0$.
la réciproque est fausse

Propriété 12 ***(Propriétés de la covariance)***

soit X, Y, X_1, X_2 des variables et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

- $\mathbf{Cov}(X,X) = \mathbf{V}(X)$
- $\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{Cov}(Y,X)$ *symétrie*
- $\mathbf{Cov}(\lambda X_1 + \mu X_2, Y) = \lambda\mathbf{Cov}(X_1,Y) + \mu\mathbf{Cov}(X_2,Y)$ *linéarité à gauche*

Propriété 13 ***(propriétés de la variance)***

soit X, Y des variables et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\mathbf{V}(\lambda X + \mu Y) = \lambda^2 V(X) + \mu^2 V(Y) + 2\lambda\mu \ \mathbf{Cov}(X, Y)$$

Et en particulier,

$$\mathbf{V}(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathbf{Cov}(X, Y)$$

Généralisation au cas de n variables aléatoires

Définition 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, X_2, ..., X_n$ n variables aléatoires.
On appelle vecteur aléatoire le n-uplet $(X_1, ..., X_n)$.

Propriété 14 ***(linéarité de l'espérance : cas général)***

Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(X_1, ..., X_n)$ n variables aléatoires.

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{E}(X_k)$$

Autrement dit,

$$\mathbf{E}(a_1 X_1 + ... + a_n X_n) = a_1 \mathbf{E}(X_1) + ... + a_n \mathbf{E}(X_n)$$

Définition 7

n variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont dites mutuellement indépendantes ssi pour tout $(x_1, ..., x_n) \in X_1(\Omega) \times ... X_n(\Omega)$

$$P([X_1 = x_1] \cap ... \cap [X_n = x_n]) = P(X_1 = x_1) \times ... \times P(X_n = x_n)$$

De même que pour une famille d'événements, si n variables sont mutuellement indépendantes, alors elles sont indépendantes deux à deux. Mais la réciproque est fausse.

Propriété 15

Soit $X_1, ..., X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors pour tout $p \in [\![1; n-1]\!]$, si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}$, alors les variables $f(X_1, X_2, ..., X_p)$ et $g(X_{p+1}, ..., X_n)$ sont indépendantes

Propriété 16

Soit $X_1, ..., X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes, et $u_1, ..., u_n$ n fonctions réelles, alors les v.a.r $u_1(X_1), ..., u_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Propriété 17

Soit $X_1, ..., X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors

$$V(X_1 + ... + X_n) = V(X_1) + ... + V(X_n)$$

Exemple n° 6 **un exemple extrêmement pratique**
Si $X_1, ..., X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Avec les propriétés précédentes, on retrouve très simplement que :

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p = np$$

On retrouve aussi

$$\mathbf{V}(Y) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$$

Les sommes de var suivant une loi de Bernoulli ne servent pas que pour les lois binômiales, mais aussi dans d'autres contextes où l'on cherche à compter les succès.

Exemple n° 7 Si $X_1, ..., X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi admettant une espérance μ. On définit la moyenne empirique

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

C'est elle que l'on utilise pour estimer la moyenne d'une variable aléatoire et par exemple, vérifier la cohérence du résultat d'un calcul avec Python.

Par linéarité de la moyenne,

$$\mathbf{E}(\overline{X_n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_k) = \frac{1}{n} \times n\mu = \mu$$

$\rightarrow$ en BCPST2, on l'appelera « estimateur » de la moyenne.

Exemple n° 8 Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m, p)$
En effet, si $X_1, ..., X_n, X_n + 1, ..., X_{n+m}$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p.

X a même loi que $\sum_{k=1}^{n} X_k$ et Y a même loi que $\sum_{k=n+1}^{n+m} X_k$

Ainsi, $X + Y$ a même loi que $\sum_{k=1}^{n} X_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} X_k = \sum_{k=1}^{n+m} X_k$, c'est à dire $\mathcal{B}(n+m, p)$

Exercices

exercice 1 Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n, où $n > 3$. On extrait 3 jetons simultanément, on note X, Y et Z les trois numéros obtenus avec $X < Y < Z$.

- Déterminer la loi de Y.
- Calculer son espérance.

Proposition de corrigé :

1. $Y(\Omega) = [\![2; n-1]\!]$ car Y est strictement plus grand que le plus petit numéro qui vaut au moins 1.Donc $Y > 1$ et de même $Y < n$. Tous les cas intermédiaires sont clairement possibles.

   L'univers Ω peut être mis en bijection avec l'ensemble des parties à trois éléments dans $[\![1; n]\!]$, donc soit $\text{Card}(\Omega) = \binom{n}{3}$ et il y a équiprobabilité.

