MATHEMATIQUES
Intégration et algèbre

Le sujet se compose d'un exercice et de deux problèmes qu'on prendra soin de lire en entier avant de commencer.
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
*L'usage de la calculatrice n'****est pas*** *autorisé.*
Si au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-là sur la copie et poursuivez la composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Exercice :

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$u_1 = (0, 3, -2),\ u_2 = (1, 1, -1) \text{ et } u_3 = (3, -3, 1)$$

Soient de plus :

$$E = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\} \text{ et } D = \{u \in \mathbb{R}^3 / \exists a \in \mathbb{R}, u = (a, a, a)\}$$

① Montrer que E et D sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

② La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est-elle libre ?

③ Déterminer une base et une équation cartésienne de E.

④ Déterminer l'intersection de E et de D.

Problème 1 :

Dans tout ce problème, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est indifféremment noté $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u.

Partie 1 :

Dans cette partie, a désigne un réel et on pose $F_a = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \exists b \in \mathbb{R}, u_{n+1} = au_n + b, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

① Soit $u \in F_a$. Il existe donc un réel b tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = au_n + b$.
Démontrer l'unicité de b. On notera $b = b_u$ pour $u \in F_a$.

② a) Déterminer F_1.
b) Déterminer F_0.

✐ Dans le reste de cette partie, a est supposé différent de 0 et de 1.

③ Démontrer que F_a est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

④ Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 1 \text{ et } y_n = a^n$$

Démontrer que $\{x, y\}$ est une famille libre de F_a. On précisera les valeurs de b_x et b_y.

⑤ Soit $u \in F_a$.

a) Démontrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que : $\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 & = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 & = u_1 \end{cases}$.

Exprimer λ et μ en fonction de u_0, a et b_u.

b) Montrer par récurrence que, pour λ et μ définis à la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \lambda x_n + \mu y_n$$

c) Que peut-on en conclure ?

⑥ Calculer la dimension de F_a et justifier le fait que :

$$\forall u \in F_a,\, u_n = \frac{b_u}{1-a} + (u_0 + \frac{b_u}{a-1})a^n,\, \forall n \in \mathbb{N}$$

.

Partie 2 :

On note F l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles qu'il existe un couple (a, b) de réels vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\, x_{n+1} = ax_n + b$. Autrement dit :

$$F = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, x_{n+1} = ax_n + b, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

On considère cette fois deux suites réelles u et v définies par leurs premiers termes respectifs u_0 et v_0, et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2}v_n + 5 \text{ et } v_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n + 7$$

Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix},\, B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ et } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix},\, \forall n \in \mathbb{N}$$

① Écrire une fonction Python de paramètres d'entrée l'entier n et les premiers termes respectifs a et b des suites u et v et qui retourne le couple (u_n, v_n).

② a) Calculer $A^2 - A$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et soit $M_\lambda = A - \lambda I_2$ où I_2 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe deux valeurs de λ réelles pour lesquelles le système homogène $M_\lambda \cdot X = 0$, noté (S_λ) n'admet pas une unique solution.

On notera désormais λ_1 et λ_2 ces deux réels avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

c) Résoudre chacun des systèmes (S_{λ_1}) et (S_{λ_2}) et montrer que leur ensemble de solution noté respectivement E_{λ_1} et E_{λ_2} peut s'exprimer sous la forme $\mathrm{Vect}\{u_1\}$ et $\mathrm{Vect}\{u_2\}$, où u_1 et u_2 ont leur première coordonnée égale à 1.

d) On notera désormais P, la matrice des coordonnées dans la base canonique de la famille (u_1, u_2), prise dans cet ordre.

i. Justifier le fait que P est inversible et calculer P^{-1}.

ii. Montrer que $P^{-1}AP = D$ où D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qu'on précisera.

