CE QU'IL FAUT SAVOIR FAIRE À L'ISSUE DE LA SÉQUENCE...

- ◻ *Connaître les primitives des fonctions usuelles*
- ◻ *Calculer une intégrale, en utilisant éventuellement une intégration par parties, ou un changement de variables.*
- ◻ *Connaître et utiliser les propriétés des intégrales*
- ◻ *Reconnaître une somme de Riemann, la reformuler en intégrale et la calculer.*
- ◻ *Comprendre les algorithmes de calcul approché d'intégrales.*

22 Intégrales

Primitive d'une fonction sur un intervalle

DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Définition 1 ***(Primitive)***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Une fonction F est **une** primitive de f sur l'intervalle I lorsque F est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$,

$$F'(x) = f(x).$$

Propriété 1 ***(Condition suffisante d'existence d'une primitive)***

Si f est une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors f admet au moins une primitive sur cet intervalle I.

Propriété 2 ***(Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle)***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,
F une primitive de f sur l'intervalle I et G une fonction définie sur I.

Alors G est une primitive de f sur I si et seulement si $G - F$ est constante sur I.

Preuve :

- Si G est une primitive de f sur I, alors G est dérivable sur I et $G - F$ est dérivable sur I par somme de fonctions dérivables. Sa dérivée est $f - f = 0$.
  Ainsi, par propriété de monotonie des fonctions dérivables sur un intervalle, $G - F$ est une fonction constante sur I.
- Réciproquement, on suppose que $\forall x \in I, (G - F)(x) = a \in \mathbb{R}$.
  Alors $\forall x \in I, G(x) = F(x) + a$. G est donc dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables, et $G' = F' + 0 = f$. Donc G est une primitive de f sur I. □

Opérations sur les primitives

Propriété 3 ***(Linéarité)***

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F et G des primitives de f et g sur cet intervalle I.
Alors $\alpha F + G$ est une primitive de $\alpha f + g$ sur I.

Primitives usuelles à connaître

$f(x) =$	$F(x) =$
e^x	$e^x + Cte$
k (constante)	$kx + Cte$
x^n, $(n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + Cte$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x \rvert + Cte$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + Cte$
$\ln x$	$x\ln(x) - x$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + Cte$
$\cos(x)$	$\sin(x) + Cte$
$\dfrac{1}{\cos(x)^2}$	$\tan(x) + Cte$
$1 + \tan(x)^2$	$\tan(x) + Cte$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + Cte$
a^x $(a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\})$	$\dfrac{a^x}{\ln(a)} + Cte$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I compatible, on obtient par composition les formules suivantes, à connaître sur le bout des doigts.

Fonction	Primitive
$u'e^u$	$e^u + Cte$
$u'a^u$, $(a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\})$	$\dfrac{a^u}{\ln(a)} + Cte$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u \rvert + Cte$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + Cte$

Fonction	Primitive
$u'u^n$ $(n \neq -1)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + Cte$
$u' \cos u$	$\sin u + Cte$
$u' \sin u$	$-\cos u + Cte$
$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\arctan u + Cte$

Intégrale d'une fonction

INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN SEGMENT

Définition 2 ***(Intégrale d'une fonction continue sur un segment)***

Soit
- f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,
- a et b deux réels de I
- F une primitive de f sur I.

On appelle intégrale de f entre a et b le réel $F(b) - F(a)$. On le note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La variable d'intégration est muette :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \dots$$

point rédaction
Avant de calculer une intégrale, on justifiera toujours qu'elle est définie.
« f est continue sur $[a, b]$ donc $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie. »

Propriété 4 ***(Validité de la définition)***

L'intégrale de f entre a et b est indépendante de la primitive F de f choisie sur l'intervalle I.

Preuve : Soit F et G deux primitives de f sur I. Alors elles diffèrent d'une constante :

$$\exists c \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in I,\ F(x) = G(x) + c.$$

On a alors $F(b) - F(a) = G(b) + c - (G(a) + c) = G(b) - G(a)$, d'où le résultat. □

Quelques conséquences immédiates de la définition :

$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple n° 1 Après avoir justifié leur existence, calculer les réels suivants :

- pour $x > 0$, $J(x) = \displaystyle\int_1^x \left(1 - \frac{1}{t}\right)(\ln t - 2)\,\mathrm{d}t$.

  La fonction $t \mapsto (1 - \frac{1}{t})(\ln t - 2)$ est continue entre 1 et x, donc l'intégrale existe, et

$$J(x) = \int_1^x \left(\ln(t) - \frac{\ln(t)}{t} - 2 + \frac{2}{t}\right) = \left[t\ln(t) - t - \frac{1}{2}(\ln(t))^2 - 2t + 2\ln|t|\right]_1^x,$$

$$J(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}(\ln(x))^2 - 3x + 2\ln(x) - 3.$$

Mais où est u' ?

- $K = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$.

  La fonction $t \mapsto \sqrt{1-t}$ est continue sur $[0,1]$, donc l'intégrale existe, et

$$K = \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

- $L = \displaystyle\int_0^{-\frac{\pi}{2}} (\cos u)^2\,\mathrm{d}u$.

  La fonction $u \mapsto (\cos u)^2$ est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, donc l'intégrale existe, et

$$L = \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\sin(-\pi)}{4} - 0 = -\frac{\pi}{4}.$$

- $M = \displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}$.

  La fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $[\sqrt{3}, 2\sqrt{2}]$, donc l'intégrale existe, et

$$M = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{2t\,\mathrm{d}t}{2\sqrt{t^2+1}} = \left[\sqrt{t^2+1}\right]_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1.$$

Propriété 5 ***(Relation de Chasles)***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a, b et c trois réels de I. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve : Soit F une primitive de f sur I. On a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La formule est vraie sans contrainte d'ordre entre a, b et c.

Propriété 6 ***(Généralisation de la relation de Chasles)***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a_0, a_1, ...a_n une suite finie de réels de I. Alors

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_{a_0}^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Preuve : Ce résultat se montre directement par récurrence à partir de la proposition précédente. $\square$

<u>*Exemple*</u> *n° 2* Après avoir justifié son existence, calculer le réel suivant :

$$N = \int_{-1}^{1} \inf(t,0)\,\mathrm{d}t$$

La fonction $t \mapsto \inf(t,0)$ est continue sur $[-1,1]$, donc l'intégrale existe, et

$$\begin{aligned} N &= \int_{-1}^{0} \inf(t,0)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} \inf(t,0)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{0} t\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} 0\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Propriétés des intégrales

Propriété 7 ***(Linéarité de l'intégrale)***

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions continues ou continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a et b deux réels de I. Alors :

$$\alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\alpha f(t) + g(t)\right)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve : C'est immédiat dans le cas d'une intégrale de fonction continue par linéarité de la dérivée/primitive. Dans le cas continu par morceaux, il faut en plus utiliser la linéarité de la somme. $\square$

Propriété 8 ***(Relation de Chasles)***

Soit f une fonction continue x sur un intervalle I de $\mathbb{R}$
a, b et c trois réels de I.

Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La formule est vraie <u>sans contrainte d'ordre</u> entre a, b et c.

Preuve : On suppose pour cette preuve que $a \leqslant b \leqslant c$. Soit $(a = a_0, a_1, ..., a_{n-1}, c = a_n)$ une subdivision associée à f. On note $k_0 \in [\![0, n-1]\!]$ l'entier qui vérifie $a_{k_0} \leqslant b \leqslant a_{k_0+1}$.

On a alors, avec à la relation de Chasles pour les fonctions continues :

$$\begin{aligned}\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \sum_{k=0}^{k_0-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t\right) + \int_{a_{k_0}}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^{a_{k_0+1}} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{k=k_0+1}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

□

Propriété 9 ***(Généralisation de la relation de Chasles)***

Soit f une fonction continue x sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a_0, a_1, ...a_n une suite finie de réels de I. Alors

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_{a_0}^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Propriété 10 ***(Théorème dit « de Lapriki »))***

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $a \in I$, on définit la fonction H par : $\forall x \in I$,

$$H(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Alors :
- H est $\boxed{\text{la}}$ $\boxed{\text{pri}}$mitive de f sur I $\boxed{\text{qui}}$ s'annule en a.
- H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I.

Preuve : Soit F une primitive de f sur I, qui existe car f est continue sur cet intervalle. On a :

$$\forall x \in I, \quad H(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a).$$

Donc

- H est dérivable sur I (car F l'est), la dérivée de H est $F' = f$.
  De plus $H(a) = F(a) - F(a) = 0$. Donc H est une primitive de f sur I qui s'annule en a. Or il n'y a qu'une seule primitive de f qui s'annule en a (puisque deux primitives de f sur le même intervalle diffèrent d'une constante), d'où l'unicité.

- On a vu que H est dérivable sur I, et sa dérivée f est continue sur I.
  Donc H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. □

En particulier, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \subset \mathbb{R}$, on a pour tout $a \in I$ et tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Fonction définie par une intégrale, cas général

Soit | I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$
u et v deux fonctions définies et dérivables sur I et à valeurs dans J.
f une fonction continue sur J.

Pour étudier la fonction Φ définie par :

$$\forall x \in I, \quad \phi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On introduit F une primitive de f sur J (qui existe, car f est continue sur cet intervalle).
On a alors :

$$\forall x \in I, \phi(x) = F(v(x)) - F(u(x)).$$

Φ est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables et

$$\forall x \in I, \phi'(x) = v'(x)F'(v(x)) - u'(x)F'(u(x)) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)).$$

Alors la fonction ϕ définie sur I par

Remarques : • u et v seront souvent des fonctions simples
($x \mapsto x$, $x \mapsto 2x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, liste non exhaustive...)
• on n'a pas besoin de connaître F, juste de savoir qu'elle existe,
et que $F' = f$!

Intégrales et relation d'ordre

Propriété 11 *(Positivité de l'intégrale)*

Soit | f une fonction continue ou continue x sur un intervalle I,
a et b deux réels de I vérifiant $\boxed{a \leqslant b}$.