   Soit $j \in [\![2; n-1]\!]$. il y a $j-1$ jetons dont le numéro est strictement inférieur à j et $n-j$ choix pour Z, ce qui nous donne $(j-1)(n-j)$ triplets possibles.
   Comme il y a équiprobabilité,

$$P(Y = j) = \frac{\text{Card}([Y = j])}{\text{Card}(\Omega)} = \begin{cases} \frac{(j-1)(n-j)}{\binom{n}{3}} = \frac{6(j-1)(n-j)}{n(n-1)(n-2)} \text{ si } j \in [\![2; n-1]\!] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Un moyen de vérifier (mais c'est une vérification trop longue pour un DS !) notre raisonnement est de vérifier que $\sum_{j=2}^{n-1} P(Y = j) = 1$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{n-1} P(Y = j) &= \sum_{j=2}^{n-1} \frac{6(j-1)(n-j)}{n(n-1)(n-2)} \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left(\sum_{j=2}^{n-1} (-j^2 + (n+1)j - n) \right) \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-j^2 + (n+1)j - n) - (-1 + (n+1) - n) \right) \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left(-\sum_{j=1}^{n-1} j^2 + (n+1) \sum_{j=1}^{n-1} j - (n-1)n \right) \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left(-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + (n+1)\frac{(n-1)n}{2} - (n-1)n \right) \\
&= \frac{6}{n-2} \left(-\frac{(2n-1)}{6} + \frac{n+1}{2} - 1 \right) \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. Calculons l'espérance de Y, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(Y) = &= \sum_{j=2}^{n-1} jP(Y = j) \\
&= \sum_{j=2}^{n-1} \frac{6j(j-1)(n-j)}{n(n-1)(n-2)} \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left(\sum_{j=2}^{n-1} (-j^3 + (n+1)j^2 - nj) \right) \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left(\sum_{j=1}^{n-1} (-j^3 + (n+1)j^2 - nj) - (-1 + (n+1) - n) \right) \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left(-\sum_{j=1}^{n-1} j^3 + (n+1) \sum_{j=1}^{n-1} j^2 - n \sum_{j=1}^{n-1} j \right) \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \left(-\frac{(n-1)^2 n^2}{4} + (n+1)\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2} \right) \\
&= \frac{6}{n-2} \left(-\frac{(n-1)n}{4} + \frac{(n+1)(2n-1)}{6} - \frac{1}{2} \right) = \frac{6}{12(n-2)} \left(-3n^2 + 3n + 2(2n^2 + n - 1) \right) \\
&= \frac{1}{2(n-2)} \left(n^2 + n - 2 \right) = \frac{1}{2(n-2)} (n+1)(n-2)
\end{aligned}$$

$$= \frac{n+1}{2}$$

---

exercice 2 Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par

$$P(X=0)=\frac{1}{6}, \qquad P(X=1)=P(X=-1)=\frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad P(X=2)=P(X=-2)=\frac{1}{6}$$

Soit $Y = X^2$.

1. Donner la loi du couple (X, Y). En déduire la loi de Y.

2. X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathrm{Cov(X, Y)}$.

Proposition de corrigé :

1. La loi du couple (X, Y) est donnée par le tableau à doubles entrées suivant

$x \backslash y$	0	1	4	$P(X=x)$
-2	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
2	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$P(Y=y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0

On en déduit la loi de Y en sommant sur les colonnes,

y_j	0	1	2
$P(Y=y_j)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

2. X et Y ne sont pas indépendantes, en effet on a

$$P(X=0, Y=1)=0 \qquad \text{et} \qquad P(X=0)P(Y=1)=\frac{1}{12}\neq 0$$

Pour calculer la covariance de X et Y on a besoin de l'espérance de X et de Y. On a

$$\mathbf{E}(X)=\frac{1}{6}\times(-2)+\frac{1}{4}\times(-1)+\frac{1}{6}\times 0+\frac{1}{4}\times 1+\frac{1}{6}\times 2=0$$

$$\mathbf{E}(Y)=\frac{1}{6}\times 0+\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{3}\times 2=\frac{7}{6}$$

Avec le théorème de transfert (XY est finie, donc admet une espérance)

$$\mathbf{E}(XY)=\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP((X,Y)=(x,y))=\frac{1}{6}\times0\times0+\frac{1}{4}\times(-1)\times1+\frac{1}{4}\times1\times1+\frac{1}{6}\times(-2)\times2+\frac{1}{6}\times2\times2=0$$

Puis avec la formule de Kœnig Huygens,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov(X,Y)} &= \mathbf{E}(XY)-\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)\\ &=0\end{aligned}$$

Ainsi X et Y sont de covariance nulle mais <u>ne sont pas indépendantes</u>.

exercice 3

On lance n dés équilibrés et, pour tout entier i compris entre 1 et 6, on note X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la face i est apparue au moins une fois et à 0 sinon.

