MATHEMATIQUES
Intégration et algèbre

Exercice :

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $u_1 = (0, 3, -2)$, $u_2 = (1, 1, -1)$ et $u_3 = (3, -3, 1)$
Soient de plus :

$$E = \text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\} \text{ et } D = \{u \in \mathbb{R}^3 / \exists a \in \mathbb{R}, u = (a, a, a)\}$$

① *Montrons que E et D sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:*

a) E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car engendré par une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

b) Pour D on peut utiliser le même argument en écrivant que :

$$D = \text{Vect}\{(1, 1, 1)\}$$

Sinon, on passe par la caractérisation :
— $D \subset \mathbb{R}^3$
— $(0, 0, 0) \in D$ (il suffit de prendre $a = 0$).
— Soit $u, v \in D$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\exists a \in \mathbb{R}/u = (a, a, a) \text{ et } \exists b \in \mathbb{R}/v = (b, b, b)$$

et $\lambda u + v = (\lambda a + b, \lambda a + b, \lambda a + b) \in D$. ***Conclusion*** : $\boxed{D \text{ sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$

② *La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est-elle libre ?* On passe par exemple par la définition :

$$\text{Soit } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 / \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \ (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + 3\lambda_3 & = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 & = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 & = -3\lambda_3 \\ 3\lambda_1 - 6\lambda_3 & = 0 \\ -2\lambda_1 + 4\lambda_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2\lambda_3 \\ \lambda_2 = -3\lambda_3 \end{cases}, \forall \lambda_3 \in \mathbb{R}$$

On en déduit que : $(*) \Leftrightarrow 2\lambda_3 u_1 - 3\lambda_3 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$, $\forall \lambda_3 \in \mathbb{R}$.
Ou encore :

$$2u_1 - 3u_2 + u_3 = 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{La famille } \{u_1, u_2, u_3\} \text{ est liée}}$

③ *Déterminons une base et une équation cartésienne de E :* Puisque u_1 et u_2 sont non colinéaires, on peut en déduire que $\{u_1, u_2\}$ est libre, ou encore :

$$\text{rg}\{u_1, u_2, u_3\} = 2 = \dim(\text{Vect}\{u_1, u_2, u_3\}) = dim(E)$$

E est donc un plan vectoriel dont $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base. Il est demandé d'en donner l'équation cartésienne : Une méthode possible consiste à dire que :

$$v = (x, y, z) \in E \Leftrightarrow \text{rg}(u_1, u_2, v) = 2$$

Or,

$$\begin{aligned} \text{rg}(u_1, u_2, v) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 3 & 1 & y \\ -2 & -1 & z \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & y \\ 0 & 1 & x \\ -2 & -1 & z \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \\ L_3 \end{matrix} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & -1 & 3z + 2y \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + 2L_1 \end{matrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 3 & 1 & y \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & x + 2y + 3z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dès lors, $v = (x, y, z) \in E \Leftrightarrow x + 2y + 3z = 0$.

Conclusion : $\boxed{E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y + 3z = 0\}}$

④ *Déterminons l'intersection de E et de D :*

$$(x, y, z) \in E \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z & = 0 \\ x = y & = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6z & = 0 \\ x = y & = z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Conclusion : $\boxed{E \cap D = \{0\}}$

✐*Remarque :* On pouvait aussi noter que $(1, 1, 1) \notin E$ et donc l'intersection du plan vectoriel E et de la droite D est réduite au seul vecteur nul...

Problème 1 : *(D'après Agro A - 2000)*

Partie 1 :

Dans cette partie, a désigne un réel et on pose $F_a = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \exists b \in \mathbb{R}, u_{n+1} = au_n + b, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

① Soit $u \in F_a$.
Supposons qu'il existe deux réels b_1 et b_2 tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = au_n + b_1 = au_n + b_2$.
Alors par soustraction : $b_1 - b_2 = 0$ ou encore $b_1 = b_2$.

Conclusion : $\boxed{\text{Si } u \in F_a,\ \exists! b_u \in \mathbb{R} / u_{n+1} = au_n + b_u, \forall n \in \mathbb{N}}$.

② a) *Déterminons $F_1 = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \exists b \in \mathbb{R}, u_{n+1} = u_n + b, \forall n \in \mathbb{N}\}$:*
Conclusion : $\boxed{F_1 \text{ est l'ensemble des suites arithmétiques}}$.

b) *Déterminons $F_0 = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \exists b \in \mathbb{R}, u_{n+1} = b, \forall n \in \mathbb{N}\}$.*
Conclusion : $\boxed{F_0 \text{ est l'ensemble des suites constantes à partir de } n = 1}$.