Si f est positive sur $[a, b]$ alors

$$0 \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve : Dans le cas où f est continue sur I, on note F une primitive sur cet intervalle.
La fonction F est continue et dérivable sur $[a, b]$ et $\forall x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x) \geqslant 0$.
Par inégalité des accroissements finis sur $[a, b]$, on obtient donc :

$$0 = 0(b - a) \leqslant F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si f est continue x, il suffit d'appliquer ce résultat sur chaque intervalle de la subdivision associée, et d'utiliser la relation de Chasles. □

Propriété 12 *(Croissance de l'intégrale)*

Soit | f et g deux fonctions continues ou continues sur un intervalle I,
a et b deux réels de I vérifiant $\boxed{a \leqslant b}$.

Si pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve : La fonction $g - f$ est continue ou continue x sur I et est positive.
Puisque $a \leqslant b$, la positivité de l'intégrale donne :

$$0 \leqslant \int_a^b (g - f)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b (g(t) - f(t))\,\mathrm{d}t.$$

On conclut alors par linéarité de l'intégrale. □

Exemple n° 3 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$.
En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x$ quand n tend vers l'infini.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f : x \mapsto \frac{x^n}{x+1}$ est continue sur $[0, 1]$, donc l'intégrale existe.

Pour de grandes valeurs de n, c'est le numérateur qui détermine principalement le comportement de $f(x)$, on va donc borner le dénominateur.

$\forall x \in [0, 1], 0 \leqslant \frac{1}{x+1} \leqslant 1$, donc par produit avec $x^n \geqslant 0$ on obtient $0 \leqslant f(x) \leqslant x^n$. Comme $0 \leqslant 1$, la croissance de l'intégrale donne alors :

$$0 = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement donne alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{x+1}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Propriété 13 ***(Cas de l'intégrale nulle)***

Soit f une fonction $\boxed{\text{continue}}$ et $\boxed{\text{positive}}$ sur un intervalle I,
a et b deux réels de I vérifiant $\boxed{a < b}$.

Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow \forall t \in [a, b], f(t) = 0.$$

Attention, la fonction doit être *continue*,
La continuité par morceaux ne suffit pas.

On en déduit par contraposée que si f est continue, positive et non nulle sur $[a, b]$ avec $a < b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Preuve :

La fonction f est continue sur $[a,b] \subset I$.
Le théorème des bornes assure que f est bornée sur ce $[a,b]$.
Il existe donc $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $t \in [a,b]$, $m \leqslant f(t) \leqslant M$.

Comme $a \leqslant b$, la croissance de l'intégrale donne alors :

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}t,$$

$$\text{puis } m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a).$$

RQ : on pouvait aussi remplacer la croissance de l'intégrale par l'application de l'inégalité des accroissements finis sur $[a,b]$ à la fonction F (primitive de f).

Propriété 14 *(Inégalité triangulaire pour les intégrales)*

Soit
- f une fonction continue sur un intervalle I,
- a et b deux réels de I vérifiant $\boxed{a \leqslant b}$.

Alors

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |\,f(t)\,|\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |\,f(t)\,|$$

Preuve :
(D.A.C)

On sait que pour tout $t \in [a,b]$, $-|\,f(t)\,| \leqslant f(t) \leqslant |\,f(t)\,|$
Par croissance de l'intégrale ($a \leqslant b$) :,

$$-\int_a^b |\,f(t)\,|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |\,f(t)\,|\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi,
$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |\,f(t)\,|\,\mathrm{d}t.$$

La partie majoration de l'inégalité de la moyenne appliquée à la fonction $t \mapsto |\,f(t)\,|$ continue sur $[a,b]$ donne ensuite directement :

$$\int_a^b |\,f(t)\,|\,\mathrm{d}t \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |\,f(t)\,|\,(b-a). \quad \square$$

PASSAGE À LA LIMITE

Il est absolument interdit de passer une limite de l'extérieur à l'intérieur d'une intégrale :

si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$, il est possible d'avoir

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \neq \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

et ceci même si on sait déjà que ces limites existent.

Si on souhaite calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$, il faut procéder par calcul direct de l'intégrale ou par encadrement (si le calcul direct est impossible).

Exemple n° 4 Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
On pose f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=n$ si $x\in]0,\frac{1}{n}]$ et $f_n(x)=0$ sinon.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

   Que peut-on en déduire concernant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$?

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue x sur $[0,1]$ donc l'intégrale existe. De plus,

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{n}} n\,\mathrm{d}t=[nt]_0^{\frac{1}{n}}=1.$$

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 1.

---

2. Soit $t\in]0,1]$. Justifier l'existence de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$ et calculer cette limite.

   En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $t\in]0,1]$. $\forall n\geqslant\frac{1}{t}$, $f_n(t)=0$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$ existe et vaut 0. On en déduit :

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 0\,\mathrm{d}t=0.$$

Propriété 15 ***(Intégration par parties)***

Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve :
(D.A.C)

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, donc $t\mapsto u'(t)v(t)$ et $t\mapsto u(t)v'(t)$ sont continues sur cet intervalle et les deux intégrales existent. On trouve alors par calcul de primitive :

$$\int_a^b \left(u'(t)v(t)+u(t)v'(t)\right)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b.$$

D'où le résultat par linéarité de l'intégrale. □

<u>Exemple</u> n° 5 Calculer la valeur de :

$$I=\int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

Les fonctions $x\mapsto x^2$ et $x\mapsto e^x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on peut donc effectuer une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= [x^2\exp(x)]_0^1 - \int_0^1 2x\exp(x)\,\mathrm{d}x \\ &= e-0-\int_0^1 2x\exp(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Les fonctions $x\mapsto 2x$ et $x\mapsto e^x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$,

on peut donc effectuer une nouvelle intégration par parties :

$$\begin{aligned} I &= e-[2x\exp(x)]_0^1+\int_0^1 2\exp(x)\,\mathrm{d}x \\ &= e-2e+0+[2\exp(x)]_0^1 \\ &= -e+2e-2 \\ &= e-2. \end{aligned}$$

<u>Exemple</u> n° 6 L'IPP permet parfois de calculer une intégrale sans jamais calculer *directement* celle-ci.
Par exemple, calculer $I=\displaystyle\int_0^\pi \sin x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Les fonctions exp et sin sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ et une intégration par parties donne :

$$I=[\sin x\mathrm{e}^x]_0^\pi - \int_0^\pi \cos x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

une seconde IPP avec les fonctions cos et exp de classe $\mathcal{C}^1$ donne :

$$I = 0-\left([\cos x\mathrm{e}^x]_0^\pi - \int_0^\pi(-\sin x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi,}\quad & I=0-(-\mathrm{e}^\pi-1+I) \\ \text{puis}\quad & 2I=\mathrm{e}^\pi+1 \\ \text{Finalement,}\quad & I=\frac{\mathrm{e}^\pi+1}{2} \end{aligned}$$

CHANGEMENT DE VARIABLE

Propriété 16 ***(Changement de variable, version 1)***

Soit
- f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- $\varphi : t \longrightarrow \varphi(t)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans I.

Alors
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Preuve : (D.A.C)

La fonction f est continue sur I, donc admet une primitive F sur cet intervalle.

Soit $h = F \circ \varphi$.
La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$ (par composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$),
et pour tout $t \in [\alpha, \beta]$,
$$h'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Cette fonction étant continue sur $[\alpha, \beta]$, on peut passer à l'intégrale et on trouve :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = h(\beta) - h(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Propriété 17 ***(Changement de variable, version 2)***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
$\varphi : t \longrightarrow \varphi(t)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans I.

Alors φ réalise une bijection de $[\alpha, \beta]$ sur un intervalle $[a, b]$ et

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } \varphi \text{ est croissante} \\ \displaystyle\int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } \varphi \text{ est décroissante} \end{cases}$$

Preuve : φ est continue, car $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $[\alpha, \beta]$, alors par le théorème de la bijection φ réalise une bijection de $[\alpha, \beta]$ sur un intervalle $[a, b]$.

• Si φ est croissante, alors $\varphi([\alpha, \beta]) = [\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$ donc $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$.
On applique le résultat précédent avec $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ et $\alpha = \varphi^{-1}(a)$, $\beta = \varphi^{-1}(b)$.

• Si φ est décroissante, alors $\varphi([\alpha, \beta]) = [\varphi(\beta), \varphi(\alpha)]$ donc $a = \varphi(\beta)$ et $b = \varphi(\alpha)$.
On applique le résultat précédent avec $a = \varphi(\beta)$ $b = \varphi(\alpha)$ et $\alpha = \varphi^{-1}(b)$, $\beta = \varphi^{-1}(\alpha)$.

Point Méthode

0 en anticipant sur les étapes suivantes, on choisit (quand les deux sont possibles, ce qui n'est pas toujours le cas) entre le changement de variable $t = \varphi(u)$ ou $u = \varphi^{-1}(t)$.

1 On justifie l'existence de l'intégrale.

2 on définit la fonction φ de changement de variable.

3 on précise qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ (et strictement croissante si elle l'est.)

4 on écrit entre parenthèses $\mathrm{d}t = \phi'(u)\,\mathrm{d}u$

5 on applique l'une ou l'autre formule, c'est à dire on change :
• les bornes
• le $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}u$...
• et la variable !

Exemple n° 7 Calculer la valeur de :

$$J = \int_0^4 \exp(x-4)\,\mathrm{d}x.$$

$x \mapsto \exp(x-4)$ est continue sur $[0, 4]$, donc J existe.
$x \mapsto x - 4$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 4]$.
Le changement de variables $t = x - 4$, ($\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$) donne :

$$J = \int_{-4}^0 \exp(t)\,\mathrm{d}t = [\exp(t)]_{-4}^0 = 1 - \exp(-4).$$

Exemple n° 8 Calculer la valeur de :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

$x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)^2}$ est continue sur $[0,\pi]$, donc I existe.

