7 Systèmes et calcul matriciel.

Exercice 1 :

Résoudre par la méthode du Gauss les systèmes d'équations linéaires suivants, d'inconnues réelles :

① $(S_1)\ \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ x-y+z &= 2 \\ x+y+z &= 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z &= 0 & (L_1) \\ 2x &= 2 & (L_2 \leftarrow L_2+L_1) \\ 2z &= 6 & (L_3 \leftarrow L_3-L_1) \end{cases}$; Solution unique.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_{(S_1)} = \{(1,2,3)\}}$

✐ *Remarque :* On pouvait noter que $\text{rg}(S_1) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$. Le nombre d'inconnues est égale au rang du système. Cela suffit à justifier l'unicité de la solution.

② $(S_2)\ \begin{cases} \boxed{x}+y+z &= 0 \\ x+2y+3z &= 0 \\ x+3y+5z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 0 & (L_1) \\ \boxed{y}+2z &= 0 & (L_2 \leftarrow L_2-L_1) \\ 2y+4z &= 0 & (L_3 \leftarrow L_3-L_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 0 \\ y+2z &= 0 \end{cases}$

On note que $\text{rg}(S_2) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 < 3$.

Ce n'est pas un système de Cramer et le nombre d'inconnues auxilaires vaut : $3 - \text{rg}(S_2) = 1$
Choisissons z comme inconnue auxiliaire. Alors :

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} y &= -2z \\ x &= -y-z = z \end{cases},\ \forall z \in \mathbb{R}$$

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_{(S_2)} = \{(z,-2z,z), z \in \mathbb{R}\}}$

③ Résolution de (S_3) :

$$(S_3) \begin{cases} \boxed{x}+y+z &= 1 \\ x+2y+3z &= -1 \\ x+3y+5z &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 1 & (L_1) \\ \boxed{y}+2z &= -2 & (L_2 \leftarrow L_2-L_1) \\ 2y+4z &= 1 & (L_3 \leftarrow L_3-L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z &= 1 & (L_1) \\ y+2z &= -2 & (L_2) \\ 0 &= 5 & (L_3 \leftarrow L_3-2L_2) \end{cases}$$

Ce système est dit « incompatible ».

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S}_{(S_3)} = \emptyset}$

Exercice 2 : systèmes d'équations linéaires avec paramètres

① *Résolvons les systèmes d'équations linéaires suivants, en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$:*

<u>**Système** (S_1) :</u>

$$(S_1)\begin{cases} ax+y+z &= 0 \\ x+ay+z &= 0 \\ x+y+az &= 0 \end{cases} \text{ s'écrit : } \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou encore } \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right)$$

✐ **Attention** : il est indispensable de préciser cette dernière notation dans les copies !

Dès lors :

$$(S_1) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1 \leftarrow L_2) \\ (L_2 \leftarrow L_1) \\ (L_3) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \text{a} & 1 & 0 \\ 0 & 1\text{-}a^2 & 1\text{-}a & 0 \\ 0 & 1\text{-}a & a\text{-}1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2 \leftarrow L_2 - aL_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \text{a} & 1 & 0 \\ 0 & 1\text{-}a & a\text{-}1 & 0 \\ 0 & 1\text{-}a^2 & 1\text{-}a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2 \leftarrow L_3) \\ (L_3 \leftarrow L_2) \end{array}$$

➤ *Premier cas :* Si $a = 1$. Alors :

$$(S_1) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow x+y+z=0$$

Le système et la matrice associée sont de rang 1.
Il y a donc $3 - \text{rg}(S_1) = 2$ inconnues auxiliaires, par exemple y et z.
Conclusion : $\boxed{\text{Si } a = 1,\ \mathcal{S}_{(S_1)} = \{(-y-z, y, z), (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\{(-1,1,0), (-1,0,1\}}$

➤ *Second cas :* Si $a \neq 1$. Alors on peut prendre $1-a$ comme pivot et donc :

$$(S_1) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \text{a} & 1 & 0 \\ 0 & 1\text{-}a & a\text{-}1 & 0 \\ 0 & 0 & P(a) & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - (1+a)L_2) \end{array}$$

avec $P(a) = (1-a) - (1+a)(a-1) = (1-a)(1+1+a) = (1-a)(2+a)$

➢ *Premier sous-cas :* Si $a = -2$ alors

$$(S_1) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \text{-}2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & \text{-}3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z &= 0 \\ y-z &= 0 \end{cases}$$

