# 11 T.D. Intégrales généralisées.

- Convergence d'une intégrale généralisée d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert (✐ « La convergence est traduite en termes de limites portant sur une primitive »). Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité.
- Propriétés des intégrales convergentes : linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance.
- Adaptation de l'intégration par parties aux intégrales impropres. Adaptation de la formule de changement de variable pour les intégrales impropres.
- Théorème de convergence par comparaison pour deux fonctions positives $f$ et $g$ telles que $f \leq g$.
- Convergence absolue d'une intégrale généralisée. Condition suffisante pour obtenir la convergence de l'intégrale.
- L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$ converge et vaut $\sqrt{2\pi}$.

## Exercice 1 ✶ :

Dire dans chacun des cas suivants si l'intégrale est impropre. Si oui, étudier sa nature et donner sa valeur en cas de convergence.
✐ *Remarques :* On ne cherchera pas à calculer la valeur de l'intégrale dans les cas b) et h) et, pour i) et j), on pourra faire les changements de variables respectifs : $u = \ln(t)$ et $u = \sqrt{x}$.

$$a)I = \int_0^{\infty} te^{-t}dt; \quad b)I = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt; \quad c)\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}; \quad d)I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}dt$$

$$e)I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}; \quad f)I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}; \quad g)I = \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}dt; \quad h)I = \int_{-1}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}dt$$

$$i)I = \int_0^{+\infty} \cos(\ln(t))dt; \quad j)I = \int_0^1 \frac{dx}{\pi\sqrt{x}\sqrt{1-x}}; \quad k)I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt; \quad l)I = \int_1^{+\infty} e^{-2t^2+4t-1}dt$$

## Exercice 2 ✶✶ :

① Montrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}dt$.

② Démontrer que $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(x)}{1+x^2}dx$ convergent.

③ En déduire la convergence et la valeur de $I = \int_0^{\infty} \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}dx$.

**Exercice 3 ✶ : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose** $f(x) = \arctan(1+x) - \arctan(x)$

① *Montrons que l'intégrale* $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ *converge :* C'est une question de cours.

On commence par noter que $g : t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc $I$ est généralisée à la borne $+\infty$.

On pose $I(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$. Soit $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} I(x) = 1$. ***Conclusion*** : $\boxed{I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \text{ converge et vaut } 1}$.

② Pour tout $x \geq 1$, la fonction arctan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[x, x+1]$.
D'après le théorème des accroissements finis, on a donc :

$$\exists c \in ]x, x+1[/ \arctan(x+1) - \arctan(x) = \arctan'(c) = \frac{1}{1+c^2}$$

Or $1 \leq x < c < x+1 \Rightarrow 1 + x^2 < 1 + c^2 < 1 + (1+x)^2 \Rightarrow \dfrac{1}{1+c^2} < \dfrac{1}{1+x^2}$ car $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Par ailleurs, $1 + x^2 > x^2$ donc $\dfrac{1}{1+x^2} < \dfrac{1}{x^2}$ toujours par décroissance de $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

***Conclusion*** : $\boxed{\forall x \geq 1,\ f(x) \leq \dfrac{1}{x^2}}$

Il nous reste à montrer, pour appliquer le théorème de convergence par comparaison des intégrales de fonctions positives, que $f$ est positive sur $[1, +\infty[$, ce qui est immédiat car la fonction arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc $x < x+1 \Rightarrow \arctan(x) < \arctan(x+1) \Rightarrow f(x) \geq 0$.

Le TCvCIFP permet à partir de la question 1. de conclure que $\boxed{\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx \text{ est convergente}}$.