Dans le reste de cette partie, a est supposé différent de 0 et de 1.

③ *Démontrons que F_a est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :*

- ➤ $F_a \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- ➤ La suite nulle appartient à F_a. Il suffit de prendre $b = 0$.
- ➤ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u, v \in F_a$, montrons que $w = \lambda u + v \in F_a$:
  $u \in F_a \Leftrightarrow \exists b_u \in \mathbb{R} / u_{n+1} = au_n + b_u$, $\forall n \in \mathbb{N}$
  $v \in F_a \Leftrightarrow \exists b_v \in \mathbb{R} / v_{n+1} = av_n + b_v$, $\forall n \in \mathbb{N}$
  Alors :
  $$w_{n+1} = \lambda u_{n+1} + v_{n+1} = \lambda(au_n + b_u) + (av_n + b_v) = a(\lambda u_n + v_n) + (\lambda b_u + b_v) = aw_n + b_w$$
  avec $b_w = \lambda b_u + b_v \in \mathbb{R}$ car $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{R}$-ev.
  Donc $\exists b_w / w_{n+1} = aw_n + b_w$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Soit : La suite $\lambda u + v = (\lambda u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F_a$

Conclusion : $\boxed{F_a \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.

④ Soient $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 1 \text{ et } y_n = a^n$$

Démontrons que $\{x, y\}$ est une famille libre de F_a :

- On a bien $x \in F_a$ car : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 = a \times 1 + (1 - a)$. Soit $b_x = 1 - a$.
- On a bien $y \in F_a$ car : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a^n = a \times a^{n-1} + 0$. Soit $b_y = 0$.
- Montrons maintenant que c'est une famille libre : Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \lambda x + \mu y = 0$.
  Donc
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda x_n + \mu y_n = \lambda + \mu a^n = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu & = 0 \quad (n = 0) \\ \lambda + \mu a & = 0 \quad (n = 1) \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 0 = \mu \text{ (car } a \neq 0 \text{ et } a \neq 1$$

Conclusion : $\boxed{\{x, y\} \text{ est une famille libre de } F_a}$.

⑤ Soit $u \in F_a$.

a) *Démontrons qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que :* $\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 & = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 & = u_1 \end{cases}$:

— *Première rédaction :*

$$\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 & = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 & = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu & = u_0 \\ \lambda + \mu a & = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\mu + u_0 \\ -\mu + u_0 + \mu a & = u_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda & = -\dfrac{u_1 - u_0}{a - 1} + u_0 \\ \mu & = \dfrac{u_1 - u_0}{a - 1} \end{cases} \quad \text{car } a \neq 1 \text{par hypothèse}$$

Or $u \in F_a$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a u_n + b_u$.
On a donc : $u_1 - u_0 = (a u_0 + b_u) - u_0 = (a - 1) u_0 + b_u$
Soit :

$$\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 & = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 & = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda & = -\dfrac{b_u}{a - 1} \\ \mu & = u_0 + \dfrac{b_u}{a - 1} \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Il existe une unique solution : } (\lambda, \mu) = \left(\dfrac{b_u}{1 - a}, u_0 + \dfrac{b_u}{a - 1} \right)}$

— *Seconde rédaction :* On utilise l'écriture matricielle du système. A savoir :

$$\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 & = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 & = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu & = u_0 \\ \lambda + \mu a & = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Or $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = a - 1 \neq 0$ par hypothèse.
Donc la matrice associée au système est inversible. Ce qui assure **l'unicité de la solution**.

Par ailleurs, en multipliant à gauche et à droite par la matrice inverse, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \frac{1}{a - 1} \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a - 1} \begin{pmatrix} a u_0 - u_1 \\ -u_0 + u_1 \end{pmatrix}$$

et comme $u \in F_a$, on a :

$$a u_0 - u_1 = a u_0 - (a u_0 + b_u) = b_u \text{ et } -u_0 - u_1 = -u_0 + (a u_0 + b_u) = (a - 1) u_0 + b_u$$

on retrouve donc $\boxed{(\lambda, \mu) = \left(\dfrac{b_u}{1 - a}, u_0 + \dfrac{b_u}{a - 1} \right)}$

b) *Montrons que, pour λ et μ définis à la question précédente, on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \text{« } u_n = \lambda x_n + \mu y_n \text{ »}\ \mathcal{P}_n$$