Le système et la matrice associée sont de rang 2.
Il y a donc $3 - \text{rg}(S_1) = 1$ inconnue auxiliaire, par exemple z.
Conclusion : $\boxed{\text{Si } a = -2,\ \mathcal{S}_{(S_1)} = \{(z,z,z), z \in \mathbb{R}\}}$

➢ *Second sous-cas :* Si $a \neq -2$ alors le système et la matrice associée sont de rang 3. Le système admet donc une unique solution, à savoir la solution nulle.
Conclusion : $\boxed{\text{Si } a \neq 1, -2, \mathcal{S}_{(S_1)} = \{(0,0,0)\}}$

<u>**Système (S_2)**</u> : Avec les mêmes notations :

$$(S_2)\begin{cases} x+y+z+2at &= 0 \\ x+by+z+t &= 0 \\ 2x+2y+2z+2t &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2a & 0 \\ 1 & b & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & b-1 & 0 & \text{1-2}a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{2-4}a & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \end{array}$$

➤ *Premier cas :* <u>Si $a \neq 1/2$ et $b \neq 1$.</u>
Le rang du système et de sa matrice associé vaut 3 et le nombre d'inconnues auxiliaires est donc de : $4 - \text{rg}(S_2) = 1$.
Prenons par exemple z comme inconnue auxiliaire.

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+2at &= 0 \\ (b-1)y+(1-2a)t &= 0 \\ (1-2a)t &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t &= 0 & (L_3) \\ y &= 0 & (L_2) \\ x &= -z & (L_1) \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } a \neq 1/2 \text{ et } b \neq 1,\ \mathcal{S}_{(S_2)} = \{(-z,0,z,0), z \in \mathbb{R}\}}$

➤ *Second cas :* <u>Si $a \neq 1/2$ et $b = 1$</u>, $(S_2) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{1-2}a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{2-4}a & 0 \end{array}\right)$

Le rang du système et de sa matrice associé vaut 2.
Il y a donc $4 - \text{rg}(S_2) = 2$ inconnues auxiliaires (par exemple y et z).

$$(S_2)\begin{cases} x+y+z+2at &= 0 \\ (1-2a)t &= 0 \\ (1-2a)t &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t &= 0 \\ x &= -y-z, \forall (y,z) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } a \neq 1/2 \text{ et } b = 1,\ \mathcal{S}_{(S_2)} = \{(-y-z,y,z,0), (y,z) \in \mathbb{R}^2\}}$

➤ *Troisième cas :* <u>Si $a = 1/2$ et $b \neq 1$</u>, $(S_2) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & b\text{-}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Là encore le rang vaut 2 et il y a donc 2 inconnues auxiliaires.

$$(S_2)\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ (b-1)y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= 0 \\ x &= -z-t, \forall (z,t) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } a = 1/2 \text{ et } b \neq 1,\ \mathcal{S}_{(S_2)} = \{(-z-t,0,z,t), (z,t) \in \mathbb{R}^2\}}$

➤ *Quatrième cas :* <u>Si $a = 1/2$ et $b = 1$</u>, $(S_2) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Le rang du système vaut 1 et il y a donc $4 - \text{rg}(S_2) = 3$ inconnues auxiliaires.

$$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t &= 0 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } a = 1/2 \text{ et } b = 1,\ \mathcal{S}_{(S_2)} = \{(-y-z-t,y,z,t), (y,z,t) \in \mathbb{R}^3\}}$

__**Système (S_3)**__ : En conservant les mêmes notations :

$$(S_3)\begin{cases} ax+y+z &= 4 \\ x+by+z &= 3 \\ x+2by+z &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \text{a} & 1 & 1 & 4 \\ 1 & \text{b} & 1 & 3 \\ 1 & \text{2b} & 1 & 4 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \text{b} & 1 & 3 \\ \text{a} & 1 & 1 & 4 \\ 1 & \text{2b} & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1 \leftarrow L_2) \\ (L_2 \leftarrow L_1) \\ (L_3) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \text{b} & 1 & 3 \\ 0 & \text{1-}ab & \text{1-}a & \text{4-3}a \\ 0 & \text{b} & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2 \leftarrow L_2 - aL_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \text{b} & 1 & 3 \\ 0 & \text{b} & 0 & 1 \\ 0 & \text{1-}ab & \text{1-}a & \text{4-3}a \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2 \leftarrow L_3) \\ (L_3 \leftarrow L_2) \end{array}$$

➤ *Premier cas :* __Si $b=0$__ alors $(S_3) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \text{1-}a & \text{4-3}a \end{array}\right)$.

