TD 14 _ VAR finies.

Exercice 6 _ Correction

① $a_1 = P(A_1) = 1/4$; $b_1 = P(B_1) = 3/4$
Pour a_2 et b_2 on utilise la FPT avec le SCE : $\{A_1, B_1\}$
Alors
$a_2 = P(A_2) = P_{A_1}(A_2) \cdot P(A_1) + P_{B_1}(A_2) \cdot P(B_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{9}{16}$

$b_2 = P(B_2) = 1 - P(A_2) = 1 - a_2 = \frac{7}{16}$ car $\{A_2, B_2\}$ SCE.

② - On cherche à écrire une fonction qui retourne une liste, qu'on appelera P, qui contient les positions successives du mobile. On initialise P à [0] car le mobile est initialement en A.
- On modélise n déplacement donc on fait une boucle "Pour"
- A chaque étape, si le mobile est en A alors il passe en B avec une probabilité $\frac{3}{4}$ (rdm.random() < 0.75) et s'il est en B, il reste en B avec une probabilité de 1/3 (rdm. random() < 1/3)
Dans tous les autres cas, il sera en A

une fonction possible est la suivante :

```
def simulOscillations(n):
    P=[0]
    for i in range(n):
        h=rdm.random()
        pos = 0
        if (P[i]==0 and h <= 0.75) or (P[i]==1 and
                h <= 1/3):
            pos = 1
        P.append(pos)
    return P
```

On estime l'espérance en répétant un grand nombre de fois la simulation précédente en récupérant la position du mobile pour chaque position $k \in [\![1, n]\!]$.

Deux méthodes distinctes sont proposées, il semble que le mobile tende vers un état stable avec $\lim\limits_{n \to \infty} P(A_n) \simeq 0.47$.

③ Argument mathématique

On utilise le SCE : $\{A_n, B_n\}$. Alors $\forall n \geq 0$, d'après la F.P.T. :

$$a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1}).P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}).P(B_n)$$
$$= \frac{1}{4}.a_n + \frac{2}{3} b_n$$

On obtient de même :

$$b_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{3} b_n$$

④ Méthode 1

$\{A_n, B_n\}$ SCE donc $b_n = 1 - a_n$

D'où :

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{2}{3} b_n = \frac{1}{4} a_n + \frac{2}{3}(1 - a_n) = -\frac{5}{12} a_n + \frac{2}{3} \quad \forall n \geq 0.$$

Soit $\ell = -\frac{5}{12}\ell + \frac{2}{3} \iff \ell = \frac{8}{17}$

On a donc :

$$a_{n+1} - \ell = -\frac{5}{12}(a_n - \ell) \Rightarrow a_n - \ell = \left(-\frac{5}{12}\right)^n (a_0 - \ell) \quad \forall n \geq 0$$

car $(a_n - \ell)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique.

Soit $a_n = \left(-\frac{5}{12}\right)^n \left(a_0 - \frac{8}{17}\right) + \frac{8}{17}$ avec $a_0 = 1$.

Conclusion

$$\boxed{a_n = \frac{9}{17}\left(-\frac{5}{12}\right)^n + \frac{8}{17} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Note : on vérifie que $\lim_{\infty} a_n = \frac{8}{17} \simeq 0.4706$ conforte le résultat obtenu en ②.

④ Méthode algébrique.

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{2}{3} b_n \\ b_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + \frac{1}{3} b_n \end{cases} \iff X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 2/3 \\ 3/4 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A.X_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Une récurrence rapide permet de conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = A^n . X_0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

b) Posons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \,/\, A = \mathcal{M}_B(f)$ avec B base canonique de $\mathbb{R}^2$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5/12 \end{pmatrix}$ et A sont semblables si il existe une base $B' = (u_1, u_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $D = \mathcal{M}_{B'}(f)$

Conséquence :