③ Par linéarité de l'intégrale, on a : $\displaystyle\int_A^B f(t)dt = \int_A^B \arctan(t+1)dt + \int_A^B \arctan(t)dt$.
Sur la 1ère intégrale du membre de droite, on fait le changement de variable $s = t+1 = u(t)$ avec $u \in \mathcal{C}^1([A, B])$.
Alors $\displaystyle\int_A^B \arctan(t+1)dt = \int_{A+1}^{B+1} \arctan(s)ds = \int_{A+1}^{B+1} \arctan(t)dt$ ($s$ est une variable muette). Soit :

$$\begin{aligned}
\int_A^B f(t)dt &= \int_{A+1}^{B+1} \arctan(t)dt - \int_A^B \arctan(t)dt \\
&= \int_{A+1}^{A} \arctan(t)dt + \int_A^B \arctan(t)dt + \int_B^{B+1} \arctan(t)dt - \int_A^B \arctan(t)dt \text{ par relation de Chasles} \\
&= \int_{A+1}^{A} \arctan(t)dt + \int_B^{B+1} \arctan(t)dt = \boxed{\int_B^{B+1} \arctan(t)dt - \int_A^{A+1} \arctan(t)dt}
\end{aligned}$$

④ *Déduisons-en que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ *converge et vaut* $\pi$ *:* On applique pour ça le théorème de la valeur moyenne.

- $\exists c_1 \in ]B, B+1[/ \displaystyle\int_B^{B+1} \arctan(t)dt = (B + 1 - B)\arctan(c_1) = \arctan(c_1)$.
  D'où $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \int_B^{B+1} \arctan(t)dt = \lim_{B \to +\infty} \arctan(c_1) = \lim_{c_1 \to +\infty} \arctan(c_1) = \frac{\pi}{2}$.
- $\exists c_2 \in ]A, A+1[/ \displaystyle\int_A^{A+1} \arctan(t)dt = (A + 1 - A)\arctan(c_2) = \arctan(c_2)$.
  D'où $\displaystyle\lim_{A \to -\infty} \int_A^{A+1} \arctan(t)dt = \lim_{A \to -\infty} \arctan(c_2) = \lim_{c_2 \to -\infty} \arctan(c_2) = -\frac{\pi}{2}$.

Donc, d'après 3., $\displaystyle\lim_{A \to -\infty} \left(\lim_{B \to +\infty} \int_A^B f(t)dt\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \boxed{\pi}$.

✐*Remarque :* On peut en déduire que $g : t \longmapsto \dfrac{1}{\pi} f$ est une densité de probabilité.

## Exercice 4 ✶ :

$p$ et $\lambda$ désignent deux réels strictement positif et $I(p,\lambda) = \displaystyle\int_0^{\infty} \lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x} dx$.

On note par ailleurs $\Gamma(p) = I(p,1)$.

① *Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^{p-1}e^{-\lambda x} \leq x^{p-1}$ :*
Par hypothèse, $\lambda > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $-\lambda x < 0$ et donc $e^{-\lambda x} < 1$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$ $x^{p-1} > 0$ si $x > 0$.
***Conclusion*** : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^{p-1}e^{-\lambda x} \leq x^{p-1}}$

Il s'agit de désormais de montrer la convergence de l'intégrale $I(p,\lambda)$ à la borne zéro, autrement dit de montrer que $\displaystyle\int_0^a \lambda^p x^{p-1}e^{-\lambda x}dx$ converge pour tout $a$ réel, strictement positif.

On peut distinguer deux cas :

- Si $p \geq 1$ : la fonction $x \longmapsto \lambda^p x^{p-1}e^{-\lambda x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ par produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$.
Dès lors $\displaystyle\int_0^a \lambda^p x^{p-1}e^{-\lambda x}dx$ n'est pas une intégrale généralisée mais une intégrale définie.
- Si $0 < p < 1$ : la fonction $x \longmapsto \lambda^p x^{p-1}e^{-\lambda x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ car $x \longmapsto x^{p-1}$ n'est pas continue en 0.
L'intégrale $\displaystyle\int_0^a \lambda^p x^{p-1}e^{-\lambda x}dx$ est donc généralisée à la borne 0.

