Correction DL 04 - Polynômes Interpolateurs de Lagrange.

Énoncé d'après Oral Agro 2018 :

① Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$

Soit $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$
$Q \longmapsto (Q(x_0), Q(x_1), \ldots, Q(x_n))$

(i) Montrons que Φ est linéaire :

$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda P + \mu Q) &= ((\lambda P + \mu Q)(x_0), (\lambda P + \mu Q)(x_1), \ldots, (\lambda P + \mu Q)(x_n)) \\
&= (\lambda P(x_0) + \mu Q(x_0), \lambda P(x_1) + \mu Q(x_1), \ldots, \lambda P(x_n) + \mu Q(x_n)) \\
&= \lambda (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)) + \mu (Q(x_0), Q(x_1), \ldots, Q(x_n)) \\
&= \lambda \Phi(P) + \mu \Phi(Q)
\end{aligned}$$

On peut conclure que $\underline{\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}^{n+1})}$

(ii) On note que $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1 = \dim(\mathbb{R}^{n+1})$
Donc
Φ bijective $\Leftrightarrow$ Φ surjective $\Leftrightarrow$ Φ injective.

Il suffit donc de montrer que Φ est injective pour montrer que Φ est un isomorphisme.

(iii) $\operatorname{Ker} \Phi = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \Phi(P) = 0_{\mathbb{R}^{n+1}}\}$.
Donc :
$P \in \operatorname{Ker} \Phi \Leftrightarrow (P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)) = (0, 0, \ldots, 0)$
$\Leftrightarrow P(x_k) = 0 \quad \forall\, 0 \leq k \leq n$

or $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et P possède $(n+1)$ racines distinctes
donc P est le polynôme nul.

Dès lors $\underline{\operatorname{Ker} \Phi = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}}$; Remarque : $\{0_{\mathbb{R}_n[X]}\} \subset \operatorname{Ker} \Phi$ est évident car $\operatorname{Ker} \Phi$ SEV de $\mathbb{R}_n[X]$

Conclusion (i)+(ii)+(iii) : $\boxed{\Phi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_n[X] \text{ sur } \mathbb{R}^{n+1}}$

② Déterminer la matrice M de Φ relativement aux bases $B_1 = (1, X, \ldots, X^n)$ et $B_2 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ c'est déterminer la matrice des coordonnées de la famille $(\Phi(1), \Phi(X), \ldots, \Phi(X^n))$ dans la base B_2

Posons $P_0 = 1$; Alors $\phi(P_0) = (P_0(x_0), P_0(x_1), \dots, P_0(x_n))$
$= (1, 1, \dots, 1)$

et plus généralement, si $P_k = X^k$ avec $1 \leq k \leq n$
alors $\phi(P_k) = (P_k(x_0), P_k(x_1), \dots, P_k(x_n))$
$= (x_0^k, x_1^k, \dots, x_n^k)$.

Conclusion
$$\boxed{M = \mathcal{M}_{B_1 B_2}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}}$$

Par ailleurs ϕ bijective $\Rightarrow$ $\boxed{M \text{ inversible.}}$ (cours sur les applications linéaires)

(Note : un argument possible est :
$rg(M) = rg(\phi) = \dim(\mathrm{Im}\,\phi) = \dim(\mathbb{R}^{n+1}) = n+1$ car ϕ surjective)
et M est une matrice d'ordre $(n+1)$...

③ a) Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on note $L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$

(i) $\deg(L_i) = \deg\left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}\right) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \underbrace{\deg\left(\frac{X - x_j}{x_i - x_j}\right)}_{=1} = (n+1) - 1 = \boxed{n}$

(ii) Pour $k = i$:

$L_i(x_k) = L_i(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} 1 = \boxed{1}$

(iii) Pour $k \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\}$ (avec i fixé)

Par définition de L_i, ce polynôme admet pour racines chacun des x_j pour $j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\}$

Dès lors il est immédiat que $L_i(x_k) = 0 \ \forall k \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\}$.

Conclusion
$$\boxed{L_i \in \mathbb{R}_n[X] \text{ et } L_i(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 1 & \text{si } k = i \end{cases} \quad (\text{Pour tout } i, k \in [\![0, n]\!] \dots)}$$

b) (i) On note que $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.
(ii) $\mathrm{Card}(L_0, L_1, \dots, L_n) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$
Donc :
Il suffit de montrer que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est libre pour montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(iii) Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ / $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.
Alors:

$$\forall k \in [\![0,n]\!] : \sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i(x_k) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}(x_k) = 0$$

Soit: $\lambda_0 \underbrace{L_0(x_k)}_{=0} + \lambda_1 \underbrace{L_1(x_k)}_{=0} + \dots + \lambda_k \underbrace{L_k(x_k)}_{=1} + \dots + \lambda_n \underbrace{L_n(x_n)}_{=0} = 0$

ou encore $\lambda_k = 0$: ce qu'il fallait démontrer...