③ a) Vérifier que $X_{n+1} = AX_n + B$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Soit $Y_n = \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}$ défini par $Y_n = P^{-1}X_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $Y_{n+1} = DY_n + B_1$ où B_1 est une matrice de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qu'on explicitera.

c) En déduire que les suites c et d sont respectivement des suites de F_{-1} et F_2, espaces vectoriels définis dans la partie 1.

④ On pourra utiliser ici les résultats de la Partie 1 :

a) Exprimer c_n et d_n en fonction de n, c_0 et d_0.

b) Exprimer c_0 et d_0 en fonction de u_0 et v_0.

c) En déduire une expression de u_n et de v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

Problème 2 :

λ désignera dans tout le problème un réel strictement positif.

On rappelle que si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, positive, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1, alors f est une densité de probabilité.

I/ Fonction « gamma » d'Euler :

① Soit f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.
Montrer que f_λ est une densité de probabilité.

② Pour tout réel $\alpha > 0$, on considère l'intégrale généralisée $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$.

a) En utilisant $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2}$, montrer qu'il existe un réel A strictement positif tel que, pour tout $t > A$,

$$0 \leq t^{\alpha-1}e^{-t/2} \leq 1$$

En déduire que $\displaystyle\int_A^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ converge.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^A t^{\alpha-1}dt$ converge pour tout $\alpha > 0$.

En déduire que $\displaystyle\int_0^A t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ et $\Gamma(\alpha)$ convergent pour tout $\alpha > 0$.

③ a) Calculer $\Gamma(1)$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n, non nul, $\Gamma(n) = (n-1)!$

④ On considère la fonction $\varphi_{n,\lambda}$ définie par : $\varphi_{n,\lambda}(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

a) Reconnaître $\varphi_{1,\lambda}$.

b) Montrer que, pour $n \geq 2$, $\varphi_{n,\lambda}$ est bien une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser le changement de variable : $t = \lambda x$.

c) Soit U une variable aléatoire ayant $\varphi_{n,\lambda}$ pour densité. On dira que U admet une espérance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_{n,\lambda}(x)dx$ converge absolument et que, sous cette condition : $\mathbb{E}(U) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_{n,\lambda}(x)dx$. Montrer que U admet une espérance et la calculer.

II/ Fonction « bêta » d'Euler :

Pour tout x et y, réels strictement positifs, on considère l'intégrale $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.

① Préciser la continuité de $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ sur l'intervalle d'intégration $[0,1]$ selon les valeurs de x et de y et justifier notamment que $B(x,y)$ est une intégrale définie pour tout $x \geq 1$ et $y \geq 1$ et une intégrale généralisée sinon.

② Démontrer grâce à un changement de variable que $B(y,x)$ et $B(x,y)$ sont de même nature et que $B(y,x) = B(x,y)$ en cas de convergence (*on ne demande pas leur valeur*).

③ Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels non nuls :

a) Calculer $B(1,q)$.

b) Pour $p \geq 2$, calculer $B(p,q)$ en fonction de p, q et $B(p-1,q+1)$.

c) En déduire que $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ $\qquad (*)$

④ On admet désormais que la formule $(*)$ est applicable pour $B(x,y)$ avec x, y réels strictement positifs.

a) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $B(x,1-x)$ est une intégrale généralisée convergente qui vaut $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$.

b) En posant $t = \dfrac{1}{1+u}$, montrer par ailleurs que $B(x,1-x) = B(1-x,x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u}du$.

c) Calculer $\Gamma(0.5)$ en pensant au changement de variable : $v = \sqrt{u}$.

⑤ On souhaite retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss, à savoir $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

a) Pour tout $\alpha > 1$, montrer en appliquant le théorème de comparaison sur les intégrales de fonctions positives que $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^\alpha}dx$ converge.

En déduire que $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^\alpha}dx$ converge.

b) A l'aide du changement de variable $t = x^\alpha$, montrer que $I_\alpha = \dfrac{1}{\alpha}\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

c) En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale de Gauss.