$x \mapsto \cos(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

Avec le changement de variables $t = \cos(x)$ (et $\mathrm{d}t = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$) on a :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{-1}{1+\cos(x)^2}(-\sin(x))\,\mathrm{d}x$$

$$I = \int_{\cos(0)}^{\cos(\pi)} \frac{-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$I = \arctan(1) - \arctan(-1)$$

$$I = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \mathbb{N}$$

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

Exemple n° 9 Calculer la valeur de :

$$K = \int_0^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

$x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[0,1]$, donc K existe.

$t \mapsto \cos(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ à valeurs dans $[0,1]$, et strictement monotone (décroissante) sur cet intervalle.

On peut donc poser le changement de variables $x = \cos(t)$ (avec $\mathrm{d}x = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$)

$$K = \int_{\cos\frac{\pi}{2}}^{\cos 0} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$K = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1-\cos(t)^2}(-\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(t)|\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2\,\mathrm{d}t.$$

Il ne reste plus qu'à linéariser l'expression pour déterminer une primitive :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t - \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 - 0 + 0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Sommes de Riemann

Les sommes de Riemann correspondent à la méthode de calcul approchée dite « des rectangles ». Elles permettent également de ramener le calcul de certaines sommes à un calcul d'intégrale.

DÉFINITION

Définition 3 ***(Sommes de Riemann)***

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On définit les deux suites $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ comme suit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k),$$

où $a_0 = a$, $a_n = b$ et $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.
Les suites S_n et T_n sont appelées les sommes de Riemann associées à la fonction f.

CONVERGENCE DE LA SUITE DES SOMMES DE RIEMANN

Propriété 18 ***(Convergence des sommes de Riemann)***

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

Les sommes de Riemann S_n et T_n convergent vers $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^1$, l'erreur commise en approchant I par S_n ou T_n est inférieure ou égale à

$$\frac{(b-a)^2}{2n}\sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|.$$

Preuve de la convergence dans le cas $\mathcal{C}^1$:

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.
On va montrer que la suite $(S_n)_n$ est convergente vers I, on procéderait de même pour $(T_n)_n$. Soit $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
|S_n - I| &= \left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
|S_n - I| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)f(a_k) - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
|S_n - I| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(a_k) - f(t))\,\mathrm{d}t\right| \\
|S_n - I| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(a_k) - f(t))\,\mathrm{d}t\right| \qquad \text{par inégalité triangulaire} \\
|S_n - I| &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(a_k) - f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \text{car } a_k < a_{k+1}
\end{aligned}$$

f' est continue sur $[a, b]$ donc (théorème des bornes) bornée sur ce segment et atteint ses bornes : $M = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f'(t)|$ existe, et :

$$\forall t \in [a, b], |f'(t)| \leqslant M.$$

La fonction f étant continue et dérivable sur $[a, b]$, l'inégalité des accroissements finis donne alors :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|.$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\forall t \in [a_k, a_{k+1}]$, on obtient avec $x = a_k$ et $y = t$:

$$|f(a_k) - f(t)| \leqslant M|a_k - t| = M(t - a_k).$$

Alors pour $n \geqslant 1$,

$$|S_n - I| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} M(t-a_k)\,\mathrm{d}t \right) = M \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left[\frac{(t-a_k)^2}{2} \right]_{a_k}^{a_{k+1}} \right) = M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a_{k+1}-ak)^2}{2}.$$

D'où

$$|S_n - I| \leqslant \frac{M}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (\frac{b-a}{n})^2 = M\frac{n(b-a)^2}{2n^2} = \frac{M}{2n}(b-a)^2.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} M\dfrac{(b-a)^2}{2n} = 0$, donc par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} |S_n - I| = 0$ et la suite $(S_n)_n$ est convergente vers I. On a au passage montré la borne souhaitée pour l'erreur. □

Exemple n° 10 Si f est une fonction continue sur $[0,1]$, alors on a en particulier :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple n° 11 Étudier la convergence de la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2},$$

donc comme $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[0,1]$, la suite u des sommes de Riemann converge vers l'intégrale

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

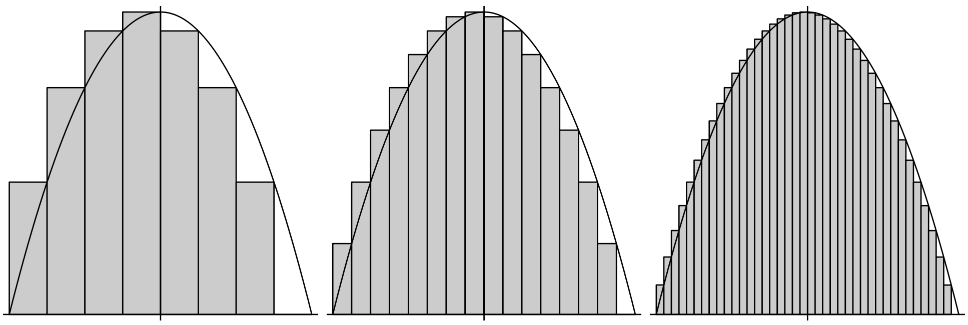
Cette intégrale a déjà été calculée dans l'exemple . Donc la suite u converge vers $\frac{\pi}{4}$.

Interprétation géométrique

On peut faire une interprétation de l'intégrale d'une fonction et des sommes de Riemann en termes d'aires : soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a,b]$. On se place dans un repère orthonormal, et on note $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f. L'intégrale de f entre a et b correspond à l'aire de la partie duplan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$:

$$\Delta(f) = \{(x,y), \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

On peut approcher l'aire de $\Delta(f)$, par l'aire dudomaine $\Delta(\phi_1)$ où ϕ_1 est la fonction en escaliers des sommes de Riemann. On calcule alors une somme d'aires de rectangles.



Plus le « pas » $\frac{b-a}{n}$ est petit, meilleure est l'approximation obtenue.

NB : Il existe bien d'autres méthodes de calcul approché d'intégrales (trapèzes, simpson, ...) plus précises.

vu dans les rapports

ECRICOME 2017 : Peu de candidats ont l'idée d'encadrer l'intégrale pour déterminer sa limite, et beaucoup veulent directement « passer à la limite sous l'intégrale » …

ECRICOME 2019 : La continuité de la fonction à intégrer est souvent omise.

ECRICOME 2019 : La croissance et la convergence de la suite $(I_n)_{n>0}$ font partie des thèmes très souvent abordés (intégrales de Wallis) dans les sujets de concours. Cependant, les résolutions rencontrées ne laissent pas entrevoir une aisance sur ces questions. La positivité de I_n , nécessaire pour prouver la convergence de la suite (I_n), est peu rappelée.

ECRICOME 2019 : De même, la relation de récurrence attendue fait appel à une méthode par une intégration par partie très fréquente et normalement rencontrée à plusieurs reprises par les candidats lors de leur préparation. Cependant, la rigueur exigible dans l'utilisation du théorème et dans les calculs qui l'accompagnent a rarement été présente dans les copies. Ainsi, les hypothèses de ce théorème ne sont ni rappelées ni vérifiées : la classe $\mathcal{C}^1$ des fonctions considérées est peu étudiée.

ECRICOME 2019 : Si le changement de variable est donné dans l'énoncé, le candidat doit en vérifier la validité en vérifiant clairement les hypothèses du théorème utilisé.

ECRICOME 2016 : Certains candidats maladroits ont bien déterminé une primitive de $x \mapsto x^a$, mais ont ensuite remplacé a par 1 puis 0, ou ont affecté ces valeurs de 0 et 1 à a et x en même temps…

ECRICOME 2016 : L'intégration par parties est en général bien faite, même si les hypothèses ne sont pas toujours vérifiées.

Exercices

exercice 1 Calculer les intégrales ci-dessous :

$A = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

La fonction intégrée est continue sur $\mathbb{R}$, comme quotient de fonctions continues, donc intégable entre 0 et x pour tout réel x.

$A = \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^x = \boxed{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$

$B = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t$

Pour $x > -1$, la fonction est continue, donc intégrable, entre 0 et x

(*on ne sait pas si* $x > 0$ *ou* $0 < x$)

$B = \displaystyle\int_0^x \frac{t+1-1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x 1 - \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = [t - \ln|1+t|]_0^x = \boxed{x - \ln(|1+x|)}$

$C = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^x \frac{1}{t(\ln t)^3}\,\mathrm{d}t$ Pour tout $x > -1$, la fonction intégrée est continue entre e et x, donc l'intégrale est bien définie.

$C = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^x \frac{1}{t}(\ln t)^{-3}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{(\ln t)^{-2}}{-2}\right]_{\mathrm{e}}^x = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{2(\ln x)^2}}$

$D = \displaystyle\int_0^x (2t+1)^3 \, \mathrm{d}t$

La fonction intégrée est continue sur $\mathbb{R}$ donc intégrable entre 0 et x pour tout réel x.

$D = \displaystyle\int_0^x (2t+1)^3 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^x 2(2t+1)^3 \, \mathrm{d}t = \left[\frac{(2t+1)^4}{4}\right]_0^x = \boxed{\frac{(2x+1)^4}{4} - \frac{1}{4}}$

$E = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} t\mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$

Pour tout $x \geqslant 0$, $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue, donc intégrable sur $[0, x]$ et

$E = \frac{-1}{2}\displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} (-2t)\mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{-1}{2}\left[\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^{\sqrt{x}} = \frac{-1}{2}\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right) = \boxed{\frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right)}$

$F = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{1+\cos t} \, \mathrm{d}t$ La fonction intégrée est continue sur $[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}]$, comme quotient de foncions continues, le dénominateur ne s'annulant pas sur l'intervalle. L'intégrale est donc bien définie.

$F = -\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin t}{1+\cos t} \, \mathrm{d}t = -\left[\ln(1+\cos t)\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\right)$

$G = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \tan t \, \mathrm{d}t$ Attention ici. L'intégrale n'est pas définie. En effet, $\sqrt{2} \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \sqrt{3}$ et la fonction tangente n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$ et diverge à son voisinage.

$H = \displaystyle\int_2^1 \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} \, \mathrm{d}t$ La fonction intégrée est continue, car son dénominateur ne s'annule pas sur $[1, 2]$, donc intégrable entre 1 et 2.