Raisonnons par récurrence :

- $\mathcal{P}_0$ est vraie d'après la question précédente.
- Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour n fixé ($n \geq 0$). On a donc $u_n = \lambda x_n + \mu y_n$.
- Alors $u_{n+1} = au_n + b_u = a(\lambda x_n + \mu y_n) + b_u$ avec $b_u = \lambda(1-a)$ d'après 5.a)
  Donc
  $$u_{n+1} = a(\lambda x_n + \mu y_n) + \lambda(1-a) = \lambda(ax_n + 1 - a) + \mu a y_n = \lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1}$$
  $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie

Conclusion : $\boxed{\forall n \in N,\ u_n = \lambda x_n + \mu y_n}$.

c) *Que peut-on en conclure ?* Nous venons de montrer que :

$$F_a \subset \text{Vect}\{x, y\}$$

et comme $x \in F_a$, $y \in F_a$ d'après 4. on a aussi $\text{Vect}\{x, y\} \subset F_a$.
Donc $F_a = \text{Vect}\{x, y\}$
Conclusion : $\boxed{\text{La famille } (x, y) \text{ est une base de } F_a}$.

⑥ D'après ce qui précède $\dim(F_a) = \text{Card}\{x, y\} = 2$.
Par définition de la base on a donc :

$$\forall u \in F_a,\ u_n = \frac{b_u}{1-a} + (u_0 + \frac{b_u}{a-1})a^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

.

✐*Remarque :* Cet première partie est une façon algébrique d'aborder les suites **arithmético-géométriques**. D'après le cours d'analyse, en effet, $(u_n)_{n\geq 0} \in F_a$ signifie que u est une suite arithmético-géométrique et on l'abordera de la façon suivante :

Soit $L \in \mathbb{R}$ tel que $aL + b_u = L \Leftrightarrow L = \dfrac{b_u}{1-a}$. Alors :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = au_n + b_u \\ L & = aL + b_u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+1} - L & = a(u_n - L) & L_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - L_2 \\ L & = aL + b_u & L_2 \end{cases}$$

Soit, parce que la suite $(u_n - L)$ est une suite géométrique de raison a et de premier terme $u_0 - L$:

$$u_n - L = a^n(u_0 - L) \text{ ou encore } \boxed{u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b_u}{1-a}\right) + \frac{b_u}{1-a},\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

Partie 2 :

① Soit `CalculUV(n, a, b` la fonction Python demandée.
`a` et `b` qui sont les premiers termes respectifs des suites u et v vont permettre d'initialiser le calcul qui va s'effectuer de façon récurrente en répétant n fois $u_{k+1} = \dfrac{1}{2}u_k - \dfrac{3}{2}v_k + 5$ et $v_{k+1} = -\dfrac{3}{2}u_k + \dfrac{1}{2}v_k + 7$.
Pour effectuer ces n calculs, on va utiliser une boucle « Pour » avec k variant de 1 (pour le calcul de u_1 et v_1) à n (pour le calcul de u_n et v_n qui seront retournés par la fonction). On utilisera pour ça un `range(1, n+1)`.

Une rédaction possible est la suivante :

```
def CalculUV(n, a, b):
    for k in range(1, n+1):
        a, b = a/2-3*b/2+5, -3*a/2+b/2+7
    return a, b
```

② a) *Calculons $A^2 - A$.*

$$A^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

D'où

$$A^2 - A = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$$

En en déduit que $A[\frac{1}{2}(A-I)] = [\frac{1}{2}(A-I)]A = \frac{1}{2}(A^2 - A) = I$

Conclusion : $\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{2}(A-I) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}}$

b) *Montrons qu'il existe deux valeurs λ réelles pour lesquelles la matrice $M_\lambda = A - \lambda Id$ est non inversible* : C'est une matrice d'ordre 2. Il suffit de calculer son déterminant.

$$\begin{aligned}\det(M_\lambda) &= \det \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-2\lambda & -3 \\ -3 & 1-2\lambda \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left((1-2\lambda)^2 - 9\right) \\ &= \frac{1}{2}(1-2\lambda-3)(1-2\lambda+3) = \frac{1}{2}(-2\lambda-2)(4-2\lambda) = -2(\lambda+1)(2-\lambda)\end{aligned}$$

$M_\lambda = A - \lambda I$ est non inversible si et seulement si $\det(M_\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ou $\lambda = -1$.