Au regard de la deuxième ligne, ce système est dit « incompatible ».

Conclusion : $\boxed{\text{Si } b=0,\ \mathcal{S}_{(S_2)} = \emptyset}$

➤ *Second cas :* __Si $b \neq 0$.__

$$(S_3) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \text{b} & 1 & 3 \\ 0 & \text{b} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & P(a,b) & Q(a,b) \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3 \leftarrow bL_3 - (1-ab)L_2) \end{array}$$

où $P(a,b) = b(1-a)$ et $Q(a,b) = b(4-3a) - (1-ab) = 4b - 3ab - 1 + ab = 4b - 2ab - 1$.

➢ *Premier sous-cas :* __Si $a=1$__ alors $P(a,b)=0$ et $Q(a,b) = 4b - 2b - 1 = 2b - 1$.

① __*Si $a=1$ et $b=1/2$*__ alors $P(a,b)=0$ et $Q(a,b)=0$.

$$(S_3) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1 & 3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y/2+z &= 3 \\ y &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= 2 \\ x+z &= 2 \end{cases}$$

Le rang du système valant 2, il y a $3 - \text{rg}(S_3) = 1$ inc. auxiliaire (par exemple z).

Conclusion : $\boxed{\text{Si } a=1 \text{ et } b=1/2,\ \mathcal{S}_{(S_3)} = \{(2-z, 2, z), z \in \mathbb{R}\}}$

② __*Si $a=1$ et $b \neq 1/2$*__ alors $P(a,b)=0$ et $Q(a,b) \neq 0$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } a=1 \text{ et } b \neq 1/2,\ \mathcal{S}_{(S_3)} = \emptyset}$

➢ *Second sous-cas :* __Si $a \neq 1$__ alors $P(a,b) = b(1-a) \neq 0$ et $Q(a,b) = 4b - 2ab - 1$.

$$(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x+by+z &= 3 \\ by &= 1 \\ P(a,b)z &= Q(a,b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z &= \dfrac{Q(a,b)}{P(a,b)} \\ y &= \dfrac{1}{b} \\ x &= 3 - by - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z &= \dfrac{4b-2ab-1}{b(1-a)} \\ y &= \dfrac{1}{b} \\ x &= 3 - 1 - \dfrac{4b-2ab-1}{b(1-a)} \end{cases}$$

En simplifiant on obtient : $z = \dfrac{2b(1-a) - 4b + 2ab + 1}{b(1-a)} = \dfrac{1-2b}{b(1-a)}$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } a \neq 1 \text{ et } b \neq 0,\ \mathcal{S}_{(S_3)} = \left\{ \left(\dfrac{1-2b}{b(1-a)}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{4b-2ab-1}{b(1-a)} \right), z \in \mathbb{R} \right\}}$

② *Résolvons les systèmes suivants dans les cas où ils n'admettent pas une solution unique :* **Commençons par traduire l'énoncé en écrivant :** Recherchons les valeurs de λ réelles pour lesquelles $\text{rg}(S) \neq 3$ (puisque, dans le cas contraire, la matrice associée est inversible et la solution est unique...).

Système (S_1) :

$$(S_1)\begin{cases} x+y &= \lambda x \\ -x+2y+z &= \lambda y \\ x+z &= \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x+y &= 0 \\ -x+(2-\lambda)y+z &= 0 \\ x+(1-\lambda)z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1\text{-}\lambda & 1 & 0 & 0 \\ \text{-}1 & 2\text{-}\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1\text{-}\lambda & 0 \end{array}\right)$$

On commence par échanger la ligne 1 avec la ligne 2 ou la ligne 3 pour éviter d'avoir à discuter la valeur du pivot $1-\lambda$. Dès lors :

$$(S_1) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1\text{-}\lambda & 0 \\ 1\text{-}\lambda & 1 & 0 & 0 \\ \text{-}1 & 2\text{-}\lambda & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1 \leftarrow L_3) \\ (L_2 \leftarrow L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_2) \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1\text{-}\lambda & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -(1-\lambda)^2 & 0 \\ 0 & 2\text{-}\lambda & 2\text{-}\lambda & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2 \leftarrow L_2-(1-\lambda)L_1) \\ (L_3 \leftarrow L_3+L_1) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1\text{-}\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -(1-\lambda)^2 & 0 \\ 0 & 0 & P(\lambda) & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3 \leftarrow L_3-(2-\lambda)L_2) \end{array}$$

où $P(\lambda) = (2-\lambda)+(2-\lambda)(1-\lambda)^2 = (2-\lambda)[1+(1-\lambda)^2] = (2-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+2)$

Si $P(\lambda) \neq 0$, $\text{rg}(S_1) = 3$. C'est un système de Cramer.