On cherche deux vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^2$ tels que

$$f(u_1) = (1, 0)_{B'} = u_1 \quad \text{et} \quad f(u_2) = \left(0, -\frac{5}{12}\right)_{B'} = -\frac{5}{12} u_2$$

1ère étape : Cherchons $u_1 = (x,y)_{\mathcal{B}}$ / $f(u_1) = u_1$ (*)

!) On dispose de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, à savoir la matrice A, donc on va traduire matriciellement cette égalité :

$$f(u_1) = u_1 \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (S_1)$$

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1/4\, x + 2/3\, y \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{3}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1/4\, x + 2/3\, y = x \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{3}y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3/4\, x + \frac{2}{3}y = 0 \\ \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{9}y \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

En prenant $y = 9$, on obtient que $\underline{u_1 = (8,9)_{\mathcal{B}}}$ vérifie $\underline{f(u_1) = u_1}$

!) Remarque : Pour déterminer u_1 / $f(u_1) = u_1$, les sujets vous amèneront souvent à écrire les choses différemment. A savoir :

$$f(u_1) = u_1 \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow AX - X = 0 \Leftrightarrow (A - I_2)X = 0 \quad (S_1')$$

$$(S_1') \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3/4 & 2/3 \\ 3/4 & -2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - I_2)} \; !$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}x - 2/3\, y = 0$$

On conclura dans ce cas que :

$$\mathrm{Ker}(A - I_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \;/\; x = \frac{8}{9}y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 8/9\, y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 8/9 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$; on peut alors prendre

$$\boxed{u_1 = \left(\frac{8}{9}, 1\right) \text{ ou } u_1 = (8,9)}$$ ..

!) Appliquons cette rédaction pour chercher $u_2 = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f(u_2) = -\frac{5}{12}u_2 \Leftrightarrow AX = -\frac{5}{12}X \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow AX + \frac{5}{12}X = 0 \Leftrightarrow \left(A + \frac{5}{12}I_2\right)X = 0.$$

Le vecteur u_2 cherché appartient donc au noyau de la matrice $(A + \frac{5}{12}I_2)$...

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\left(A + \frac{5}{12}I_2\right) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 3/4 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y = 0$$

D'où

$$\mathrm{Ker}\left(A + \frac{5}{12}I_2\right) = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Conclusion : on prendra $u_2 = (-1, 1)$ [ou $u_2 = (1,-1)$...]

b) et on vérifie que : $A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/12\\-5/12\end{pmatrix} = -\frac{5}{12}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

Soit $f(u_2) = -\frac{5}{12}\cdot u_2$.

Et comme u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, on peut conclure que $B' = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ telle que $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = -\frac{5}{12}u_2$

Conséquence : Dans cette base B' : $\begin{cases} f(u_1) = u_1 = \boxed{(1,0)_{B'}} \\ f(u_2) = -\frac{5}{12}u_2 = \boxed{\left(0, -\frac{5}{12}\right)_{B'}} \end{cases}$

Soit

$$M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{12} \end{pmatrix} = D$$

Conclusion : $\boxed{\text{A et D sont semblables avec } D = P^{-1}AP \text{ avec } P = \mathrm{Pass}(B, B') = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}}$

c) L'inverse de P s'obtient directement par formule d'inversion des matrices d'ordre 2

Soit $P^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$

et par récurrence $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Donc

$$X_n = A^n X_0 = PD^nP^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = PD^n \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{17}P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{5}{12}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-9\end{pmatrix} = \frac{1}{17}P\begin{pmatrix}1\\-9\left(-\frac{5}{12}\right)^n\end{pmatrix}$$

Soit

$$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 8 + 9\left(-\frac{5}{12}\right)^n \\ \ldots \end{pmatrix}$$

(!) la 2ème ligne ne nous intéresse pas car $b_n = 1 - a_n$ ...!

Conclusion : $\boxed{\text{On obtient à nouveau que } \forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{8}{17} + \frac{9}{17}\left(-\frac{5}{12}\right)^n}$