1. Donner la loi de X_i .

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de numéros de faces différents obtenus. Calculer l'espérance de X.

3. a. Pour $(i,j) \in [\![1;6]\!]^2$, $i \neq j$, déterminer la loi conjointe de (X_i, X_j). En déduire $\mathrm{Cov}(\mathrm{X_i}, \mathrm{X_j})$.
   b. Calculer $\mathbf{V}(X)$.

Proposition de corrigé :

1. Soit $i \in [\![1;6]\!]$. $X_i(\Omega) = \{0,1\}$. X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(X_i = 1)$.
   $[X_i = 0]$ est réalisé ssi la face i n'est jamais apparue, donc ssi on tire n fois un des 5 numéros de $[\![1;6]\!]$ distinct de i. Ainsi, par indépendance des tirages,
   $$P(X_i = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$
   On en déduit
   $$P(X_i = 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$
   $$\boxed{X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(1 - \left(\tfrac{5}{6}\right)^n\right)}$$

2. On remarque que $X = \sum_{k=1}^{6} X_k$, d'où par linéarité de l'espérance,
   $$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} \mathbf{E}(X_k) = \sum_{k=1}^{6} \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) = 6\left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$$

3. a. Soit $(i,j) \in [\![1;6]\!]^2$, $i \neq j$. $[X_i = 0] \cap [X_j] = 0$ est réalisé ssi lors des n tirages on tire un des quatre numéros distincts de i et j. Par indépendance des tirages,
   $$P([X_i = 0] \cap [X_j = 0]) = \left(\frac{4}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$
   $\boxed{\text{v1}}$ En plaçant les résultats dans un tableau, on obtient avec les règles usuelles la loi conjointe de (X_i, X_j) :

$x \backslash y$	0	1	$P(X_j = y)$
0	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$	$\left(\frac{5}{6}\right)^n$
1	$\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$	$1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n$	$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$
$P(X_i = x)$	$\left(\frac{5}{6}\right)^n$	$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$	1

   $\boxed{\text{v2}}$ Autre possibilité
   De plus on peut remarquer que $[\{X_i = 0] = ([X_i = 0] \cap [X_j = 1]) \cup ([X_i = 0] \cap [X_j = 0])$ et que les deux événements sus-mentionnés sont incompatibles. Ainsi
   $$P(X_i = 0) = P([X_i = 0] \cap [X_j = 1]) + P([X_i = 0] \cap [X_j = 0])$$
   D'où $P([X_i = 0] \cap [X_j = 1]) = P(X_i = 0) - P([X_i = 0] \cap [X_j = 0]) = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$
   et de manière similaire
   $$P([X_i = 1] \cap [X_j = 0]) = P(X_j = 0) - P([X_j = 0] \cap [X_1 = 0]) = \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$
   On obtient finalement la loi conjointe de (X_i, X_j)

   Les (X_k) suivant une loi de Bernoulli, on a
   $$E(X_i) = E(X_j) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$
   De plus, X_iX_j est finie donc admet une espérance donc d'après le théorème de transfert,

$E(X_iX_j) = 0\times0\times P([X_i=0]\cap[X_j=0]) + 1\times0\times P([X_i=1]\cap[X_j=0]) + 0\times1\times P([X_i=0]\cap[X_j=1]) + 1\times1\times P([X_i=1]\cap$

> on pouvait aussi remarquer que $X_iX_j \hookrightarrow \mathcal{B}(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{5}{6}\right)^n)$

et, avec la formule de Kœnig Huygens,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov(X_i,X_j)} &= \mathbf{E}(X_iX_j) - \mathbf{E}(X_i)\mathbf{E}(X_j)\\ &= 1-2\times\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^2\\ &= 1-2\times\left(\frac{5}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 + 2\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}\end{aligned}$$

> On peut remarquer que ce résultat ne dépend pas de i et j. On peut remarquer également que
> $$\mathbf{Cov}(X_i,X_j) = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{25}{36}\right)^n \neq 0$$
> ce qui confirme que les X_i ne sont pas mutuellement indépendantes (on le savait déjà car X est une somme de v.a.r de Bernoulli de même paramètre mais ne suit pas une loi binômiale !)

b. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{V}(X_1+X_2+X_3+X_4+X_5+X_6)\\ &= \sum_{i=1}^{6}\mathbf{V}(X_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 6}\mathrm{Cov(X_i,X_j)}\\ &= \sum_{i=1}^{6}\mathbf{V}(X_i) + 2\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=j+1}^{6}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)\\ &= 6\mathbf{V}(X_1) + 2\times\frac{6\times5}{2}\times\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}\right)\\ &= 6\times\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)\times\left(\frac{5}{6}\right)^n + 30\times\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}\right)\\ &= 6\left(\frac{5}{6}\right)^n - 36\left(\frac{5}{6}\right)^{2n} + 30\left(\frac{2}{3}\right)^n\end{aligned}$$

---

exercice 4

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire successivement et sans remise 2 jetons de ce sac. On note X le numéro du premier jeton tiré et Y le numéro du deuxième jeton tiré.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer $P(Y=j|X=i)$ pour $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$.
   Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la covariance du couple (X,Y).

Proposition de corrigé :

1. X suit une loi uniforme $\mathcal{U}([\![1;n]\!])$
2. Soit $(i,j)\in[\![1;n]\!]^2$. Supposons réalisé $[X=i]$ Alors avant le deuxième tirage, l'urne contient $n-1$ boules comportant tous les numéros de $[\![1;n]\!]$ sauf j. ainsi, si $j=i$, $[Y=j]$ ne peut être réalisé et $P(Y=i|X=i)=0$.
   Si $j\neq i$, l'urne contient alors exactement 1 boule numérotée j et $P(Y=j|X=i)=\frac{1}{n-1}$. Finalement,

$$P(Y=j|X=i)=\begin{cases}\frac{1}{n-1} \text{ si } i\neq j\\ 0 \text{ si } i=j\end{cases}$$

Comme par exemple $P(Y=1|X=1)\neq P(Y=1)$, les v.a.r X et Y ne sont pas indépendantes.

3. De ce qui précède, on déduit la loi de Y. Pour tout $j\in[\![1;n]\!]$,

$$P(Y=j)=\sum_{i=1}^{n}P(Y=j|X=i)P(X=i)=\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n}\frac{1}{n(n-1)}=(n-1)\frac{1}{(n(n-1)}=\frac{1}{n}$$

Ainsi Y suit également une loi uniforme $\mathcal{U}([\![1;n]\!])$.

On a $E(X)=E(Y)=\frac{n+1}{2}$.

De plus avec le théorème de transfert (XY est finie donc admet une espérance)

$$E(XY)=\sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}ijP([X=i]\cap[Y=j])=\sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}ijP(X=i)P(Y=j|X=i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}ij\frac{1}{n(n-1)}$$

$$E(XY)=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}i\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}j=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}i\left[\frac{n(n+1)}{2}-i\right]=\frac{1}{n(n-1)}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

Finalement

$$E(XY)=\frac{n+1}{12(n-1)}[3n(n+1)-2(2n+1)]=\frac{n+1}{12(n-1)}[-n^2-n]=\frac{n+1}{12(n-1)}[3n^2-n-2]=\frac{n+1}{12(n-1)}(n-1)(3n+$$

Avec la formule de Kœnig Huygens,

$$\mathbf{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{(n+1)(3n+2)}{12}-\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{(n+1)(3n+2)-3(n+1)^2}{12}=\frac{(n+1)(3n+2-3n}{12}$$

$$\boxed{\mathbf{Cov}(X,Y)=-\frac{n+1}{12}}$$

---

exercice 5

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y=(X+1)^2$. Calculer la covariance de X et de Y.

Proposition de corrigé :On a :

$$\mathbf{E}(X)=\frac{n+1}{2} \text{ et } \mathbf{E}(X^2)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } \mathbf{E}(X^3)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n}=\frac{n(n+1)^2}{4}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y)&=\mathbf{E}((X+1)^2)\\&=\mathbf{E}(X^2+2X+1)\\&=\mathbf{E}(X^2)+2\mathbf{E}(X)+1\\&=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}+n+1+1\\&=\frac{2n^2+9n+13}{6}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov(X,Y)}&=\mathbf{E}(XY)-\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)\\&=\mathbf{E}(X^3+2X^2+X)-\frac{n+1}{2}\frac{2n^2+9n+13}{6}\\&=\mathbf{E}(X^3)+2\mathbf{E}(X^2)+\mathbf{E}(X)-\frac{(n+1)(2n^2+9n+13)}{12}\\&=\frac{n(n+1)^2}{4}+2\frac{(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n+1}{2}-\frac{(n+1)(2n^2+9n+13)}{12}\\&=\frac{(n+1)(3n(n+1)+4(2n+1)+6-(2n^2+9n+13))}{12}\\&=\frac{(n+1)(n^2+2n-3)}{12}\\&=\frac{(n+1)(n-1)(n+3)}{12}\end{aligned}$$

exercice 6 Soit X et Y deux v.a.r. discrètes admettant des variances $\mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{V}(Y)$. On pose $Z = X + Y$ et $T = X - Y$.