$H = \displaystyle\int_2^1 \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}} \, \mathrm{d}t = \int_2^1 \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t - 1} \, \mathrm{d}t = \left[\ln(\mathrm{e}^t - 1)\right]_2^1 = \ln\left(\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^2-1}\right) = \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}+1}\right)$

$\boxed{H = -\ln(\mathrm{e}+1)}$

$I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{(2t+1)^3} \, \mathrm{d}t$ $t \mapsto \frac{t-1}{(2t+1)^3}$ est continue sur $[0, 1]$ comme quotient de fonctions continues sur $[0; 1]$, le dénominateur ne s'annulant pas. Donc l'intégrale existe. D'autre part, $\forall x \in [0, 1]$, $\frac{t-1}{(2t+1)^3} = \frac{\frac{1}{2}(2t+1-1)-1}{(2t+1)^3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{(2t+1)^2} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{(2t+1)^3}$

Ainsi, $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{(2t+1)^2} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{(2t+1)^3}\right) \mathrm{d}x$

$I = \left[\frac{-1}{4(2t+1)} + \frac{3}{8(2t+1)^2}\right]_0^1 = \frac{-1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{4} - \frac{3}{8} = \boxed{-\frac{1}{6}}$

$J = \displaystyle\int_0^{\pi} |\cos t| \, \mathrm{d}t$ $t \mapsto |\cos t|$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues, donc intégrable sur $[0, 1]$. La relation de Chasles donne alors :

$J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, \mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos t \, \mathrm{d}t = \left[\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\sin(x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 - 0 + 0 - (-1) = \boxed{2}$

$K = \displaystyle\int_0^1 \inf(t, \frac{1}{3}) \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{3}} t \, \mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{3} \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{3}} + \left[\frac{1}{3}t\right]_{\frac{1}{3}}^1 = \frac{1}{18} - 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \boxed{\frac{5}{18}}$

$L = \displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \left[2\mathrm{e}^{\sqrt{t}}\right]_0^4 = 2\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^0 = \boxed{2\mathrm{e}^2 - 2}$

$M = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^u \cos u\,\mathrm{d}u$ Les fonctions $u \mapsto \mathrm{e}^u$ et $u \mapsto \cos u$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

La formule d'IPP donne : $M = [\cos u \mathrm{e}^u]_0^{\frac{\pi}{4}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^u(-\sin u)\,\mathrm{d}u$ et, avec une seconde IPP :

$M = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} - 1 + [\sin u \mathrm{e}^u]_0^{\frac{\pi}{4}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^u \cos u\,\mathrm{d}u = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} - 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} - M$

Ainsi, $2M = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} - 1$ et $\boxed{M = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}}$

$N = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln t\,\mathrm{d}t$ Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, \mathrm{e}]$ et la formule d'intégration par parties donne :

$N = [t \ln t]_1^{\mathrm{e}} - \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} t\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}\ln \mathrm{e} - 1\ln 1 - [t]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - [\mathrm{e} - 1] = \boxed{1}$

$P = \displaystyle\int_0^2 \lfloor x^2 \rfloor\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{2}} 1\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2\,\mathrm{d}x + \int_{\sqrt{2}}^{2} 3\,\mathrm{d}x$

$P = (\sqrt{2} - 1)1 + (\sqrt{3} - \sqrt{2})2 + (2 - \sqrt{3})3 = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3} = \boxed{1}$

Proposition de corrigé :**A retenir :**

- Bien vérifier (et écrire) que la fonction est continue.
- Si possible, anticiper le signe du résultat, et comparer à la fin. Par exemple, trouver une intégrale négative avec une fonction positive est louche...mais pas impossible si les bornes sont inversées !
- chercher u' (et $f(u)$)

---

exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les primitives de $x \mapsto x^n \ln(x)$.

Proposition de corrigé :

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n : x \mapsto x^n \ln(x)$ est continue sur $]0; +\infty[$, donc admet des primitives sur $]0; +\infty[$. Soit F_n la primitive de f_n s'annulant en 1.

Pour tout réel $x > 0$, on a : $F(x) = \displaystyle\int_0^x t^n \ln t\,\mathrm{d}t$.

On applique la formule d'intégration par parties avec les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ définies par : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left|\begin{array}{ll} u(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} & u'(t) = t^n \\ v(t) = \ln(t) & v'(t) = \frac{1}{t} \end{array}\right.$

Alors,

$F(x) = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \times \ln(t)\right]_1^x - \displaystyle\int_1^x \frac{t^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

$F(x) = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln x - \displaystyle\int_1^x t^n\,\mathrm{d}t\right)$

$F(x) = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln x - \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_1^x\right)$

$F(x) = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right)$

Finalement, les primitves de f_n sont les fonctions de la forme

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) + \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R})}$$

---

exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + x + \frac{5}{4}}$.

Proposition de corrigé :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x + \dfrac{5}{4} = (x + \dfrac{1}{2})^2 + 1 > 0$

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+\frac{5}{4}}$ est donc continue sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit :

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2+t+\frac{5}{4}}$$
$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+(t+\frac{1}{2})^2}$$
$$F(x) = \left[\arctan(t+\frac{1}{2})\right]_0^x$$
$$F(x) = \arctan(x+\frac{1}{2}) - \arctan\frac{1}{2}$$

F est la primitive de f s'annulant en 0. Alors l'ensemble des primitives de f est :

$$\boxed{\left\{x \mapsto \arctan(x+\tfrac{1}{2})+\lambda \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

---

exercice 4 Inégalité de Cauchy-Schwartz

Soit a et b deux réels avec $a \leqslant b$. Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$.

En étudiant le trinôme $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x)+g(x))^2 \,\mathrm{d}x$ de variable $\lambda \in \mathbb{R}$,

montrer que $\displaystyle\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t\right)$

Indication : On pourra remarquer que $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}x$ *est un polynôme en* λ *et en faire l'étude...*

Proposition de corrigé :

$(\lambda f+g)^2$, f^2, g^2 et fg sont continues sur $[a,b]$, comme composées de fonctions continues. Elles sont donc intégrables sur $[a,b]$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a, par positivité de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_a^b (\lambda f+g)^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\lambda^2 f^2(x) + 2\lambda f(x)g(x) + g^2(x)\right)\mathrm{d}x$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient donc, pour tout réel λ :

$$0 \leqslant \lambda^2 \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$$

On obtient un trinôme en λ toujours positif donc son discriminant Δ est négatif ou nul.

Ainsi : $0 \geqslant \Delta = 4\left(\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - 4\left(\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\displaystyle\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)$

Le résultat voulu en découle. □

exercice 5 Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0$

Proposition de corrigé :

1.

> Une IPP est tentante ici mais, pour être utile, il faudrait pouvoir dériver f pour intégrer t^n en $\frac{t^{n+1}}{n+1}$, ce que les hypothèses ne permettent pas...

Pout tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^n f(t)$ est continue donc intégrable et la suite est bien définie.
De plus, $|\,f\,|$ est continue sur $[0,1]$, donc bornée par $M > 0$ et on a :

$$-M \leqslant f(t) \leqslant M$$

donc

$$-Mt^n \leqslant t^n f(t) \leqslant Mt^n$$

et, par croissance de l'intégrale ($0 < 1$), on obtient :

$$-M\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t$$

Or, $\displaystyle\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi, par encadrement, on trouve $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0}$

2. Les fonctions f et $t \mapsto \sin(nt)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ donc on peut appliquer la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t$$

D'une part,

$$\left|\left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_a^b\right| = \left|f(b)\frac{\sin(nb)}{n} - f(a)\frac{\sin(na)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n}\left(|\,f(b)\,| + |\,f(a)\,|\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'autre part, par inégalité triangulaire ($a \leqslant b$),

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f'(t)\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_a^b \left|f'(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |\,f'(t)\,|\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Finalement, par somme de limites, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0}$

exercice 6 Soit f la fonction définie sur $]-1;1[$ par $f(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$

Justifier que f est bien définie et que, pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $f(\sin\theta)=\theta$.

Indication : on pourra utiliser un changement de variable « ad hoc »

Proposition de corrigé :Pour tout $x \in]-1;1[$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{sqrt1-t^2}$ est continue, donc intégrable entre 0 et x, comme inverse d'une composée de fonctions continues ne s'annulant pas sur l'intervalle. Ainsi, f est bien définie sur $]-1,1[$. De plus, pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin\theta \in]-1;1[$ et la $(\sin\theta)$ est bien défini et on a :

$$f(\sin\theta)=\int_{\sin(0)}^{\sin(\theta)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

La fonction $u : s \mapsto \sin s$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc entre 0 et θ et la formule du changement de variable donne :

$$f(\sin\theta)=\int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{1-(u(s))^2}}u'(s)\,\mathrm{d}s$$

$$f(\sin\theta)=\int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(s)}}\cos(s)\,\mathrm{d}s$$

$$f(\sin\theta)=\int_0^\theta \frac{1}{\sqrt{\cos^2(s)}}\cos(s)\,\mathrm{d}s$$

$$f(\sin\theta)=\int_0^\theta \frac{\cos(s)}{|\cos(s)|}\,\mathrm{d}s$$

$$f(\sin\theta)=\int_0^\theta 1\,\mathrm{d}s \text{ car } \cos s>0 \text{ pour tout } x\in\left]-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}\right[$$

$$f(\sin\theta)=\theta$$

$$\boxed{\forall\theta\in\left]-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}\right[,\quad f(\sin\theta)=\theta}$$

exercice 7

Déterminer des réels a, b, c et d tels que, pour tout réel x, $\frac{x^3+1}{x^2+1}=ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+1}$. Déterminer les primitives de f.