Conclusion : $\boxed{(S_\lambda) \text{ n'admet pas une solution unique pour } \lambda_1 = -1 \text{ ou } \lambda_2 = 2}$

c) D'après ce qui précède, les systèmes

$$(S_{-1}) : AX = -X \Leftrightarrow (A + \mathrm{Id})X = 0 \text{ et } (S_2) : AX = 2X \Leftrightarrow (A - 2\mathrm{Id})X = 0$$

admettent tous les deux au moins une solution non nulle.
On résout ces systèmes tour à tour :

<u>Pour $\lambda_1 = -1$</u> :

$$(A - \lambda_1 \mathrm{Id})X = 0 \Leftrightarrow (A+I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 0 \\ -3x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y,\ \forall y \in \mathbb{R}$$

Conclusion : $\boxed{E_{-1} = \{(x,x), x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{u_1\} \text{ où } u_1 = (1,1)}$

<u>Pour $\lambda_2 = 2$</u> :

$$(A - \lambda_2 \mathrm{Id})X = 0 \Leftrightarrow (A-2I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 3y = 0 \\ -3x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y,\ \forall y \in \mathbb{R}$$

Conclusion : $\boxed{E_2 = \{(x,-x), x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{u_2\} \text{ où } u_2 = (1,-1)}$

d) Conformément à l'énoncé, on note désormais P, la matrice de la famille (u_1, u_2), prise dans cet ordre.
Nous avons donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

i. *Justifions le fait que P est inversible et calculer P^{-1} :*

$\det(P) = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2 \neq 0$ donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$.

Par ailleurs, il est immédiat que $P^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion : $\boxed{P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}P}$

ii. *Montrons que $P^{-1}AP = D$ où D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qu'on précisera* : Il suffit pour cela de faire le calcul...

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D$$

③ a) *Vérifions que $X_{n+1} = AX_n + B$, $\forall n \in \mathbb{N}$:*

$$AX_n + B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_n - \frac{3}{2}v_n + 5 \\ -\frac{3}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

Conclusion : $\boxed{X_{n+1} = AX_n + B,\ \forall n \in \mathbb{N}}$

b) Soit $Y_n = \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}$ défini par $Y_n = P^{-1}X_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Montrons que $Y_{n+1} = DY_n + B_1$ où $B_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$* :
De 1.d)iii. on tire la relation : $A = PDP^{-1}$. D'où :

$$X_{n+1} = AX_n + B \Leftrightarrow X_{n+1} = PDP^{-1}X_n + B$$

En multipliant à gauche par P^{-1} et en rappelant que $P^{-1}P = I_2$, on obtient :

$$P^{-1}X_{n+1} = DP^{-1}X_n + P^{-1}B$$

Conclusion : $\boxed{Y_{n+1} = DY_n + B_1 \text{ où } B_1 = P^{-1}B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}}$

c) La relation précédente s'exprime sous la forme :

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_n \\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ou encore

$$\begin{cases} c_{n+1} & = -c_n + 6 \\ d_{n+1} & = 2d_n - 1 \end{cases}.$$

Conclusion : $\boxed{c \text{ et } d \text{ sont respectivement des suites de } F_{-1} \text{ et de } F_2}$

④ a) *Exprimons c_n et d_n en fonction de n, c_0 et d_0 :*

Rappelons que d'après la partie 1 : $u \in F_a \Leftrightarrow u_n = \dfrac{b_u}{1-a} + (u_0 + \dfrac{b_u}{a-1})a^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Il suffit donc d'appliquer ce résultat aux suites c et d...

$(c_n) \in E_{-1}$ avec $b_c = 6$ donc :

$$c_n = \frac{6}{2} + \left(c_0 + \frac{6}{-2}\right)(-1)^n = 3 + (c_0 - 3)(-1)^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$(d_n) \in E_2$ avec $b_d = -1$ donc :

$$d_n = 1 + (d_0 - 1)\, 2^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Conclusion : $\boxed{\begin{cases} c_n = (-1)^n c_0 + 3\,(1 - (-1)^n) \\ d_n = 2^n d_0 + 1 - 2^n \end{cases} ,\ \forall n \in \mathbb{N}}$

b) *Exprimons c_0 et d_0 en fonction de u_0 et d_0 :*

Rappelons que : $Y_0 = P^{-1}X_0$ donc $\begin{pmatrix} c_0 \\ d_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}P\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$. Donc :

