6 Nombres complexes et polynômes.

- ***Nombres complexes :*** Écriture algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe. Représentation géométrique. Propriétés des conjugués, modules et arguments d'un nombre complexe. Résolution des équations du second degré à coefficients réels. Somme et produit des racines. Définition de e^z, pour $z \in \mathbb{C}$. Formule $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.
- ***trigonométrie :*** Définition, périodicité et symétrie des fonctions cos, sin et tan.
Formules de trigonométrie $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.
Résolution d'équations trigonométrique du type : $\cos(x) = c$, $\sin(x) = s$ et $\tan(x) = t$.
Transformation : $a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = R\cos(\theta + \phi)$. Linéarisation de $\cos^p(\theta)\sin^q(\theta)$
- ***Polynômes :*** Opérations sur les polynômes. Polynôme dérivé.
Degré d'une somme, d'un produit, d'une dérivée de polynômes.
Racines d'un polynôme. Ordre de multiplicité et factorisation. Théorème de d'Alembert-Gauss.
Condition de nullité d'un polynôme qui admet plus de racines (comptées avec leur ordre de multiplicité) que son degré.

1 Nombres complexes

Exercice 1 ✶ : Linéariser les expressions suivantes

$$A_1 = \cos^4(\theta) - \sin^4(\theta),\ A_2 = \cos^2(\theta) \cdot \sin^4(\theta)$$

Exercice 2 ✶ : Formes algébriques et trigonométriques

Soit $a = 1 + i$ et $b = \sqrt{3} - i$. Déterminer la forme trigonométrique de a, b et ab.
En déduire les valeurs exactes de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 3 ✶✶ : Étude de conjugaison et de module

① Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|z_1| = 1 = |z_2|$. Montrer que $Z = \dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

② Soit z un nombre complexe de module 1. Montrer que $|1 + z| \geq 1$ ou $|1 + z^2| \geq 1$.
✐ *Remarque :* On pourra utiliser la forme trigonométrique et montrer que $|1 + z|^2 + |1 + z^2| \geq 2$.

Exercice 4 ✶ : Résolution d'équations du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

① $z^2 - z + 1 = 0$

② $z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 36z + 45 = 0$. ✐ On montrera qu'elle admet deux solutions imaginaires pures.

③ $(1 + \cos(2\theta))z^2 - 2\sin(2\theta)z + 2 = 0$ où $\theta \in [0, 2\pi[$. ✐ On déterminera un argument de chaque solution.

④ $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0.$

Exercice 5 ✶✶ :

On pose $z = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$, $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$.

① Que vaut z^7 ? En déduire que S et T sont des nombres complexes conjugués.

② Calculer $S + T$ et $S \cdot T$.

③ Montrer que S et T sont racines d'un trinôme qu'on déterminera. En déduire les valeurs de S et de T après avoir déterminer le signe de la partie imaginaire de S.

Exercice 6 ✶✶ : Sommes usuelles

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit les matrices

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

① Montrer que $R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta}$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

② Montrer que la matrice R_α est inversible. Calculer son inverse.

③ Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$, calculer $SR_\alpha S$ et pour tout entier naturel n calculer R^n.

④ En calculant de deux façons différentes $(R_\alpha + R_{-\alpha})^n$, exprimer $\cos^n(\alpha)$ en fonction de $\cos(\alpha)$, $\cos(2\alpha)$, $\cdots$, $\cos(n\alpha)$.

2 Polynômes

Exercice 7 ✶ : Factoriser sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ les polynômes suivants

$$P(X) = X^3 - 8,\ Q(X) = X^6 - 3X^2 - 2,\ R(X) = X^4 + X^2 + 1 \text{ et } S(X) = (2X+1)^4 - (X-1)^4$$

Exercice 8 ✶ : Racines et degré d'un polynôme

Soient deux réels a et b tels que $a \neq b$ et $a \neq -b$. Pour tout entier $n \geq 1$, on considère le polynôme :

$$P_{2n+1}(X) = (X + a + b)^{2n+1} - X^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1}$$

① Quel est le degré de P_{2n+1} ?

② Montrer que P_{2n+1} est divisible par P_3, c'est-à-dire qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $P_{2n+1} = P_3 \cdot Q$.

Exercice 9 ✶ : racines et coefficients d'un polynôme

On cherche à déterminer tous les triplets de nombres complexes (z_1, z_2, z_3) de même module 1 tels que : $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ et $z_1 z_2 z_3 = 1$.

① Soit $P = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$. Exprimer les coefficients de P en fonction de ses racines dans $\mathbb{C}$.

② De quel polynôme z_1, z_2 et z_3 sont les racines ?

③ Conclure. Dire notamment quel est le nombre de solutions.

Exercice 10 ✶ : Ordre de multiplicité

① Soit $P(X) = 2X^{35} + \sqrt{2}X - 3$. Montrer que P n'a qu'une racine réelle et que celle-ci est simple et positive.

② Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n(X) = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} + \cdots + \dfrac{X^n}{n!}$. Montrer que P_n n'a aucune racine multiple.
✐ On pourra montrer que toute racine multiple de P_n est racine de $P_n' - P_n$.

③ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que 1 est racine de $P = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1$ et déterminer sa multiplicité.

Exercice 11 ✶✶ :

Soit $n \in \mathbb{N}$. A tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$, on associe le polynôme :

$$Q_P(X) = (3X+8)P(X) + (X^2 - 5X)P'(X) - (X^3 - X^2)P''(X)$$

① Comparer, lorsque P en non nul, le degré de P et celui de Q_P.

② Que vaut P lorsque Q_P est le polynôme nul ?

③ Trouver tous les couples (λ, P) où λ est un nombre réel et P est un polynôme réel, tel que $Q_P = \lambda P$.