- Programme de colle semaine 13 -

COURS : Chapitre « Intégrales généralisées »

- **Q1 - BCPST1 :** Intégration par parties (énoncé et preuve).
  Modifier l'énoncé dans le cas des intégrales généralisées.
- **Q2 - BCPST1 :** changement variables (énoncé et preuve).
  Modifier l'énoncé dans le cas des intégrales généralisées. Application à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}dt$
- **Q3 :** Soit $b > 0$. Nature et valeur éventuelle de $\displaystyle\int_0^b \frac{dt}{t^\alpha}$ selon $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
- **Q4 :** Soit $a > 0$. Nature et valeur éventuelle de $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ selon $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$
- **Q5 :** Énoncé du théorème de convergence par comparaison pour deux fonctions positives. Justification dans le cas « droit ».
- **Q6 :** Si f est une fonction paire, continue sur $]-a, a[$ telle que $J = \displaystyle\int_0^a f(t)dt$ converge, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt$ converge et vaut $2J$ et si f est impaire, continue sur $]-a, a[$ telle que J converge, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 0$
  Application : Soit $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\pi(t^2+1)}$. Nature et valeur de $I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ et de $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$

EXERCICES : INTEGRATION (BCPST1) et INTEGRALES GENERALISEES (BCPST2)

En **Intégration** le programme officiel de BCPST1 est le suivant :

- Propriétés de l'intégrale : Linéarité, relation de Chasles, positivité, encadrement de l'intégrale à partir d'un encadrement de la fonction. Pour $a < b$, majoration $|\displaystyle\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.
- Si f est continue sur un intervalle I et $a \in I$, alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a. Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.
- *Compléments :* Sommes de Riemann sur $[0, 1]$: $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$.
- Intégrations par parties. Changements de variables (✐ « **Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, la nécessité d'un intégration par parties ou d'un changement de variable sera indiquée** »).

Sur les **intégrales généralisées** le programme officiel de BCPST2 est le suivant :

- Convergence d'une intégrale généralisée d'une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert (✐ « La convergence est traduite en termes de limites portant sur une primitive »). Cas particulier d'une fonction prolongeable par continuité.
- Propriétés des intégrales convergentes : linéarité, relation de Chasles, positivité, croissance.
- Adaptation de l'intégration par parties aux intégrales impropres. Adaptation de la formule de changement de variable pour les intégrales impropres.
- Théorème de convergence par comparaison pour deux fonctions positives f et g telles que $f \leq g$.
- Convergence absolue d'une intégrale généralisée. Condition suffisante pour obtenir la convergence de l'intégrale.

Démonstrations utiles du programme de BCPST1.

— **Q1 : Intégration par parties (énoncé et preuve)**. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$, $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$

Démonstration : On sait que uv est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I comme produit de fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ sur I avec $(uv)' = u'v + uv'$ continue sur I. Dès lors, puisque $[a,b] \subset I$:

$$\int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t))dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt \text{ (linéarité)}$$

Or on a : $\displaystyle\int_a^b (uv)'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b$. D'où la formule annoncée.

— **Q2 : Changement variables (énoncé et preuve) :** Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction continue sur I, φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur J telle que $\varphi(J) \subset I$. Alors pour tout α et β dans J :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)ds$$

Démonstration : Soit F une primitive de f sur I et $h = F \circ \varphi$. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et, pour tout $t \in J$:

$$h'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

On en déduit que :

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta h'(t)dt = h(\beta) - h(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)ds$$

Bonnes colles !