  Mais d'après la première partie de la question :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leq x^{p-1}e^{-\lambda x} \leq x^{p-1}$$
et $\displaystyle\int_0^a x^{p-1}dx$ converge. En effet :
$$I(\varepsilon) = \int_\varepsilon^a x^{p-1}dx = \left[\frac{x^p}{p}\right]_\varepsilon^a = \frac{a^p}{p} - \frac{\varepsilon^p}{p}$$
donc
$$\lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon) = \frac{a^p}{p} \text{ puisque } \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^p = 0 \text{ pour tout } p > 0$$
D'où $\displaystyle\int_0^a x^{p-1}dx$ converge et vaut $\dfrac{a^p}{p}$.
Dès lors, par application du théorème de convergence par comparaison d'intégrales de fonctions positives :
$$\int_0^a x^{p-1}e^{-\lambda x}dx \text{ converge.}$$
Et comme l'ensemble des intégrales convergentes sur $]0,a]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on a :
$$\lambda^p \int_0^a x^{p-1}e^{-\lambda x}dx \text{ converge et vaut } \int_0^a \lambda^p x^{p-1}e^{-\lambda x}dx$$

***Conclusion*** : $\boxed{\text{On dira que } \displaystyle\int_0^a \lambda^p x^{p-1}e^{-\lambda x}dx \text{ converge pour tout } p > 0}$

② $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{p+1}e^{-\lambda x} = 0$ car $x^{p+1} \underset{+\infty}{=} \circ(e^{\lambda x})$.
Dès lors, par définition de la limite en $+\infty$ :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists c > 0 / \forall x \geq c, |x^{p+1}e^{-\lambda x}| \leq \varepsilon$$
En particulier, pour $\varepsilon = 1$ :

$$\exists c > 0 / \forall x \geq c, 0 \leq x^{p+1}e^{-\lambda x} \leq 1 \text{ puisque } x^{p+1}e^{-\lambda x} > 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

En divisant de chaque coté par $x^2$ qui est positif, on obtient que $\forall x \geq c$, $0 \leq x^{p-1}e^{-\lambda x} \leq \dfrac{1}{x^2}$.

On montre alors que $J = \displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge. En effet :

$$J(x) = \int_c^x \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_c^x = \frac{1}{c} - \frac{1}{x} \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} J(x) = \frac{1}{c}.$$

Soit $J$ converge et vaut $\dfrac{1}{c}$.

D'où, d'après le théorème de convergence par comparaison de fonctions positives : $\displaystyle\int_c^{+\infty} x^{p-1}e^{-\lambda x}dx$ converge.

Comme par ailleurs la fonction $x \longmapsto x^{p-1}e^{-\lambda x}$ est continue sur $[a, c]$, on conclue que $\displaystyle\int_a^{+\infty} x^{p-1}e^{-\lambda x}dx$ converge.

On vient de montrer que $\boxed{I(p,\lambda) \text{ converge à la borne } +\infty}$.

Par application de la relation de Chasles, on a d'après les questions 1. et 2 :

$$\int_0^{+\infty} \lambda^p x^{p-1}e^{-\lambda x}dx = \int_0^{a} \lambda^p x^{p-1}e^{-\lambda x}dx + \int_a^{+\infty} \lambda^p x^{p-1}e^{-\lambda x}dx \text{ converge}$$

***Conclusion*** : $\boxed{I(p,\lambda) \text{ converge pour tout } p > 0 \text{ et tout } \lambda > 0}$.

③ On nous demander d'effectuer le changement de variable $x = \dfrac{u}{\lambda}$.
*Formalisons la question* : Soit $\varphi : x \longmapsto \lambda x = u$ la fonction de changement de variable.
Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et strictement croissante car $\lambda > 0$.
Puisque $I(p,\lambda) = \displaystyle\int_0^{\infty} \lambda^p x^{p-1}e^{-\lambda x}dx$ converge d'après la question 2., nous sommes assurés que :

$$J(p,\lambda) = \int_\alpha^\beta \lambda^p \frac{u^{p-1}}{\lambda^{p-1}}e^{-u}\frac{du}{\lambda} \text{ où } \alpha = \varphi(0) = 0 \text{ et } \beta = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty \text{ converge}$$

et

$$\boxed{I(p,\lambda) = J(p,\lambda) = \int_0^\infty u^{p-1}e^{-u}du = \Gamma(p)}$$

④ *Calculons* $\Gamma(1)$ : Par définition $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}dx$
D'après la question 2. $\Gamma(1) = I(1,1)$ converge. On peut donc écrire que :

$$\Gamma(1) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty} (1 - e^{-x}) = 1.$$