$$\begin{cases} c_0 & = \frac{1}{2}(u_0 + v_0) \\ d_0 & = \frac{1}{2}(u_0 - v_0) \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\begin{cases} c_n = (-1)^n \dfrac{u_0 + v_0}{2} + 3\,(1 - (-1)^n) \\ d_n = 2^n \dfrac{u_0 - v_0}{2} + 1 - 2^n \end{cases} ,\ \forall n \in \mathbb{N}}$

c) Nous pouvons désormais en déduire une expression de u_n et de v_n en fonction de n, u_0 et v_0. En effet :

$$\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\boxed{u_n = c_n + d_n \text{ et } v_n = c_n - d_n}$; *Il suffit alors de remplacer par leur valeur...*

Problème 2 :

I/ Fonction « gamma » d'Euler :

① Soit f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Montrons que f_λ est une densité de probabilité :

a) f est continue sur $]-\infty, 0]$ car constante égale à 0 et sur $]0, +\infty[$ car $x \longmapsto \lambda e^{-\lambda x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0} f_\lambda(x) = \lambda \neq f_\lambda(0) = 0$ donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^*}$.

b) $\lambda > 0$ donc il est immédiat que $\boxed{f_\lambda \text{ est positive sur } \mathbb{R}}$.

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(x)dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx$ par application de la relation de Chasles.

Soit $F(t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx = \Big[-e^{-\lambda x}\Big]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$.

Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = 1$ car $\lambda > 0$. Soit $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(x)dx$ converge et vaut 1.

Conclusion : $\boxed{f_\lambda \text{ est une densité de probabilité}}$.

② a) Si $0 < \alpha < 1$ alors $\underset{t\to+\infty}{lim}\ t^{\alpha-1} = 0 = \underset{t\to+\infty}{lim}\ e^{-t/2}$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2} = 0$ et si $\alpha \geq 1$, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2} = 0$.
Quel que soit le cas de figure, il existe donc un réel $A > 0$ tel que :

$$\forall t \geq A, \quad t^{\alpha-1}e^{-t/2} \leq 1$$

D'autre part , $\forall t > 0, \quad t^{\alpha-1}e^{-t/2} > 0$

$$\boxed{\text{il existe } A > 0 \text{ tel que } \forall t \geq A, \quad 0 \leq t^{\alpha-1}e^{-t/2} \leq 1\ (*)}$$

La fonction : $f : t \longmapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$
$\forall t \geq A, \quad 0 \leq t^{\alpha-1}e^{-t} \leq e^{-t/2}$ s'obtient en multipliant $(*)$ par $e^{-t/2}$.
et $\int_A^{+\infty} e^{-t/2}dt$ est convergente (car $\int_0^{+\infty} e^{-at}dt$ est convergente pour tout $a > 0$)
Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives,

$$\boxed{\int_A^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t/2}dt \text{ converge}}$$

Lu dans le rapport de jury : « *La limite est en général trouvée. Par contre l'encadrement est rarement justifié et le théorème sur les intégrales de fonctions positives rarement cité.*
On constate des confusions avec les suites : « à partir d'un certain rang ... »
Plusieurs candidats affirment que $\displaystyle\int_A^{+\infty} dx$ *converge.*
D'autres pensent que la fonction étant bornée, l'intégrale converge. Ou encore que la fonction ayant une limite nulle, l'intégrale converge... On peut lire aussi :

$$0 \leq f \leq g \text{ sur } [A, +\infty[\text{ donc } \int_A^{\infty} f(x)dx \leq \int_A^{\infty} g(x)dx$$

or $\displaystyle\int_A^{\infty} g(x)dx$ *converge donc* $\displaystyle\int_A^{\infty} f(x)dx$ *converge.* »

b) $\forall t \in]0, A], \quad 0 \leq t^{\alpha-1}e^{-t} \leq t^{\alpha-1}$

$\int_0^A t^{\alpha-1}dt$ est convergente car, si on pose $G(x) = \displaystyle\int_x^A t^{\alpha-1}dt = \left[\frac{t^\alpha}{\alpha}\right]_x^A$, soit $G(x) = \dfrac{A^\alpha - x^\alpha}{\alpha}$,
alors $\underset{x\to0}{lim} G(x) = \underset{x\to0}{lim} \dfrac{A^\alpha - x^\alpha}{\alpha} = \dfrac{A^\alpha}{\alpha}$ puisque $\alpha > 0$. Soit $\int_0^A t^{\alpha-1}dt$ converge.
Par le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_0^A t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ converge.