On nous demande donc de résoudre le système (S_1) pour les valeurs de λ telles que $P(\lambda) = 0$. Si on considère que λ est réel, il n'y a qu'une valeur de λ pour laquelle le système (S_1) n'admet pas une unique solution, à savoir $\lambda = 2$ car le discriminant du polynôme $Q(X) = X^2-2X+2$ est négatif.

Résolution de (S_1) *dans le cas* $\lambda = 2$:

$$(S_1) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \text{-}1 & 0 \\ 0 & 1 & \text{-}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y &= 0 \\ y-z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour } \lambda = 2,\ (S_1) \text{ n'est pas de Cramer et } \mathcal{S}_{(S_1)} = \{(x,x,x), x \in \mathbb{R}\}}$

✐ *Remarque :* Pour autant, si on considère que $\lambda \in \mathbb{C}$, il reste deux valeurs de λ pour lesquelles (S_1) n'est pas un système de Cramer, à savoir les deux racines complexes conjuguées $\lambda_1 = 1+i$ et $\lambda_2 = 1-i$ du polynôme $Q(X)$.

Pour $\lambda_1 = 1+i$, $(S_1) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x-iz &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases}$ donc $\mathcal{S}_{(S_1)} = \{(iz,-z,z), z \in \mathbb{R}\}$

Pour $\lambda_1 = 1-i$, $(S_1) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x+iz &= 0 \\ y+z &= 0 \end{cases}$ donc $\mathcal{S}_{(S_1)} = \{(-iz,-z,z), z \in \mathbb{R}\}$

Système (S_2) :

$$(S_2)\begin{cases}-(2+\lambda)x-2y+z & =0\\ -2x+(1-\lambda)y-2z & =0\\ x-2y-(2+\lambda)z & =0\end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \text{-}2\text{-}\lambda & \text{-}2 & 1 & 0\\ \text{-}2 & 1\text{-}\lambda & \text{-}2 & 0\\ 1 & \text{-}2 & \text{-}2\text{-}\lambda & 0\end{array}\right)$$

On commence là encore par échanger la première ligne avec la ligne L_2 ou L_3 afin d'éviter la discussion sur le pivot. Par exemple :

$$(S_2) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & \text{-}2 & \text{-}2\text{-}\lambda & 0\\ \text{-}2 & 1\text{-}\lambda & \text{-}2 & 0\\ \text{-}2\text{-}\lambda & \text{-}2 & 1 & 0\end{array}\right) \begin{array}{l}(L_1 \leftarrow L_3)\\ (L_2)\\ (L_3 \leftarrow L_1)\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \text{-}2 & \text{-}2\text{-}\lambda & 0\\ 0 & \text{-}3\text{-}\lambda & \text{-}2\lambda\text{-}6 & 0\\ 0 & \text{-}2\lambda\text{-}6 & 1-(2+\lambda)^2 & 0\end{array}\right) \begin{array}{l}(L_1)\\ (L_2 \leftarrow L_2+2L_1)\\ (L_3 \leftarrow L_3+(2+\lambda)L_1)\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \text{-}2 & \text{-}2\text{-}\lambda & 0\\ 0 & \text{-}3\text{-}\lambda & \text{-}2\lambda\text{-}6 & 0\\ 0 & \text{-}2\lambda\text{-}6 & -(\lambda+1)(\lambda+3) & 0\end{array}\right) \text{ car } 1-(2+\lambda)^2=(1-2-\lambda)(1+2+\lambda)$$

➤ *Premier cas :* Si $\lambda=-3$.

$$(S_2) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \text{-}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow x-2y+z=0$$

Le système est de rang $1<3$. Il n'admet pas une unique solution.
Conclusion : $\boxed{\text{Si } \lambda=-3 \text{ alors } \mathcal{S}_{(S_2)}=\{(2y-z,y,z),(y,z)\in\mathbb{R}^2\}}$

➤ *Deuxième cas :* Si $\lambda\neq-3$. On peut diviser L_2 et L_3 par $\lambda+3$. Alors :

$$(S_2) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \text{-}2 & \text{-}2\text{-}\lambda & 0\\ 0 & \boxed{-1} & \text{-}2 & 0\\ 0 & \text{-}2 & -(\lambda+1) & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \text{-}2 & \text{-}2\text{-}\lambda & 0\\ 0 & \text{-}1 & \text{-}2 & 0\\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0\end{array}\right) \begin{array}{l}(L_1)\\ (L_2)\\ (L_3 \leftarrow L_3-2L_2)\end{array}$$