Proposition de corrigé :f est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, le dénominateur ne s'annulant pas. Ainsi, f admet des primitives. Pour tout réel x, on a :

$$F(x)=\int_0^x \frac{t^3+1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$F(x)=\int_0^x \frac{t(t^2+1)-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$F(x)=\int_0^x t-\frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$F(x)=\int_0^x t\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$F(x)=\tfrac{x^2}{2}-\tfrac{1}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^x$$

$$F(x)=\tfrac{x^2}{2}-\tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Finalement, les primitives de f sont les fonctions de la forme : $x\mapsto \frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\lambda \quad (\lambda\in\mathbb{R})$

exercice 8 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie :

$$I=\int_1^{\mathrm{e}} \ln(t)\,\mathrm{d}t \qquad J=\int_0^x t\cos t\,\mathrm{d}t \qquad K=\int_1^{x^2} s\mathrm{e}^s\mathrm{d}s \qquad L=\int_0^1 (t^2-5t+1)\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{d}t$$

Proposition de corrigé :

exercice 9 Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(x)\,\mathrm{d}x \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(2\theta)\sin^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

Proposition de corrigé :

exercice 10 On définit les intégrales :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \mathrm{e}^{-2t} \cos^2 t \,\mathrm{d}t \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \mathrm{e}^{-2t} \sin^2 t \,\mathrm{d}t \qquad K = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \mathrm{e}^{-2t} \cos(2t) \,\mathrm{d}t$$

1. Calculer K à l'aide d'une double intégration par parties.
2. Calculer $I+J$ et $I-J$.
3. En déduire les valeurs de I et J.

Proposition de corrigé :

1. La fonction intégrée est continue et l'intégrale est bien définie.

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \mathrm{e}^{-2t} \cos(2t) \,\mathrm{d}t$$

On applique une IPP avec les fonctions $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2}$ et $t \mapsto \cos(2t)$ (de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$K = \left[\cos(2t)\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2}\right]_0^{\frac{\pi}{8}} - \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2}(-2)\sin(2t)\,\mathrm{d}t$$

$$K = -\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{8}} \mathrm{e}^{-2t}\sin(2t)\,\mathrm{d}t$$

On applique une IPP avec les fonctions $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2}$ et $t \mapsto \sin(2t)$ (de classe $\mathcal{C}^1$) donne :

$$K = -\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} - \left[\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2}\sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{8}} + \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2} 2\cos(2t)\,\mathrm{d}t$$

$$K = -\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} - \left[\frac{-\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}\right] + \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2} 2\cos(2t)\,\mathrm{d}t$$

$$K = \frac{1}{2} - K$$

$$2K = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{K = \frac{1}{4}}$$

2. Par linéarité de l'intégrale,

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \mathrm{e}^{-2t}\left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right)\,\mathrm{d}t$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t \quad \text{car } \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

$$I + J = \left[\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2}\right]_0^{\frac{\pi}{8}}$$

$$\boxed{I + J = \tfrac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}\right)}$$

D'autre part,

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \mathrm{e}^{-2t}\left(\cos^2(t) - \sin^2(t)\right)\,\mathrm{d}t = K = \frac{1}{4}$$

3. Ainsi,

$$I = \frac{1}{2}\left((I+J) + (I-J)\right)$$

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{-2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

$$\boxed{I = \tfrac{1}{4}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}} + \tfrac{3}{2}\right)}$$

$$J = \frac{1}{2}\left((I+J) - (I-J)\right)$$

$$J = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}}}{-2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\boxed{J = \tfrac{1}{4}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}} + \tfrac{1}{2}\right)}$$

exercice 11 **une inégalité *très* classique (par ex ECRICOME 2017)**

Prouver que, pour tout $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $-x-x^2 \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x$

on peut classiquement utiliser procéder par étude de fonction pour la première et une inégalité de convexité pour la seconde, mais vous êtes invités à utiliser la croissance de l'intégrale ici en remarquant que $-\ln(1-x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

Proposition de corrigé : $\forall x > -1, -\ln(1-x) - x = \displaystyle\int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - 1\right)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{t}{1-t}\right)\mathrm{d}t$

Si $x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, pour tout $t \in [0;x]$, $1 \leqslant \frac{1}{1-t} \leqslant 2$ et donc

$$\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right], 0 \leqslant -\ln(1-x) - x \leqslant \int_0^x t\,\mathrm{d}t = x^2$$

d'où le résultat.

exercice 12 Soit F la fonction définie par

$$F(x)=\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \text{ si } x\notin\{0,1\}.\ F(0)=0 \text{ et } F(1)=\ln 2.$$

ELU PRODUIT DE L'ANNÉE

1. Vérifier que F est définie sur $\mathbb{R}+$.

2. Étudier le signe de F sur $\mathbb{R}+$.

3.
   a. Soit $x>0$, $x\neq 1$. Vérifier que $\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}=\ln 2$.
   b. Montrer que, pour tout $x\in]0;1[$: $\quad x^2\ln 2\leqslant F(x)\leqslant x\ln 2$.
   c. Montrer que, pour tout $x>1$: $\quad x\ln 2\leqslant F(x)\leqslant x^2\ln 2$.
   d. Montrer que F est continue en 0 et en 1.

4. Soit $x>1$. Déterminer un encadrement de $F(x)$ pour $x>1$. En déduire le comportement de F en $+\infty$

5.
   a. Montrer que F est dérivable sur $]0,1[$ et sur $]1;+\infty[$
   et déterminer l'expression de $F'(x)$ sur ces intervalles.
   b. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ et déterminer $F'(0)$ et $F'(1)$.

Proposition de corrigé :

1. F est définie en 0 et en 1. La fonction $g:t\mapsto\frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$ comme inverse d'une fonction continue et ne s'annulant pas sur ce domaine.

   Soit $x\in]0;1[$, alors $0\leqslant x^2<x\leqslant 1$ donc $[x,x^2]\subset]0,1[$
   Ainsi g est continue sur $[x^2;x]$ et $F(x)$ est bien définie.
   De même, si $x>1$, alors $x^2>x>1$ donc $[x,x^2]\subset]1;+\infty[$.
   Ainsi, g est continue sur $[x,x^2]$ donc $F(x)$ est bien définie.
   $\boxed{\text{Finalement, } F \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}+.}$

   attention à l'ordre des bornes !

2. Soit $x\in]0,1[$. Alors, pour tout $t\in[x^2,x]\subset]0;1[$, $\ln(t)<0$ et, par croissance de l'intégrale (avec $x^2<x$) et comme g continue et non nulle sur $[x^2,x]$, on trouve que
   $$\int_{x^2}^{x}g(t)\,\mathrm{d}t<0. \text{ et } F(x)=-\int_x^{x^2}g(t)\,\mathrm{d}t>0.$$
   Soit $x>1$, pour tout $t\in]1;+\infty[$, $g(t)>0$ et, par croissance de l'intégrale ($x<x^2$),
   $$F(x)=\int_x^{x^2}g(t)\,\mathrm{d}t>0.$$
   $\boxed{\text{Finalement, pour tout } x\in]0;+\infty[,\ F(x)>0 \text{ et } F(0)=0}$

3.
   a. Soit $x>0$, $x\neq 1$.
   Pour les mêmes raisons que précédemment, l'intégrale est bien définie.
   $$\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}=\left[\ln\left(|\ln(t)|\right)\right]_x^{x^2}=\ln\left(\frac{|\ln(x^2)|}{|\ln(x)|}\right)=\ln\left(\frac{2|\ln(x)|}{|\ln(x)|}\right)=\boxed{\ln 2}$$

b. Soit $x \in]0;1[$. Alors, pour tout $t \in [x^2, x]$,

$$\begin{aligned}
x^2 \leq & \quad t & \leq x \\
x^2 \frac{1}{t\ln t} \geq & \quad t\frac{1}{t\ln t} & \geq x\frac{1}{t\ln t} \text{ car } \ln(t) < 0 \\
\int_{x^2}^{x} x^2 \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \geq & \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t & \geq \int_{x^2}^{x} x\frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \text{ par croissance de l'intégrale } (x^2 < x) \\
-x^2\int_{x^2}^{x} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \leq & -\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t & \leq -x\int_{x^2}^{x} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \\
x^2\int_{x}^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \leq & \quad F(x) & \leq x\int_{x}^{x^2} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \text{ en permutant les bornes} \\
x^2\ln(2) \leq & \quad F(x) & \leq x\ln(2) \text{ d'après 3)a.}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]0,1[, \quad x^2\ln(2) \leq F(x) \leq x\ln(2)}$$

c. Soit $x > 1$. Alors $1 < x < x^2$ et, pour tout $t \in [x, x^2]$, on a :

$$\begin{aligned}
x \leq & \quad t & \leq x^2 \\
x\frac{1}{t\ln t} \leq & \quad t\frac{1}{t\ln t} & \leq x^2\frac{1}{t\ln t} \text{ car } \ln(t) > 0 \\
\int_{x}^{x^2} x\frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \leq & \int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t & \leq \int_{x}^{x^2} x^2\frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t \text{ par croissance de l'intégrale } (x < x^2) \\
x\ln(2) \leq & \quad F(x) & \leq x^2\ln(2) \text{ d'après 3)a.}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 1, \quad x\ln(2) \leq F(x) \leq x^2\ln(2)}$$

d. En faisant tendre x vers 0 dans 3)b., on obtient, avec le théorème des gendarmes

$\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = 0 = F(0)$ donc $\boxed{F \text{ est continue en } 0}$.

De même, en faisant tendre x vers 1 dans 3)a. et dans 3)b., on trouve que

$\lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} F(x) = \ln(2) = F(1)$ donc $\boxed{F \text{ est continue en } 1}$.

4. Soit $x > 1$. $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est strictement décroissante sur $[x, x^2]$.

Ainsi, pour tout $t \in [x, x^2]$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\ln(x^2)} \leq & \quad \frac{1}{\ln t} & \leq \frac{1}{\ln x} \\
\int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)}\,\mathrm{d}t \leq & \int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t & \leq \int_{x}^{x^2} \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}t \text{ car } x^2 > x \\
\frac{x^2 - x}{2\ln(x)} \leq & \quad F(x) & \leq \frac{x^2 - x}{\ln x}
\end{aligned}$$

Or, pour tout $x > 1$, $\frac{x^2 - x}{2\ln(x)} = \frac{x^2}{\ln(x)}(1 - \frac{1}{x})$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ donc, par produit de limites, $\lim\limits_{x\to} \frac{x^2 - x}{2\ln(x)} = +\infty$. L'inégalité précédente impose alors par comparaison

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$$

REMARQUE : *l'inégalité de droite ne sert à rien ici. Dans d'autres situations, le membre de droite parmet de mettre en place un encadrement pour le théorème des gendarmes...*

5. a. $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et à valeurs dans $]0,1[$.