Lu dans le rapport de jury : « *Le problème de la borne* 0 *est très rarement perçu.* »

Et par application de la relation de Chasles, on peut conclure à l'aide des questions 2.a) et 2.b) que :

$$\boxed{\text{l'intégrale } \Gamma(\alpha) \text{ converge pour } \alpha > 0}$$

③ a) $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ (on reconnaît f_1 étudiée à la question 1)).
b) $\Gamma(\alpha + 1) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}dt$.
On pose : $\begin{cases} u(t) = t^\alpha & u'(t) = \alpha t^{\alpha-1} \\ v'(t) = e^{-t} & v(t) = -e^{-t} \end{cases}$ u et v sont de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ si $0 < \alpha < 1$ et sur $[0, +\infty[$ si $\alpha \geq 1$.
✐ On évitera de distinguer les cas en écrivant que pour tout $\alpha > 0$, u, v de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)v(t) = 0$ par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to 0} u(t)v(t) = 0$ car $\alpha > 0$
On peut donc faire l'intégration par parties directement dans l'intégrale généralisée :
$\Gamma(\alpha+1) = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt = \alpha\Gamma(\alpha)$

$$\boxed{\forall \alpha > 0, \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)}$$

✐ *Remarque :* Si on souhaite repasser par une intégrale définie de première année, il faut faire l'intégration par parties sur :

$$\int_x^y t^\alpha e^{-t}dt \text{ puis faire la limite quand } x \text{ tend vers 0 et } y \text{ tend vers } +\infty...$$

Lu dans le rapport de jury : *« Des intégrations par parties sont effectuées directement (sans précaution) sur des intégrales impropres ».*

c) Une récurrence s'impose :
— Pour $n = 1$, on a $\Gamma(n) = \Gamma(1) = 1 = 0!$ d'après 3.a)
— On suppose que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour n fixé ($n \geq 1$)
— Alors, d'après la question précédente : $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$.
— ***Conclusion*** : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n) = (n-1)!}$

Lu dans le rapport de jury : *« Certaines notions élémentaires ne sont pas comprises. Ici, aucune « suite géométrique de raison n... »*
Rappelons que le résultat étant donné par l'énoncé, une justification « récurrence immédiate » ne peut suffire. »

④ a) pour $n = 1$, on obtient immédiatement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi_{n,\lambda}(x) = \dfrac{\lambda}{0!}x^0 e^{-\lambda x} = f_\lambda(x)$ et pour tout x négatif, $\varphi_{n,\lambda}(x) = 0 = f_\lambda(x)$
Conclusion : $\boxed{\varphi_{n,\lambda} = f_\lambda}$

b) $\varphi_{n,\lambda}$ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.
$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\lambda}(x)dx = \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\lambda}(x)dx$
A l'aide du changement de variable $t = \lambda x$, $\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\lambda}(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\Gamma(n) = 1$

$$\boxed{\varphi_{n,\lambda} \text{ est une densité de probabilité}}$$

c) On étudie la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x\varphi_{n,\lambda}(x)|dx = \int_0^{\infty} x\varphi_{n,\lambda}(x)dx$,
d'après la relation de Chasles et parce que $\varphi_{n,\lambda}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\int_0^{+\infty} x\varphi_{n,\lambda}(x)dx = \frac{n}{\lambda}\int_0^{+\infty} \varphi_{n+1,\lambda}(x)dx$ qui est une intégrale convergente.
Donc $\mathbb{E}(U)$ existe et vaut : $\frac{n}{\lambda}\int_0^{+\infty} \varphi_{n+1,\lambda}(x)dx = \dfrac{n}{\lambda}$

$$\boxed{U \text{ admet bien une espérance et } E(U) = \frac{n}{\lambda}}$$

II/ Fonction « bêta » d'Euler :

Pour tout x et y, réels strictement positifs, on considère l'intégrale $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.