1. Montrer que si Z et T sont indépendantes alors $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y)$.
2. Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes de même lois prenant les valeurs $1, 2, 3$ avec la probabilité $\frac{1}{3}$
   a. Montrer que $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y)$.
   b. Déterminer les lois de Z et de T. Sont-elles indépendantes ?

Proposition de corrigé :

1. On suppose que Z et T sont indépendantes, on a alors en particulier $\mathbf{E}(ZT) = \mathbf{E}(Z)\mathbf{E}(T)$, c'est-à-dire

$$\mathbf{E}((X+Y)(X-Y)) = (\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y))\,(\mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(Y))$$

D'où

$$\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(Y^2) = \mathbf{E}(X)^2 - \mathbf{E}(Y)^2$$

Et donc

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 = \mathbf{V}(Y)$$

2. Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes de même lois prenant les valeurs $1, 2, 3$ avec la probabilité $\frac{1}{3}$

   a. X et Y ont la même loi, elles ont donc la même variance.

   b. Les lois de Z et T sont données par les tableaux suivants

z_i	2	3	4	5	6
$P(Z = z_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

t_i	-2	-1	0	1	2
$P(T = t_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

   Z et T ne sont pas indépendantes, en effet

$$P(Z = 6, T = 2) = P(\{X = 3, Y = 3\} \cap \{X = 3, Y = 1\}) = 0 \qquad \text{et} \qquad P(Z = 6)P(T = 2) = \frac{1}{81} \neq 0$$

exercice 7 Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant toutes les deux une loi $\mathcal{B}\left(3, \frac{1}{2}\right)$. Soit $Z = X - Y$.

1. Déterminer la loi de Z.

2. Z et X sont-elles indépendantes ?

3. Calculer $\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Z})$.

Proposition de corrigé :

- La loi de Z est donnée par le tableau suivant

z_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P(Z = z_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

- Z et X ne sont pas indépendantes, en effet on a

$$P(Z = -3, X = 3) = P(X = 0, Y = 3, X = 3) = 0 \qquad \text{et } P(Z = -3)P(X = 3) = \frac{1}{512} \neq 0$$

- Comme X et Y sont indépendantes, on a, en particulier $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Z}) &= \mathbf{E}(XZ) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Z) \\
&= \mathbf{E}(X(X-Y)) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(X-Y) \\
&= \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)^2 + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) \\
&= \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(X^2) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) \\
&= \mathbf{V}(X) \\
&= 3 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

exercice 8 **Loi de Hardy-Weinberg**

d'après Bastien Marmeth

En 1908, un mathématicien anglais, G.H. Hardy, et un médecin allemand W. Weinberg ont formulé une loi, connue sous le nom de loi de Hardy-Weinberg, qui concerne les fréquences alléliques pour un gène pouvant s'exprimer sous la forme de deux allèles A et a dans une population diploïde idéale. Nous dirons qu'une population est idéale lorsque

- La population est de taille infinie.
- Les individus s'y unissent aléatoirement, impliquant l'union aléatoire des gamètes. Il n'y a donc pas de choix du conjoint en fonction de son génotype. On dit alors que la population est panmictique.
- Il n'y a pas de migration. Aucune copie allélique n'est apportée de l'extérieur.
- Il n'y a pas de mutation.
- Il n'y a pas de sélection.
- Les générations sont séparées.

On a alors la loi de Hardy-Weinberg :

Si $p \in [0, 1]$ est la proportion d'allèles A dans la population initiale et $1-p$ la proportion d'allèles a alors c'est encore le cas à chaque génération suivante.
De plus, si r, s, t sont les proportions respectives des génotypes AA, Aa et aa dans la population initiale avec $r+s+t=1$ alors les fréquences de AA, Aa et aa pour toutes les générations suivantes sont égales à

$$\left(r+\frac{s}{2}\right)^2, \qquad 2\left(r+\frac{s}{2}\right)\left(t+\frac{s}{2}\right), \qquad \left(t+\frac{s}{2}\right)^2$$

Cette loi est généralisable à un locus avec plusieurs allèles $A_1, A_2, \cdots, A_k$.