De plus, $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[$ donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et, pour tout $x \in]0,1[$, $F'(x) = 2x \times \frac{1}{\ln(x^2)} - 1 \times \frac{1}{\ln(x)} = \frac{2x}{2\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}$

Un raisonnement similaire prouve que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$

$$\boxed{\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[, \quad F'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}}$$

b. étude en 0

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} x-1 = -1\end{array}\right\}$$ donc, par quotient de limites, on a : $\lim\limits_{x\to 0} F'(x) = 0$.

Montrons que F est dérivable en 0.

Pour tout $x > 0$, $\dfrac{F(x)-F(0)}{x} = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Or, $0 \leq \frac{1}{x}\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{x}\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(x^2)}\,\mathrm{d}t$ par croissance de l'intégrale ($0 < x^2 < x < 1$).

D'où $0 \leq \frac{1}{x}F(x) \leq \frac{1}{2x\ln(x)}(x^2 - x) = \frac{1}{2\ln(x)}(x-1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ par produit de limites.

Ainsi, F est dérivable en $0 et$ $\lim\limits_{x\to 0} F'(x) = F'(0)$ donc F' est continue en 0.

étude en 1 : C'est un peu lourd à rédiger, alors on va utiliser un lemme bien utile : le théorème de la limite de la dérivée

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = l \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Mais comme ce théorème n'est pas au programme, il faut le démontrer à chaque usage.

Soit $x \in I \setminus \{a\}$. Si a n'est pas la borne supérieure de I, soit $x > a$.

Par hypothèse, f est continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x[$ Ainsi, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]a, x[$ tel que $f'(c_x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
Or, comme $c_x \in]a, x[$, $\lim\limits_{x\to a} c_x = a$ et, comme par hypothèse $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ existe, alors $\lim\limits_{x\to a} f'(c_x) = \ell$ et on en déduit que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et vaut ℓ.
On a bien prouvé que f est dérivable à droite en a et que $f'_d(a) = \ell$.
On montre de même, si a n'est pas la borne inférieure de I que $f'_g(a) = \ell$

Finalement, f est dérivable en a et $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$

On pouvait utiliser ce résultat pour prouver directement la dérivabilité de f en 0.

Pour l'étude en 1, on sait que $\lim\limits_{x\to 1} F'(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x)} \underset{u=x-1}{=} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{u}{\ln(1+u)} = 1$

exercice 13 **Inégalité de la moyenne**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I vérifiant $\boxed{a \leqslant b}$. Montrer qu' il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a).$$

Cette inégalité donne pour $a \neq b$ un encadrement de $\frac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, qui est la faleur moyenne de f sur $[a:b]$, d'où le nom.

exercice 14 THÉORÈME ET FORMULE DE LA MOYENNE ♥

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Démontrer les théorèmes suivants :

1. THÉORÈME DE LA MOYENNE
   Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b])$. Il existe $c \in]a;b[$ tel que $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. PREMIÈRE FORMULE DE LA MOYENNE
   Soit $(f, g) \in \mathcal{C}^0([a;b])^2$ avec g positive.
   Il existe $c \in]a;b[$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Proposition de corrigé :

1. f étant continue sur $[a,b]$, on peut définir la primitive $F : t \mapsto \displaystyle\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$. Donc F est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ donc dérivable sur $]a;b[$ et continue sur $[a;b]$ et, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a;b[$ tel que $(b-a)F'(c) = F(B) - F(a)$. Or, $F'(c) = f(c)$ et $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. D'où le résultat.

2. Si g est la fonction nulle, les deux intégrales sont nulles et l'identité est vraie pour tout c.

   Supposons donc g non nulle. g étant continue, elle est intégrable sur $[a;b]$ et comme elle est non nulle. On définit alors $I = \displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$.

   g est continue donc intégrable. fg est continue comme produit de fonctions continues donc intégrable. De plus, comme f est continue sur $[a,b]$, f est bornée ainsi, il existe deux réels m et M tels que :

$$\begin{array}{llll}
\forall x \in [a,b], & m \leqslant & f(x) & \leqslant M \\
\text{donc} & mg(x) \leqslant & f(x)g(x) & \leqslant Mg(x) \\
\text{puis} & \displaystyle\int_a^b mg(x)\,\mathrm{d}x \leqslant & \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant & \displaystyle\int_a^b Mg(x)\,\mathrm{d}x \\
\text{Ainsi,} & mI \leqslant & \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant MI & \\
\text{donc} & m \leqslant & \displaystyle\frac{1}{I}\int_a^b f(x)g(x) & \leqslant M \quad \text{en divisant par } I > 0
\end{array}$$

   Comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{I}\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$

$$\boxed{\exists c \in [a,b], \quad \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$$

exercice 15 ❤ Déterminer l'existence et la limite des suites u et v dont les termes généraux sont : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ $\quad v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$

Proposition de corrigé :

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$
$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

On reconnait la suite des sommes de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln 2$

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$$
$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

On reconnait la suite des sommes de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} u_n &= \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\arctan x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 \\
&= \arctan 1 + \frac{1}{2}\ln(2) \\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)
\end{aligned}$$

REMARQUE : 9 fois sur 10, les sommes de Riemann peuvent se ramener à une intégrale sur $[0,1]$.
L'intervalle d'intégration correspond toujours aux valeurs balayées par les fractions « en $\frac{k}{n}$ ». En gros, on peut remplacer les $\frac{k}{n}$ par x

exercice 16 Étudier la convergence de (p_n) de TG :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Proposition de corrigé :

$$\ln p_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \frac{1-0}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

On reconnaît la somme de Riemann associée à $f : x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[0;1]$. Or, $f \in \mathcal{C}^1([0;1])$ et la suite des sommes de Riemann converge donc. Ainsi,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \ln(p_n) &= \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

la formule d'IPP appliquée aux fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ définies par :

$$\left|\begin{array}{ll} u(x) = x+1 & u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(1+x) & v'(x) = \frac{1}{1+x}\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}&= [(x+1)\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(2) - \int_0^1 1\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln 2 - 1\end{aligned}$$

Par continuité de l'exponentielle, $\boxed{\lim p_n = \mathrm{e}^{2\ln 2 - 1} = \frac{4}{\mathrm{e}}}$

On pouvait aussi intégrer 1 en x dans l'IPP, mais c'était plus lourd. Retenir qu'on peut choisir la primitive qui arrange.
On pouvait également utiliser la primitive de $\ln$ vue en cours (qui se retrouve par IPP)

exercice 17

1. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}+$ par $f_n(x) = \sqrt{n^2 + x^n}$, $(n \in \mathbb{N})$.
   Étudier les variations de f_n sur $\mathbb{R}+$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{n^2 + x^n}\,\mathrm{d}x$.

   Déterminer un encadrement de u_n et conclure sur la convergence de la suite $(u_n)n \in \mathbb{N}$

Proposition de corrigé :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}+$ comme composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathbb{R}+$: $f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{2\sqrt{n^2+x^n}} \geqslant 0$, donc f_n est croissante sur $\mathbb{R}+$.

2. De la question précédente, on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [1; 1+\frac{1}{n}]$, on a :

$$\begin{aligned} f_n(1) \leqslant \quad & f_n(x) \quad \leqslant f_n\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ \int_1^{1+\frac{1}{n}} f_n(1)\,\mathrm{d}x \leqslant & \int_1^{1+\frac{1}{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^{1+\frac{1}{n}} f_n\left(1+\frac{1}{n}\right)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

par croissance de l'intégrale ($1 < 1 + \frac{1}{n}$),

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sqrt{n^2+1} \leqslant \quad & u_n \quad \leqslant \frac{1}{n}\sqrt{n^2 + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\ \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \leqslant \quad & u_n \quad \leqslant \sqrt{1+\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \end{aligned}$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$ (limite classique).

Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0$ par produit de limites.

Finalement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 1$

et le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$

exercice 18 INTÉGRALES DE WALLIS

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, \mathrm{d}x$

1.
   a. Déterminer une relation de récurrence liant I_n et I_{n-2}.
   b. Calculer I_0 et I_1. En déduire I_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n \, \mathrm{d}x$. Montrer que $J_n = I_n$.