① *Précisons l'ensemble de continuité de $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ sur $[0,1]$ selon les valeurs de x et de y :*

— Si $x \geq 1$ et $y \geq 1$, alors $x-1 \geq 0$ et $y-1 \geq 0$. La fonction $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est donc continue sur $[0,1]$.
— Si $0 < x < 1$ et $y \geq 1$, $t \longmapsto t^{x-1}$ est continue sur $]0,1]$ et $t \longmapsto (1-t)^{y-1}$ est continue sur $[0,1]$ donc $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1]$.
— Si $x \geq 1$ et $0 < y < 1$, $t \longmapsto t^{x-1}$ est continue sur $[0,1]$ et $t \longmapsto (1-t)^{y-1}$ est continue sur $[0,1[$ donc $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $[0,1[$.
— Si $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$, $t \longmapsto t^{x-1}$ est continue sur $]0,1]$ et $t \longmapsto (1-t)^{y-1}$ est continue sur $[0,1[$ donc $t \longmapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1[$.

✐ On retiendra que $B(x,y)$ est une intégrale définie pour tout $x, y \geq 1$ et une intégrale généralisée sinon.

② *Démontrons grâce à un changement de variable que $B(y,x)$ et $B(x,y)$ sont de même nature et que $B(y,x) = B(x,y)$ en cas de convergence (on ne demande pas leur valeur).*

Il suffit de poser $u = 1-t = \varphi(t)$. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et strictement décroissante.
Dès lors, $B(y,x) = \displaystyle\int_0^1 t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt$ est de même nature que :

$$\int_1^0 (1-u)^{y-1}u^{x-1}(-du) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}du = B(x,y)$$

Conclusion : $\boxed{B(y,x) \text{ et } B(x,y) \text{ sont de même nature et } B(y,x) = B(x,y) \text{ en cas de convergence}}$

③ Pour tout couple (p,q) d'entiers naturels non nuls :

a) *Calculons $B(1,q)$:* $B(1,q) = \int_0^1 (1-t)^{q-1}dt = \left[-\dfrac{(1-t)^q}{q}\right]_0^1 = \dfrac{1^q}{q}$

$$\boxed{B(1,q) = \frac{1}{q}}$$

b) Pour $p \geq 2$, *calculons $B(p,q)$ en fonction de p, q et $B(p-1,q+1)$:*

Menons une intégration par parties en notant que, puisque $p-1 \geq 1$ et $q \geq 1$, les intégrales $B(p,q)$ et $B(p-1,q+1)$ sont des intégrales définies.

On pose :

$$\begin{cases} u(t) = t^{p-1} & u'(t) = (p-1)t^{p-2} \\ v'(t) = (1-t)^{q-1} & v(t) = -\dfrac{(1-t)^q}{q} \end{cases} \qquad u \text{ et } v \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } [0,1]$$

$$B(p,q) = \left[-t^{p-1}\frac{(1-t)^q}{q}\right]_0^1 + \frac{p-1}{q}B(p-1,q+1)$$

$$\boxed{B(p,q) = \frac{p-1}{q}B(p-1,q+1)}$$

c) *En déduire que $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ autrement dit : $B(p,q) = \dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$*

Menons une récurrence sur p en posant : $\forall p \geq 1, H_p =$« $\forall q \geq 1, B(p,q) = \dfrac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$ »

Initialisation : H_1 est vrai d'après a)
Hérédité : Soit $p \geq 1$ tel que H_p est vrai
$B(p+1,q) = \dfrac{p}{q}B(p,q+1) = \dfrac{p}{q}\dfrac{(p-1)!(q)!}{(p+q)!} = \dfrac{(p+1-1)!(q-1)!}{(p+1+q-1)!}$ d'où H_{p+1} est vrai
Par principe de récurrence :

$$\boxed{\forall p \geq 1, \forall q \geq 1, B(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}}$$

④ On admet désormais que la formule $(*)$ est applicable pour $B(x,y)$ avec x,y réels strictement positifs.

a) *Montrons que pour tout $x \in]0,1[$, $B(x,1-x)$ est une intégrale généralisée convergente qui vaut $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$:*
Si $x \in]0,1[$, alors on a également $1-x \in]0,1[$. Donc, d'après la question II/1) nous savons que l'intégrale $B(x,1-x)$ est doublement généralisée.
Mais, si la relation $(*)$ reste vraie pour tous les réels x,y strictement positifs, elle est donc vraie pour $x > 0$ et $1-x > 0$.
Dès lors :

$$B(x,1-x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(x+1-x)} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)} = \Gamma(x)\Gamma(1-x)$$

puisque $\Gamma(1) = 1$ d'après I/3)a.
Or on a vu dans la première partie du problème que $\Gamma(\alpha)$ converge pour tout $\alpha > 0$ donc $\Gamma(x)$ et $\Gamma(1-x)$ convergent.
Conclusion : $\boxed{B(x,1-x) \text{ converge et vaut } \Gamma(x)\Gamma(1-x)}$

b) A l'aide de II/2) et en posant $t = \dfrac{1}{1+u}$, *montrons que* $B(x,1-x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u}du$ *:*