<u>Conséquences.</u>

- Les relations de dominance entre allèles n'ont aucun effet sur l'évolution des fréquences alléliques.
- La ségrégation mendélienne aléatoire des chromosomes préserve la variabilité génétique des populations.
- L'évolution étant définie par un changement des fréquences alléliques, une population diploïde idéale n'évolue pas.
- Seules les violations des propriétés de la population idéale permettent le processus évolutif.

Applicabilité de la loi de Hardy-Weinberg.
Bien que les propriétés d'une population idéale apparaissent un peu surréalistes, la plupart des populations présentent des fréquences génotypiques en équilibre de Hardy-Weinberg pour une grande majorité des locus. Ceci est dû au fait que cet équilibre résulte avant tout de la ségrégation aléatoire des chromosomes qui a lieu à chaque génération. Par contre, dans les populations naturelles, les fréquences alléliques varient constamment d'une génération à l'autre sous l'influence de divers facteurs (sélection, dérive génétique, etc...). Mais l'équilibre de Hardy-Weinberg est rétabli au début de chaque génération. L'équilibre est avant tout perturbé si les gamètes ne sont pas produites aléatoirement (meiotic drive), ou si il y a choix du conjoint (consanguinité). Notez que la sélection naturelle n'affecte pas l'équilibre de Hardy-Weinberg parmi les nouveau-nés. Son effet ne devient perceptible que par la suite, au cours du développement.

On va prouver la loi de Hardy-Weinberg. Soit X_i la variable aléatoire exprimant le génotype d'un individu tiré au hasard parmi la population à la génération i. On suppose que la la loi de X_0 est donnée par le tableau suivant :

x_i	AA	Aa	aa
$P(X = x_i)$	p	q	r

Pour obtenir un individu de la génération $i + 1$ on tire indépendamment deux individus de la génération i et on tire aléatoire un des allèles de chaque individu pour constituer le génotype de notre nouvel individu.

1. On note $p_i = P(X_i = AA)$, $q_i = P(X_i = Aa)$ et $r_i = P(X_i = aa)$.
   Exprimer $(p_{i+1}, q_{i+1}, r_{i+1})$ en fonction de (p_i, q_i, r_i).

2. Déterminer (p_1, q_1, r_1) et (p_2, q_2, r_2). Que peut-on conclure ?

Proposition de corrigé :

- Chacun des parents d'un individu AA a au moins un allèle A.
  Les différents couples de parents possibles, ainsi que la probabilité que ce couple ait un enfant de génotype AA est résumé dans le tableau suivant :

	AA	Aa
AA	1	$\frac{1}{2}$
Aa	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

  D'où
$$p_{i+1} = p_i^2 + \frac{1}{2}p_iq_i + \frac{1}{2}q_ip_i + \frac{1}{4}q_i^2 = p_i^2 + p_iq_i + \frac{q_i^2}{4}$$
  De manière similaire on a
$$r_{i+1} = r_i^2 + r_iq_i + \frac{q_i^2}{4}$$
  et
$$\begin{aligned} q_{i+1} &= 1 - p_{i+1} - r_{i+1} \\ &= 1 - p_i^2 - r_i^2 - p_iq_i - r_iq_i - \frac{q_i^2}{2} \\ &= (p_i + q_i + r_i)^2 - p_i^2 - r_i^2 - p_iq_i - r_iq_i - \frac{q_i^2}{2} \\ &= p_i^2 + q_i^2 + r_i^2 + 2p_iq_i + 2q_ir_i + 2p_ir_i - p_i^2 - r_i^2 - p_iq_i - r_iq_i - \frac{q_i^2}{2} \\ &= \frac{q_i^2}{2} + p_iq_i + q_ir_i + 2p_ir_i \end{aligned}$$

On peut aussi obtenir q_{i+1} de manière similaire à p_i et r_i en énumérant les situations menant à un enfant Aa.