3. Compléter la fonction `I` suivante, qui prend en entrée un entier positif n , afin qu'elle retourne un vecteur y qui contient les $2n+2$ premiers termes de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$.

```
def I(n):
    u = [0] * ......
    u[0] = ......
    u[1] = ......
    for k in range(n):
        ...........
    return u
```

Proposition de corrigé :

1.
   a. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On applique la formule d'intégration par parties, avec les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ définies pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ par :

$$\left|\begin{array}{ll} u(x) = \sin^{n-1}(x) & u'(x) = (n-1)\cos(x)\sin^{n-2}(x) \\ v(x) = -\cos x & v'(x) = \sin x \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{n-1} x \, \mathrm{d}x \\
I_n &= \left[-\cos x \sin^{n-1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos x (n-1)\cos(x)\sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x \\
I_n &= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{car } n-1 \geqslant 1 \text{ donc } \sin^{n-1}(0) = 0 \\
I_n &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x \\
I_n &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x \\
I_n &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \\
[1+(n-1)]I_n &= (n-1)I_{n-2} \\
I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$$

b. $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2(n-1)}$$

(récurrence à rédiger)

$$= I_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$$

$$= \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)(2k)}{(2k)^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2(n-1)+1}$$

(récurrence à rédiger)

$$= I_1 \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$$

$$= I_1 \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k+1)(2k)}$$

$$= I_1 \cdot \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

À retenir : quand la relation de récurrence ne porte que sur I_n et I_{n-2} (ou I_{n+2} et I_n), on étudie séparément la suite des termes d'indice pair et la suite des termes d'indice impair.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^n \mathrm{d}x$$

La fonction $u : x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $u'(x) = -1$.
La formule duchangement de variable donne alors :

$$I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(u(x)))^n (-u'(x)) \,\mathrm{d}x$$

$$I_n = -\int_{u(0)}^{u(\frac{\pi}{2})} (\cos(t))^n \,\mathrm{d}t$$

$$I_n = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\cos(t))^n \,\mathrm{d}t$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n \,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad I_n = J_n}$$

3.

```
import numpy as np
def I(n):
    u = [0] * (2*n+2)
    u[0] = np.pi/2
    u[1] = 1
    for k in range(n):
        u[2*k+2] = (2*k+1)/(2*k+2)*u[2*k]
        u[2*k+3] = (2*k+2)/(2*k+3)*u[2*k+1]
    return u
```

On pouvait aussi faire une double affectation (en une ligne). La bibilothèque `math` suffisait pour avoir une valeur approchée de π.

voir aussi EDHEC 2013, ECRICOME 2019, EML 2018 , EML 2012...

exercice 19 EDHEC ECE 2014

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$ est définie pour tout réel x.
   On considère désormais la fonction f définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t$$

2. Établir que f est impaire.

3. a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   b. Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x,
   et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. a. En utilisant la relation $t^2 \leqslant t^2+1 \leqslant t^2+2t+1$, valable pour tout t réel positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)$$
   b. Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   c. Dresser le tableau de variation complet de f.
   d. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

5. a. Montrer que pour tout réel x, on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
   b. Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x associe $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.
   c. En déduire l'expression explicite de $f(x)$.

6. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.

   a. Établir que, pour tout réel x strictement positif, on a :
$$x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}dt$$
   b. En déduire :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{7}{6}x^3$$
   c. Conclure que $f(x) \underset{0^+}{\sim} x$.
   d. Montrer que l'on a aussi : $f(x) \underset{0^-}{\sim} x$.

Proposition de corrigé :

1. $g : t \mapsto \sqrt{t^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, g est intégrable sur l'intervalle d'extrémités x et $2x$, et donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t$. Le changement de variable affine $u = -t$ donne alors :
   $f(-x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{(-u)^2+1}}(-\,\mathrm{d}u) = -\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,\mathrm{d}u = -f(x).$
   $\boxed{f \text{ est impaire.}}$

3. a. Notons G une primitive de la fonction intégrée g définie en **1.**. G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, comme pour tout réel x, $f(x) = G(2x) - G(x)$, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
   b. Avec les notations précédentes, pour tout réel x,
   $f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{(2x)^2+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$
   En effet, pour tout réel x, $0 < x^2 + \frac{1}{4} < x^2+1$ et, par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}} > \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

4. a. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $x < 2x$ et pour $t \in [x, 2x]$,

$$\begin{aligned}
t^2 \leqslant \quad & t^2+1 \quad \leqslant t^2+2t+1 \\
\frac{1}{\sqrt{t^2}} \geqslant \quad & \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \quad \geqslant \frac{1}{\sqrt{(t+1)^2}} \quad \text{par décroissance de } t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}} \\
\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{2x} & \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t \quad \text{par croissance de l'intégrale } (x<2x) \\
\ln(2x)-\ln(x) \geqslant \quad & f(x) \quad \geqslant \ln(2x+1)-\ln(x+1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(2x+1)-\ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)}$$

b. Pour tout $x > 0$,

$\ln(2x+1)-\ln(x+1) = \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$.

D'après le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)}$$

c. Par imparité de f, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\ln(2)$. Ainsi,

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

d. $f(0) = 0$. De plus, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc :
$\forall x > 0, f(x) > f(0) > 0$ et il n'y a pas de solution dans $]0; +\infty[$. Par imparité de f il n'y a pas de solution dans $]-\infty; 0[$.

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet } 0 \text{ comme unique solution.}}$$

> on pouvait évidemment utiliser le théorème de la bijection continue

5. a. Pour tout réel x, $|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$ donc $0 \leqslant x + |x| < x + \sqrt{x^2+1}$ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, x + \sqrt{x^2+1} > 0.}$$

b. D'après ce qui précède, h est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$h'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$h'(x) = \frac{\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\sqrt{x^2+1}}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$$h'(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

c. Ainsi, $f(x) = [h(x)]_x^{2x} = h(2x) - h(x)$

$$\boxed{f(x) = \ln(2x+\sqrt{(2x)^2+1}) - \ln(x+\sqrt{x^2+1})}$$

6. a. Soit x réel strictement positif, on a :

$$\begin{aligned}
x - f(x) &= \int_x^{2x} 1\,\mathrm{d}t - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_x^{2x} 1 - \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_x^{2x} \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= \int_x^{2x} \frac{\left(\sqrt{t^2+1}-1\right)\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_x^{2x} \frac{t^2+1-1}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}\,\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\forall x>0, x-f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}\,\mathrm{d}t}$$

b. Pour tout $x>0, x<2x$ et la fonction intégrée est positive donc, par positivité de l'intégrale, $x-f(x)\geqslant 0$.

D'autre part, pour tout $t>0$, $1+t^2>1$ et $\sqrt{t^2+1}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)>2$,

donc d'après la question précédente :

$$x-f(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{t^2}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{6}\right]_x^{2x} = \frac{8x^3}{6} - \frac{x^3}{6} = \frac{7x^3}{6}$$
$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*, \quad 0\leqslant x-f(x)\leqslant \tfrac{7}{6}x^3}$$

c. L'encadrement précédent donne :

$\forall x>0, x-\frac{7x^3}{6}\leqslant f(x)\leqslant x$ donc $1-\frac{7x^2}{6}\leqslant \frac{f(x)}{x}\leqslant 1$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} 1-\frac{7x^2}{6}=1$, le théorème d'encadrement donne $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1$ et donc

$$\boxed{f(x)\underset{0^+}{\sim} x.}$$

d. Par imparité de f, pour tout $x<0$,

$\frac{f(x)}{x}=\frac{-f(-x)}{x}=\frac{f(-x)}{-x}\underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 1$ d'après la question précédente ($-x>0$).

$$\boxed{f(x)\underset{0^-}{\sim} x.}$$

si le but était juste d'obtenir l'équivalent $f(x)\underset{0}{\sim} x$, on pouvait l'obtenir grâce à un DL_1 de f en 0.
En effet, f est dérivable en 0 donc $f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x)$, c.à.d $f(x)=x+o(x)$

exercice 20 **EML 1992 (ECE)**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ f(x) = x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

On se propose d'étudier la suite réelle (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_0 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \int_0^1 f(t - u_n)\ \mathrm{d}t$$

1. **Étude du cas $0 \leq u_0 \leq 1$**
   On suppose $0 \leq u_0 \leq 1$
   a. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   b. Montrer que, si $0 \leq u_n \leq 1$, alors $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 + u_n^2\right)$.
   En déduire que, pour tout entier positif ou nul n, $u_n \leq 1$.
   c. Montrer que la suite (u_n) est convergente ; déterminer sa limite.

2. **Étude des cas $u_0 < 0$ et $u_0 > 1$.**
   a. On suppose $u_0 < 0$.
   Calculer u_1. En déduire l'étude de la suite (u_n).
   b. On suppose $u_0 > 1$.
   Calculer u_1, puis, pour tout entier positif n,u_n. Que dire de la suite (u_n) ?

3. **Interprétation graphique .**
   On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$g(x) = x + \int_0^1 f(t - x)\ \mathrm{d}t$$
   a. Calculer pour tout nombre réel x la valeur de $g(x)$.
   Construire le graphe de g dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).
   b. Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n) dans les cas suivants : $u_0 = -2;\ u_0 = 0;\ u_0 = 2$

Proposition de corrigé :

1. On suppose $0 \leq u_0 \leq 1$
   a. On a pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 f(t - u_n)\,dt$ et comme f est positive sur $\mathbb{R}$ (et continue) et que $0 \leq 1$ alors $\int_0^1 f(t - u_n)\,dt \geq 0$.
   Donc la suite est bien croissante.
   b. Montrer que, si $0 \leq u_n \leq 1$, alors pour tout $t \in [0, u_n[$: $t - u_n < 0$ et $f(t - u_n) = 0$ et pour $t \in [u_n, 1]$, $t - u_n \geq 0$ et $f(t - u_n) = t - u_n$
   $$\begin{aligned} \text{Donc } u_{n+1} &= u_n + \int_0^{u_n} 0\ \mathrm{d}t + \int_{u_n}^1 (t - u_n)\ \mathrm{d}t \\ &= u_n + \left[\frac{t^2}{2} - u_n t\right]_{u_n}^1 \\ &= u_n + \frac{1}{2} - u_n - \frac{u_n^2}{2} + u_n^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + u_n^2\right) \end{aligned}$$
   On montre alors par récurrence que pour tout entier n : $u_n \leq 1$.
   $\boxed{\text{I}}$ pour $n = 0$ on a $u_0 \leq 1$
   $\boxed{\text{H}}$ Soit n tel que $u_n \leq 1$ alors (on a déjà $u_n \geq 0$) $0 \leq u_n \leq 1$ et donc $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + u_n^2\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 + 1^2\right) = 1$
   $\boxed{\text{C}}$ Donc pour tout entier n : $u_n \leq 1$

c. On a vu que la suite u était croissante et majorée par 1. Donc elle est convergente et sa limite ℓ vérifie $0 \leq \ell \leq 1$
Comme $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + u_n^2\right)$ et que u_{n+1} tend également vers ℓ alors, par unicité de la limite,
ℓ est solution de $x = \frac{1}{2}\left(1 + x^2\right) \iff x^2 - 2x + 1 = 0$ équation du second degré qui a pour solution unique 1.
Donc la limite de la suite est 1.