***Conclusion*** : $\boxed{\Gamma(1) \text{ converge et vaut } 1}$.

*Montrons, à l'aide d'une intégration par parties, que* $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ *:*
Par définition, $\Gamma(p+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}dt = I(p+1,1)$, ce qui assure sa convergence d'après la question 2.
On effectue l'intégration par parties : $\begin{cases} u(t) = t^p; & u'(t) = pt^{p-1} \\ v'(t) = e^{-t}; & v(t) = -e^{-t} \end{cases}$ , $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
On a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^pe^{-x} = 0$ donc

$$\Gamma(p+1) \text{ est de même nature que } \int_0^\infty u'(t)v(t) = \int_0^\infty -pt^{p-1}e^{-t}dt$$

qui est bien convergente puisque, par linéarité de l'intégrale, elle vaut $-p\Gamma(p)$.

Dès lors :

$$\Gamma(p+1) = \underset{x\to+\infty}{lim} u(x)v(x) - u(0)v(0) + p\Gamma(p) = 0 + p\Gamma(p)$$

***Conclusion*** : $\boxed{\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)}$

On montre alors aisément par récurrence que pour tout $n$ entier naturel non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$ : $\mathcal{P}_n$

- $\mathcal{P}_1$ est vraie car $\Gamma(1)$ converge et vaut $1 = 0!$ d'après la question 4.
- Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour $n$ fixé, $n \geq 1$.
- Alors $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ d'après la relation qui précède.
  Soit $\Gamma(n+1) = n(n-1)! = n!$ d'après l'hypothèse de récurrence.
- ***Conclusion*** : $\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!,\ \forall n \in \mathbb{N}^*}$

⑤ Soit $g$ définie par $g(u) = 0$ si $u \leq 0$ et $g(u) = \dfrac{1}{\Gamma(p)}\lambda^p u^{p-1}e^{-\lambda u}$ sinon.

*Montrons que $g$ est une densité de probabilité :*

- $g$ est positive sur $\mathbb{R}$ puisque nulle sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$ elle est formée d'un produit de fonction positives.
- $g$ est continue sur $\mathbb{R}$ si $p \geq 1$ et continue sur $\mathbb{R}^*$ si $0 < p < 1$ (on rappelle que $\underset{x\to 0}{lim} x^{p-1} = +\infty$ si $0 < p < 1$).
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(u)du = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty} \lambda^p u^{p-1}e^{-\lambda u}du$ d'après la relation de Chasles. Soit :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u)du = \frac{1}{\Gamma(p)}I(p,\lambda) = \frac{1}{\Gamma(p)}\Gamma(p) = 1$$

***Conclusion*** : $\boxed{g \text{ est une densité de probabilités}}$.

⑥ *Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} ug(u)du$ converge et calculons sa valeur :*
D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{\infty} ug(u)du = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty} \lambda^p u^p e^{-\lambda u}du = \frac{1}{\lambda\Gamma(p)}I(p+1,\lambda) = \frac{1}{\lambda\Gamma(p)}\Gamma(p+1) = \frac{p\Gamma(p)}{\lambda\Gamma(p)} = \frac{p}{\lambda}.$$

***Conclusion*** : $\boxed{\text{Si } Y \text{ de densité } g,\ \mathbb{E}(Y) \text{ existe et vaut } \frac{p}{\lambda}}$.

*Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u^2g(u)du$ converge et calculons sa valeur :*
D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2g(u)du = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^{\infty} \lambda^p u^{p+1} e^{-\lambda u}du = \frac{1}{\lambda^2\Gamma(p)}I(p+2,\lambda) = \frac{1}{\lambda^2\Gamma(p)}\Gamma(p+2) = \frac{(p+1)p\Gamma(p)}{\lambda^2\Gamma(p)} = \frac{(p+1)p}{\lambda^2}.$$

***Conclusion*** : $\boxed{\text{Si } Y \text{ de densité } g,\ \mathbb{E}(Y^2) \text{ existe et vaut } \frac{p(p+1)}{\lambda^2}}$.

ou encore $\boxed{\mathbb{V}(Y) \text{ existe et d'après Koënig Huygens : } \mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}^2(Y) = \frac{p(p+1)}{\lambda^2} - \frac{p^2}{\lambda^2} = \frac{p}{\lambda^2}}$