On commence par noter que $B(x,1-x) = B(1-x,x)$ en utilisant la question II/2).
Puis en suivant l'indication : $t = \dfrac{1}{1+u} \Leftrightarrow 1+u = \dfrac{1}{t} \Leftrightarrow u = \dfrac{1}{t} - 1 = \psi(t)$.
La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et strictement décroissante.
Ce changement de variable ne change donc pas la nature de l'intégrale.
Pour préparer le changement de variable, on note par ailleurs que

$$1-t = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u} \text{ et } dt = -\frac{1}{(1+u)^2}du$$

Dès lors $B(1-x,x) = \displaystyle\int_0^1 t^{-x}(1-t)^{x-1}dt$ qui converge d'après 4.a) est égale à :

$$J = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{1+u}\right)^{-x} \left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1} \left(-\frac{du}{(1+u)^2}\right) \text{ avec } \alpha = \lim_{t\to 0}\psi(t) = +\infty \text{ et } \beta = \lim_{x\to 1}\psi(t) = 0$$

Soit

$$\boxed{B(1-x,x) = J = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u}du}$$

c) *Calculons $\Gamma(0.5)$ en pensant au changement de variable : $v = \sqrt{u}$:*
En prenant $x = 0.5$, puisque $1-x = 0.5$, on obtient :

$$\Gamma^2(0.5) = B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+u)\sqrt{u}}du$$

C'est alors qu'on utilise le changement de variable recommandé. La fonction $u \longmapsto \sqrt{u} = v$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, strictement croissante. Donc, puisqu'on est assuré de la convergence de $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et que ce changement de variable ne change pas sa nature, on a immédiatement :

$$\Gamma^2(0.5) = \int_0^\infty \frac{2v dv}{(1+v^2)v} = 2\int_0^\infty \frac{dv}{1+v^2} = \pi$$

Conclusion : $\boxed{\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}}$

⑤ On souhaite retrouver la valeur de l'intégrale de Gauss, à savoir $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

a) *Pour tout $\alpha > 1$, montrons en appliquant le théorème de comparaison sur les intégrales de fonctions positives que $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^\alpha} dx$ converge :*
Puisque $\alpha > 1$, si $x \geq 1$ alors $x^\alpha \geq x$ et donc $-x^\alpha \leq -x$.
Dès lors

$$\forall x \geq 1,\ e^{-x^\alpha} \leq e^{-x}$$

Or $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x} dx$ converge puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \int_1^t e^{-x} dx = \lim_{t\to+\infty} (e^{-1} - e^{-t})$ existe et vaut $1/e$.
Dès lors, par application du théorème de convergence par comparaison des intégrales de fonctions positives : $\boxed{\displaystyle\int_1^\infty e^{-x^\alpha} dx \text{ converge}}$.

On peut en déduire que $\boxed{I_\alpha = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^\alpha} dx \text{ converge}}$ par application de la relation de Chasles car la fonction $x \longmapsto e^{-x^\alpha}$ est continue sur $[0, 1]$.

b) *A l'aide du changement de variable $t = x^\alpha$, montrons que : $I_\alpha = \dfrac{1}{\alpha}\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$:*
Posons $\varphi(x) = x^\alpha = t$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, strictement croissante.
Par ailleurs : $t = x^\alpha \Leftrightarrow x = t^{\frac{1}{\alpha}}$ et donc

$$dx = \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1} dt \text{ et } \lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$$

Donc $I_\alpha = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^\alpha} dx$ est de même nature que :

$$J_\alpha = \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha}-1} dt = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-t} dt$$

D'après la question précédente, ces deux intégrales sont convergentes. On peut donc conclure à leur égalité et conclure : $\boxed{I_\alpha = J_\alpha = \dfrac{1}{\alpha}\Gamma\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)}$

c) *Montrons qu'on peut en déduire la convergence et la valeur de l'intégrale de Gauss :*
Il suffit de prendre $\alpha = 2$ dans l'intégrale précédente.
Alors $I_2 = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
Or on a montré que 4.c) que $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}$ donc $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Pour terminer, il suffit de noter que la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ est paire.

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \text{ converge et vaut } 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}}$