2. a. On suppose $u_0 < 0$.
On a $u_1 = u_0 + \int_0^1 f\left(t - u_0\right) dt$ et comme $t - u_0 \geq 0$ sur $[0, 1]$ alors $f\left(t - u_0\right) = t - u_0$ et $u_1 = u_0 + \int_0^1 \left(t - u_0\right) dt$
et $u_1 = u_0 + \left[\frac{t^2}{2} - u_0 t\right]_0^1 = u_0 + \frac{1}{2} - u_0 = \frac{1}{2}$
On est alors ramené à la première question à partir du terme d'indice 1.
Et la suite u converge vers 1
b. On suppose $u_0 > 1$.
Comme $t - u_0 < 0$ sur $[0, 1]$ alors $f\left(t - u_0\right) = 0$ et $u_1 = u_0$ et on a par récurrence, pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n$.
Donc la suite est constante.

3. a. Pour calculer $g(x)$, on distingue trois cas :

- si $x < 0$ alors $t - x \geq 0$ pour $t \in [0, 1]$ et
$g(x) = x + \int_0^1 (t - x)\ \mathrm{d}t = x + \left[\frac{t^2}{2} - x\,t\right]_{t=0}^1 = x + \frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}$
- si $0 \leq x \leq 1$
alors $g(x) = x + \int_0^x 0\,\mathrm{d}t + \int_x^1 (t - x)\ \mathrm{d}t = x + \left[\frac{t^2}{2} - x\,t\right]_{t=x}^1 = x + \frac{1}{2} - x - \frac{x^2}{2} + x^2$
et $g(x) = \frac{1}{2}\left(1 + x^2\right)$
- et si $x > 1$ alors $t - x < 0$ pour $t \in [0, 1]$
d'où $g(x) = g(x) = x + \int_0^1 0\,\mathrm{d}t = x$
et $g(x) = x$

Finalement, $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}(1 + x^2) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{si } x > 1 \\ x & \end{cases}$

Donc la courbe représentative de g est horizontale $(1/2)$ constante sur $\mathbb{R}^-$, puis une portion de parabole sur $[0, 1]$ (tangentes horizontale en 0 et de pente 1 en 1) puis la droite d'équation $y = x$ sur $]1, +\infty[$
b. Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n) dans les cas suivants : $u_0 = -2;\ u_0 = 0;\ u_0 = 2$
On reporte sur la droite d'équation "$y = x$" pour avoir les termes successifs.

---

exercice 21 Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$. Montrer que

$$\int_{-1}^{1} (1 - t^2) f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow f = 0$$

<u>Proposition de corrigé</u> : **raisonnement très classique à retenir pour l'ECS2**

$t \mapsto (1 - t^2) f^2(t)$ est continue et positive sur $[-1, 1]$ comme produit de fonctions positives et continues sur cet intervalle.

Comme les bornes vérifient $-1 < 1$ et que $\int_{-1}^{1} (1 - t^2) f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$, pour tout $t \in [-1; 1]$, $(1 - t^2) f^2(t) = 0$.

Ainsi, pour tout $t \in]-1; 1[$, $(1 - t^2) \neq 0$ donc $f^2(t) = 0$ puis $f(t) = 0$.
Par continuité de f en 1, $f(1) = \lim\limits_{t \to 1} f(t) = 0$. On montre de même que $f(-1) = 0$.

$\boxed{f \text{ est nulle sur } [0; 1]}$

Noter l'importance de la dernière étape du raisonnement, sans laquelle on n'a pas vraiment prouvé que f est la fonction nulle !

exercice 22 ($\star$) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}$$

1. Déterminer une relation entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto I_n(x)$ admet une limite finie I_n quand x tend vers $+\infty$ et exprimer I_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Proposition de corrigé :

1. Par IPP,

$$I_n(x) = \left[\frac{t}{(1+t^2)^{n+1}}\right]_0^x + (n+1)\int_0^x \frac{2t^2}{(1+t^2)^{n+2}}\,\mathrm{d}t$$

$$I_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} + (n+1)\Big(2I_n(x) - 2I_{n+1}(x)\Big)$$

Ainsi,

$$2(n+1)I_{n+1}(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}} + (2n+1)I_n(x)$$

2. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$\mathcal{H}_n$: « $x \mapsto I_n(x)$ admet une limite finie I_n quand x tend vers $+\infty$ »

$\boxed{\text{I}}$ Pour $n = 0$, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [Arctant]_0^x = \arctan x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$ donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

$\boxed{\text{H}}$ Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après **1)**,

$$I_{n+1}(x) = \frac{x}{2(n+1)(1+x^2)^{n+1}} + \frac{2n+1}{2(n+1)}I_n(x)$$

Or,

$$\frac{x}{2(n+1)(1+x^2)^{n+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2(n+1)x^{2n+1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et, par hypothèse de récurrence, $I_n(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} I_n$ donc, par somme de limites,

$$I_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{2(n+1)}I_n = I_{n+1} \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie $\boxed{\text{C}}$ D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$ est vraie.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n = \lim_{x\to+\infty} I_n(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}}$$

Dans la récurrence, on a prouvé que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{2n-1}{2n}I_{n-1}$$

Ainsi, on montrerait par récurrence que :

$$I_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} I_0$$

d'où on tire

$$I_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)2k}{(2k)^2} I_0$$

puis

$$I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad I_n = \frac{\pi}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}}$$

exercice 23 ($\star\star$) Soit a et b deux réels avec $a < b$. Pour tous $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on définit :

$$I_{p,q} = \int_a^b (t-a)^p (t-b)^q \,\mathrm{d}t$$

1. a. pour tout $(p,q) \in N \times \mathbb{N}^*$, calculer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p+1,q-1}$
   b. en déduire, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $I_{p,q}$ en fonction de p et q.

2. Montrer alors que

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{n!p!}{(n+p+1)!}$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

Proposition de corrigé :

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

1. a. Soit $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{p+1}(t-a)^{p+1}$ et $t \mapsto (t-b)^q$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc sur $[a,b]$. La formule d'intégration par parties donne alors :

$$I_{p,q} = \int_a^b (t-a)^p (t-b)^q \,\mathrm{d}t$$
$$I_{p,q} = \left[\frac{1}{p+1}(t-a)^{p+1}(t-b)^q\right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{p+1}(t-a)^{p+1} q (t-b)^{q-1} \,\mathrm{d}t$$
$$I_{p,q} = 0 - \frac{q}{p+1}\int_a^b (t-a)^{p+1}(t-b)^{q-1} \,\mathrm{d}t \text{ car } p+>0 \text{ et } q>0$$
$$\boxed{I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}}$$

   b. Soit $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

$$I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$$
$$I_{p,q} = (-1)\frac{q}{p+1} \times (-1)\frac{q-1}{p+2} I_{p+2,q-2}$$
$$I_{p,q} = (-1)\frac{q}{p+1} \times (-1)\frac{q-1}{p+2} \times (-1)\frac{q-2}{p+3} I_{p+3,q-3}$$
$$I_{p,q} = \left(\prod_{k=0}^{q-1} (-1)\frac{q-k}{p+k+1}\right) I_{p+q,q-q}$$
$$I_{p,q} = (-1)^q I_{p+q,q-q} \times \frac{\prod_{k=0}^{q-1}(q-k)}{\prod_{k=0}^{q-1}(p+k+1)}$$
$$I_{p,q} = (-1)^q I_{p+q,q-q} \times \frac{\prod_{j=1}^{q} j}{\prod_{j=p+1}^{p+q} j}$$
$$I_{p,q} = (-1)^q I_{p+q,q-q} \times \frac{\left(\prod_{j=1}^{q} j\right)\left(\prod_{j=1}^{p} j\right)}{\prod_{j=1}^{p+q} j}$$
$$I_{p,q} = (-1)^q I_{p+q,q-q} \frac{p!q!}{(p+q)!}$$

   Il est immédiat que le résultat reste vrai pour $q = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad I_{p,q} = \frac{(-1)^q}{\binom{p+q}{p}} I_{p+q,0}.}$$

Calculons maintenant $I_{p+q,0}$.

Pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $I_{p+q,0}=\displaystyle\int_a^b (t-a)^{p+q}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{(t-a)^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_a^b=\frac{(b-a)^{p+q+1}}{p+q+1}$.

$$\boxed{\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2,\quad I_{p,q}=\frac{(-1)^q p!q!}{(p+q+1)!}}$$

2. Avec $a=0$ et $b=1$, on peut écrire, pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$:

$$I_{p,n}=\int_0^1 t^p(t-1)^n$$

$$I_{p,n}=\int_0^1 t^p\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}t^k(-1)^{n-k}\,\mathrm{d}t \quad \text{avec la formule du binôme}$$

$$I_{p,n}=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\int_0^1 t^{p+k}\,\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale}$$

$$\frac{(-1)^n p!n!}{(p+n+1)!}=\sum_{k=0}^n(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{1}{p+k+1}$$ et, comme $(-1)^{-k}=(-1)^k$ on obtient, après simplification par $(-1)^n$

$$\boxed{\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2,\qquad \sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{p+k+1}=\frac{n!p!}{(n+p+1)!}}$$

Pour la seconde intégrale, on prend $n\in\mathbb{N}$, $p=q=n$, $a=-1$ et $b=1$. Alors,

$$I_{n,n}=\int_{-1}^1 (t+1)^n(t-1)^n\,\mathrm{d}t$$

$$I_{n,n}=\int_{-1}^1 (t^2-1)^n\,\mathrm{d}t$$

$$I_{n,n}=\int_{-1}^1\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}t^{2k}(-1)^{n-k}\,\mathrm{d}t \quad \text{avec la formule du binôme de Newton}$$

$$I_{n,n}=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\int_{-1}^1 t^{2k}\,\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale}$$

$$\frac{(-1)^n n!n!(1-(-1))^{n+n+1}}{(n+n+1)!}=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1}\right]_{-1}^1$$

Après simplification par $(-1)^n$ et comme $(-1)^k=(-1)^{-k}$, il vient :

$$\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(-1)^k\frac{2}{2k+1}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad \sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}}$$