<u>Conclusion</u> $\boxed{(L_0, L_1, \dots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$

c) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.

(i) Existence de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ / $P(x_i) = h(x_i)$ $\forall i \in [\![0,n]\!]$.

il suffit de poser $P(x) = \sum_{i=0}^{n} h(x_i) L_i(x)$

En effet, dans ce cas $P \in \mathbb{R}_n[X]$ car $(L_0, \dots, L_n)$ base de $\mathbb{R}_n[X]$
et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$P(x_k) = \sum_{i=0}^{n} h(x_i) \underbrace{L_i(x_k)}_{=0 \text{ si } i \neq k} = h(x_k) \underbrace{L_k(x_k)}_{=1} = h(x_k)$$

(ii) <u>Unicité</u>. Supposons que : $\exists Q \in \mathbb{R}_n[X]$ / $Q(x_i) = h(x_i)$ $\forall i \in [\![0,n]\!]$.
Alors

$$P(x_i) = Q(x_i) \quad \forall i \in [\![0,n]\!]$$

Donc

$$(P - Q)(x_i) = 0 \quad \forall i \in [\![0,n]\!].$$

or $P - Q \in \mathbb{R}_n[X]$ car $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-EV et $P - Q$ possède $(n+1)$ racines distinctes.
Donc $P - Q = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ ou encore $P = Q$ □.

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\exists ! P \in \mathbb{R}_n[X] \,/\, P(x_i) = h(x_i) \ \forall i \in [\![0,n]\!]}$

Par ailleurs, on a obtenu que $\boxed{P(x) = \sum_{i=0}^{n} h(x_i) L_i(x)}$

d) <u>Application</u> avec $h(x) = e^x$, $n = 2$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1{,}5$ et $x_2 = 2$

D'après ce qui précède, on a :

$$P(x) = h(x_0) L_0(x) + h(x_1) L_1(x) + h(x_2) L_2(x)$$

$$= e \cdot \frac{(X - 1{,}5)(X - 2)}{(1 - 1{,}5)(1 - 2)} + e^{1{,}5} \frac{(X-1)(X-2)}{(1{,}5-1)(1{,}5-2)} + e^2 \frac{(X-1)(X-1{,}5)}{(2-1)(2-1{,}5)}.$$

Voici des exemples de résolution Python permettant le calcul de $P(x)$:

```python
h = lambda x:np.exp(x)

def P1(x):
    X =  [1,1.5,2]
    return h(X[0])*(x-X[1])*(x-X[2])/((X[0]-X[1])*(X[0]-X[2]))+h(X[1])*(x-X[0])*(x-X[2])/((X[1]-X[0])*(X[1]-X[2]))+h(X[2])*(x-X[0])*(x-X[1])/((X[2]-X[0])*(X[2]-X[1]))

def P2(x):
    X =  [1,1.5,2]
    l0=np.poly1d([X[1],X[2]],'true')/0.5
    l1=np.poly1d([X[0],X[2]],'true')/(-0.25)
    l2=np.poly1d([X[0],X[1]],'true')/0.5
    return h(X[0])*l0(x)+h(X[1])*l1(x)+h(X[2])*l2(x)
```

ou encore, si on souhaite une résolution plus générale :

```python
def P3(x):
    X = [1, 1.5, 2]
    P = 0                       # initialisation de P(x)
    for i in range(len(X)):
        p = 1                   # calcul de L_i(x)
        for j in range(len(X)):
            if i != j:
                p = p*(x-X[j])/(X[i]-X[j])
        P += p*np.exp(X[i])     # calcul de P(x) = sum_{i=0}^{2} e^{x_i} L_i(x)
    return P
```

④ a) ${}^tV = \big(P(X=x_0)\ \ P(X=x_1)\ \ \cdots\ \ P(X=x_n)\big)$

Donc, par un calcul immédiat :

$${}^tV.\Omega = \Big(\sum_{i=1} P(X=x_i)\ \ \sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)\ \ \cdots\ \ \sum_{i=1} x_i^n P(X=x_i)\Big)$$

Soit $\boxed{{}^tV.\Omega = \big(1\ \ E(X)\ \ E(X^2)\ \ \cdots\ \ E(X^n)\big)}$

b) Sachant d'après ② que Ω est inversible, on a :

$$\boxed{{}^tV = ({}^tV.\Omega).\Omega^{-1} = \big(1\ \ E(X)\ \ E(X^2)\ \ \cdots\ \ E(X^n)\big).\Omega^{-1}}$$

c) <u>Application</u> $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, $E(X) = \frac{9}{4}$ et $E(X^2) = V(X) + E^2(X) = \frac{23}{4}$ (d'après König-Huygens)

Avec Python, on exécute :

```python
Ω = np.matrix([[1,1,1],[1,2,4],[1,3,9]])
Y = np.matrix([1, 9/4, 23/4])
Loi = Y * np.linalg.inv(Ω)   # retourne
```

$\boxed{P = [0.25,\ 0.25,\ 0.5]}$