- D'après la question précédente on a

$$p_1 = p^2+pq+\frac{q^2}{4} = \left(p+\frac{q}{2}\right)^2 \qquad q_1 = \frac{q^2}{2}+pq+qr+2pr = 2\left(p+\frac{q}{2}\right)\left(r+\frac{q}{2}\right) \qquad r_1 = r^2+qr+\frac{q^2}{4} = \left(r+\frac{q}{2}\right)^2$$

Puis

$$\begin{aligned}
p_2 &= p_1^2 + p_1q_1 + \frac{q_1^2}{4}\\
&= \left(p+\frac{q}{2}\right)^4 + 2\left(p+\frac{q}{2}\right)^3\left(r+\frac{q}{2}\right) + \frac{4\left(p+\frac{q}{2}\right)^2\left(r+\frac{q}{2}\right)^2}{4}\\
&= \left(p+\frac{q}{2}\right)^2\left(\left(p+\frac{q}{2}\right)^2 + 2\left(p+\frac{q}{2}\right)\left(r+\frac{q}{2}\right) + \left(r+\frac{q}{2}\right)^2\right)\\
&= \left(p+\frac{q}{2}\right)^2\left(\left(p+\frac{q}{2}\right)+\left(r+\frac{q}{2}\right)\right)^2\\
&= \left(p+\frac{q}{2}\right)^2(p+q+r)^2\\
&= \left(p+\frac{q}{2}\right)^2\\
&= p_1
\end{aligned}$$

De manière similaire on obtient $q_2 = q_1$ et $r_2 = r_1$.

On a donc prouvé la loi de Hardy-Weinberg et donc ses conséquences dont en particulier la non-disparation des allèles récessifs n'affectant pas le succès reproductif comme le groupe sanguin O, le facteur rhésus — ou bien encore la rousseur.

---

exercice 9 Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue deux tirages sans remise. On note X le numéro porté par la première boule et Y le numéro porté par la seconde boule.

1. Déterminer la loi conjointe de (X,Y), puis les lois de X et de Y.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer l'espérance de XY, puis en déduire $\mathbf{Cov}(X,Y)$. Retrouver alors le résultat de la question précédente.

Proposition de corrigé :

1. L'univers est l'ensemble des 2-listes d'éléments distincts de $[\![1;n]\!]$.
Il y a équiprobabilité et $\text{Card}(\Omega) = n(n-1)$.

$X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$. Soit $(k,\ell) \in [\![1;n]\!]^2$.

• Pour $k \neq \ell$, $[X=k] \cap [X=\ell]$ est réalisé par une unique issue et $P([X=k]\cap[Y=\ell]) = \frac{1}{n(n-1)}$
• Pour $k=\ell$, $[X=k]$ et $[Y=\ell]$ sont incompatibles et $P([X=k]\cap[Y=\ell]) = 0$.

La loi conjointe de (X,Y) est donc donnée par :

$$\boxed{\forall (k,\ell) \in [\![1;n]\!]^2,\ P([X=k]\cap[Y=\ell]) = \begin{cases} \frac{1}{n(n-1)} & \text{si } k\neq \ell \\ 0 & \text{si } k=\ell \end{cases}}$$

2. Soit $(k,\ell) \in [\![1;n]\!]^2$. Il est clair que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;n]\!])$. Ainsi, $P(X=k) = \frac{1}{n}$.
D'autre part, la formule des probabilités totales avec le s.c.e $\left([X=i]\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ donne :
$$P(Y=\ell) = \sum_{i=1}^{n} P(X=i)P(Y=\ell|X=i)$$
Or, si $[X=i]$ est réalisé, il reste $n-1$ boules dans l'urne, dont une seule numérotée ℓ (sauf si $i=\ell$)

$$P(Y=\ell|X=i)=\begin{cases}\frac{1}{n-1} & \text{si } \ell\neq i\\ 0 & \text{si } \ell=i\end{cases}$$

Ainsi, $P(Y=\ell)=(n-1)\times\frac{1}{n}\times\frac{1}{n-1}=n$ Donc $P(X=k)P(Y=\ell)=\frac{1}{n^2}\neq P([X=k]\cap[Y=\ell])$

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

3. XY admet une espérance donc d'après le théorème de transfert,

$$E(XY)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}k\ell P([X=k]\cap[Y=\ell])$$
$$E(XY)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n}\frac{k\ell}{n(n-1)}=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}k\sum_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq k}}^{n}\ell$$
$$E(XY)=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{n(n+1)}{2}-k\right)$$
$$E(XY)=\frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n(n+1)}{2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$$
$$E(XY)=\frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$
$$E(XY)=\frac{n(n+1)}{12n(n-1)}\Big(3n(n+1)-2(2n+1)\Big)=\frac{n+1}{12(n-1)}\Big(3n^2-n-2\Big)=\frac{n+1}{12(n-1)}(n-1)(3n+2)$$
$$E(XY)=\frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$

Avec la formule de Kœnig Huygens, on a :

$$\mathbf{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{(n+1)(3n+2)}{12}-\frac{n+1}{2}\times\frac{n+1}{2}=-\frac{n+1}{2}\neq 0$$