Si $\lambda\neq3$ le système est de rang 3. C'est un système qui admet une solution unique.
Si $\lambda=3$ alors $\mathrm{rg}(S_2)=2<3$. Le système n'admet pas une unique solution et dans ces conditions :

$$(S_2) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \text{-}2 & \text{-}5 & 0\\ 0 & \text{-}1 & \text{-}2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases}x-2y-5z & =0\\ y+2z & =0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y & =-2z\\ x & =2y+5z=z\end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } \lambda=3 \text{ alors } \mathcal{S}_{(S_2)}=\{(z,-2z,z),z\in\mathbb{R}\}}$

Système (S_3) :

$$(S_3)\begin{cases}(3-\lambda)x+2y+4z &= 0\\ 2x-\lambda y+2z &= 0\\ 4x+2y+(3-\lambda)z &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3\text{-}\lambda & 2 & 4 & 0\\ 2 & \text{-}\lambda & 2 & 0\\ 4 & 2 & 3\text{-}\lambda & 0\end{array}\right)$$

On commence par échanger les lignes 2 et 3 pour éviter la discussion sur l'éventuelle nullité du pivot. Alors :

$$(S_3) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & \text{-}\lambda & 2 & 0\\ 3\text{-}\lambda & 2 & 4 & 0\\ 4 & 2 & 3\text{-}\lambda & 0\end{array}\right) \begin{array}{l}(L_1 \leftarrow L_2)\\ (L_2 \leftarrow L_1)\\ (L_3)\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \text{-}\lambda & 2 & 0\\ 0 & 4+\lambda(3\text{-}\lambda) & 8\text{-}2(3\text{-}\lambda) & 0\\ 0 & 2+2\lambda & \text{-}(1+\lambda) & 0\end{array}\right) \begin{array}{l}(L_1)\\ (L_2 \leftarrow 2L_2-(3-\lambda)L_1)\\ (L_3 \leftarrow L_3-2L_1)\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \text{-}\lambda & 2 & 0\\ 0 & \text{-}(\lambda+1)(\lambda\text{-}4) & 2(\lambda+1) & 0\\ 0 & 2(\lambda+1) & \text{-}(1+\lambda) & 0\end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \text{-}\lambda & 2 & 0\\ 0 & 2(\lambda+1) & \text{-}(1+\lambda) & 0\\ 0 & \text{-}(\lambda+1)(\lambda\text{-}4) & 2(\lambda+1) & 0\end{array}\right) \begin{array}{l}(L_1)\\ (L_2 \leftarrow L_3)\\ (L_3 \leftarrow L_2)\end{array}$$

➤ *Premier cas :* Si $\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$.

$$(S_3) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow 2x+y+2z=0$$

Le système est de rang $1<3$. Il n'admet pas une unique solution.
Conclusion : $\boxed{\text{Si } \lambda=-1 \text{ alors } \mathcal{S}_{(S_3)}=\{(x,-2x-2z,z),(x,z)\in\mathbb{R}^2\}}$

➤ *Deuxième cas :* Si $\lambda \neq -1$. On peut diviser L_2 et L_3 par $\lambda+1$. Alors :

$$(S_3) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \text{-}\lambda & 2 & 0\\ 0 & \boxed{2} & \text{-}1 & 0\\ 0 & 4\text{-}\lambda & 2 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \text{-}\lambda & 2 & 0\\ 0 & 2 & \text{-}1 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{P}(\lambda) & 0\end{array}\right) \begin{array}{l}(L_1)\\ (L_2)\\ (L_3 \leftarrow 2L_3-(4-\lambda)L_2)\end{array}$$

avec $P(\lambda)=4+(4-\lambda)=8-\lambda$.
Si $\lambda\neq 8$ le système est de rang 3. C'est un système qui admet une solution unique.
Si $\lambda=8$ alors $\mathrm{rg}(S_3)=2<3$. Le système n'admet pas une unique solution et dans ces conditions :

$$(S_3) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & \text{-}8 & 2 & 0\\ 0 & 2 & \text{-}1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases}2x-8y+2z &= 0\\ 2y-z &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z &= 2y\\ x &= 2y\end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } \lambda=8 \text{ alors } \mathcal{S}_{(S_3)}=\{(2y,y,2y),z\in\mathbb{R}\}}$