Devoir maison : Espaces vectoriels

Exercices - version 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n$ n nombres réels distincts. On définit des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par :

$$L_k(X) = \prod_{1 \leq i \leq n, i \neq k} \frac{X - a_i}{a_k - a_i},\ k \in [\![1, n]\!]$$

① Calculer $L_k(a_j)$ pour tout $(k, j) \in [\![1, n]\!]^2$

② Montrer que $\mathcal{L} = (L_1, L_2, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

③ Exprimer la décomposition d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans la base $\mathcal{L}$

④ Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$. Quel est le polynôme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^p L_i$?
Donner la matrice des coordonnées de la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans la base $\mathcal{L}$

Exercices - version 2 (oral Agro 2018) :

① Soit $n \geq 1$ un entier naturel et $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$, $n+1$ réels distints. Soit :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ Q &\longmapsto (Q(x_0), Q(x_1), \cdots, Q(x_n)) \end{aligned}$$

Montrer que ϕ est un isomorphisme.

② Déterminer la matrice M de ϕ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et de $\mathbb{R}^{n+1}$.
Justifier que M est inversible

③ a) On note, pour $i \in [\![0, n]\!]$, $L_i = \displaystyle\prod_{j=0 j \neq i}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$ Montrer que, $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ et donner $L_i(x_k)$ pour i, k dans $[\![0, n]\!]$ (distinguer les cas $i = k$ et $i \neq k$).

b) En déduire que $(L_0, L_1, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.
Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!],\ P(x_i) = h(x_i)$$

et l'exprimer en fonction des L_i.

d) On prend $h = exp$, $n = 2$, $x_0 = 1$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$.
Ecrire une fonction Python renvoyant $P(x)$ (x paramètre d'entrée)
Représenter graphiquement P et h.
Vérifier que $\forall i \in [\![0, 2]\!]$, $P(x_i) = h(x_i)$.

④ Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs $x_0, x_1, \cdots, x_n$.
On note V la matrice colonne dont la i-ième coordonnée vaut $\mathbb{P}(X = x_i)$, (avec $0 \leq i \leq n$)

a) Exprimer ${}^tV \times M$ en fonction des moments d'ordre r de X ($r \in [\![0, n]\!]$).

b) Justifier que si on connaît $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(X^2), \cdots, \mathbb{E}(X^n)$, alors on peut déterminer la loi de X.

c) Ici, on a $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et $\mathbb{E}(X) = 9/4$, $\mathbb{V}(X) = 11/16$. Déterminer informatiquement la loi de X (on pourra inverser numériquement la matrice M à l'aide de la fonction `inv` de la bibliothèque `numpy.linalg`.