Ainsi, $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$

---

exercice 10 Minimum, maximum et somme de lois uniformes

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et on effectue deux tirages avec remise dans cette urne. On note X le numéro de la première boule extraite et Y le numéro de la seconde. On note également I le plus petit des deux numéros tirés et S le plus grand. On rappelle (il faut savoir le redémontrer) que la loi de S est donnée par

$$\forall k\in[\![1;n]\!],\ P(S=k)=\frac{2k-1}{n^2}$$

1. Donner la loi de I.
2. Calculer $E(S), E(I)$, puis $V(S)$ et $V(I)$.
3. Déterminer une relation liant X, Y, I et S. En déduire $V(I+S)$, puis le coefficient de corrélation linéaire de I et S.

Proposition de corrigé :

1. $I(\Omega)=[\![1;n]\!]$ et pour tout $k\in[\![1;n]\!]$,

$$P(I\geqslant k)=P([X\geqslant k]\cap[Y\geqslant k])$$

Par indépendance de X et Y,

$$P(I\geqslant k)=P(X\geqslant k)P(Y\geqslant k)=\Big(P(X\geqslant k)\Big)^2$$

Or, $P(X\geqslant k)=\sum_{i=k}^{n}P(X=i)=\frac{n-k+1}{n}$ donc $P(I\geqslant k)=\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2$

On déduit alors (la formule précédente restant vraie pour $k=n+1$) :

$$P(I=k)=P(I\geqslant k)-P(I\geqslant k+1)=\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2-\left(\frac{n-k}{n}\right)^2=\ldots=\frac{2n-2k+1}{n^2}$$
$$\boxed{\forall k\in[\![1;n]\!],\ P(I=k)=\frac{2n-2k+1}{n^2}}$$

2.

---

exercice 11 On a n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte. Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y)

2. Calculer $P(X = Y)$

3. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$

---

exercice 12

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.

On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur tirée et on mélange parfaitement.
On répète l'opération dans une succession de n tirages ($n \geqslant 2$)

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i\text{-ème tirage} \\ X_i = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit alors pour $2 \leqslant p \leqslant n$ la variable aléatoire Z_p par

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$$

1. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.

2. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.

3. a. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.

   b. Soit $p \leqslant n - 1$. Déterminer $P(X_{p+1} = 1 | Z_p = k)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.

   c. En utilisant la formule des probababilités totales, montrer que :
   $$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$$

   d. Montrer (par récurrence) que pour tout $p \in [\![1; n]\!]$, $P(X_p = 1) = P(X_p = 0) = \frac{1}{2}$.

Proposition de corrigé :

---

exercice 13 Soit $E = \{1, \ldots, d\}$ un ensemble fini. On appelle marche aléatoire sur E une suite (X_n) de variables aléatoires à valeurs dans E telle que, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, d\}^2$, il existe $p_{i,j} \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$, $P(X_n = i | X_{n-1} = j) = p_{i,j}$. On appelle matrice de transition de la marche aléatoire la matrice $A = (p_{i,j})_{1 \leq i, j \leq d}$.

1. Démontrer que, pour tout $j \in \{1, \ldots, d\}$, on a $\sum_{i=1}^{d} p_{i,j} = 1$.

2. Une puce se déplace sur un triangle de la façon suivante. Si elle est sur un sommet, elle se déplace de façon équiprobable sur l'un des deux autres sommets (elle ne peut rester sur place). Donner la matrice de transition A dans ce cas.

3. On appelle matrice état au temps n la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ \ldots \\ P(X_n = d) \end{pmatrix}$. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $U_n = A^n U_0$.

4. On dit que la marche aléatoire est convergente si la suite (U_n) est convergente. Démontrer que si la marche aléatoire est convergente, ce ne peut être que vers un état stable de la marche, c'est-à-dire vers une solution de $AU = U$.

5. Le cas $d = 2$: on considère dans cette question une marche aléatoire à deux états, on note $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$ et $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $p_{n+1} = (1-p-q)p_n + q$. En déduire que les suites (p_n) et (q_n) sont convergentes vers des réels que l'on précisera.

6. On retourne à l'étude de la marche aléatoire sur le triangle.

   a. Démontrer, sans aucun calcul, que la matrice A est diagonalisable.

   b. Démontrer que pour tout entier n, on a
   $$A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$$
   où
   $$u_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\right) \text{ et } v_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n}\right).$$

   c. En déduire que, quelque soit l'état initial U_0, la suite (U_n) est convergente.