7 Systèmes et calcul matriciel.

Systèmes linéaires équivalents. Réduction d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss via les opérations élémentaires, à savoir : multiplier une équation par un scalaire non nul, ajouter à une équation une combinaison linéaire des autre.
Rang d'un système, c'est-à-dire son nombre de pivots après réduction.
Opérations sur les matrices : somme, produit par un scalaire, produit matriciel. Formule du binôme de Newton dans le cas de deux matrices qui commutent.
Transposée d'une matrices. Écriture matriciel d'un système. Rang d'une matrice.
Matrices carrées inversibles. Expression dans le cas particulier des matrices 2×2.

Exercice 1 :

Résoudre par la méthode du Gauss les systèmes d'équations linéaires suivants, d'inconnues réelles :

$$(S_1)\begin{cases} x+y-z &= 0 \\ x-y+z &= 2 \\ x+y+z &= 6 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x+2y+3z &= 0 \\ x+3y+5z &= 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_3)\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ x+2y+3z &= -1 \\ x+3y+5z &= 2 \end{cases}$$

Exercice 2 : systèmes d'équations linéaires avec paramètres

① Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants, en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(S_1)\begin{cases} ax+y+z &= 0 \\ x+ay+z &= 0 \\ x+y+az &= 0 \end{cases} ; \quad (S_2)\begin{cases} x+y+z+2at &= 0 \\ x+by+z+t &= 0 \\ 2x+2y+2z+2t &= 0 \end{cases} \text{et } (S_3)\begin{cases} ax+y+z &= 4 \\ x+by+z &= 3 \\ x+2by+z &= 4 \end{cases}$$

② Résoudre les systèmes suivants dans le cas des valeurs de λ réelles pour lesquelles la solution n'est pas unique :

$$(S_1)\begin{cases} x+y &= \lambda x \\ -x+2y+z &= \lambda y \\ x+z &= \lambda z \end{cases} ; \quad (S_2)\begin{cases} -(2+\lambda)x-2y+z &= 0 \\ -2x+(1-\lambda)y-2z &= 0 \\ x-2y-(2+\lambda)z &= 0 \end{cases} \text{et } (S_3)\begin{cases} (3-\lambda)x+2y+4z &= 0 \\ 2x-\lambda y+2z &= 0 \\ 4x+2y+(3-\lambda)z &= 0 \end{cases}$$

Exercice 5 : Produit matriciel

On considère les matrices à coefficients réels suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer les expressions suivantes lorsque c'est possible :

$$A^2,\ AB,\ BA,\ AE,\ BD,\ CD,\ A(BC)D,\ A(B(DB)) \text{ et } A(B+2E)$$

Exercice 6 : Produit matriciel

Pour tout n entier naturel, on définit la matrice carrée d'ordre n :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

① Utiliser Python pour calculer les produits $B_3 = A_3^2$ et $A_3 B_3$.

② Déterminer pour tout n les produits $B_n = A_n^2$ puis $A_n B_n$. Vérifier vos calculs pour certaines valeurs de n grâce à Python.

Exercice 7 : Produit matriciel

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On cherche à résoudre l'équation d'inconnues réelles : $(xI_3 + yA)^2 = I_3$ où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

① Calculer A^2.

② Soient $z, t \in \mathbb{R}$. Montrer que $zA + tI = 0 \Leftrightarrow z = 0 = t$.

③ Conclure.

Exercice 8 : Produit matriciel et inversibilité

Pour tout nombre réel t on définit la matrice :

$$U(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ -t & 1 & -\frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

① Montrer que, pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, $U(s)U(t) = U(s+t)$.

② En déduire que pour tout t réel, $U(t)$ est inversible.

Exercice 9 : Puissances d'une matrice

Calculer les puissances successives des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que les puissances successives de $U(t)$ définie dans l'exercice 8.

✐ pour A_4^n, on commencera par poser $B_4 = A_4 - 3I_3$ et par déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $B_4^2 = \alpha B_4$.

Exercice 10 : Puissances d'une matrice

On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

① Vérifier que $N^2 = -2N + 3I_3$.

② Montrer par récurrence qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ telle que :

$$N^{n+1} = u_n N + v_n I_3 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Préciser notamment la relation qui existe entre (u_n, v_n) et (u_{n+1}, v_{n+1}).

③ Vérifier que $u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n$.

④ En déduire que $u_{n+1} = -3u_n + 1$.

⑤ Exprimer (u_n, v_n) en fonction de n

Exercice 11 : Suites enchevêtrées

On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= -4u_n - 3v_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ avec } u_0 = 1 \text{ et } v_0 = 2$$

① Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = A \cdot X_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

② En déduire la forme explicite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12 : Inversibilité

Dire dans chaque cas si la matrice est inversible et dans ce cas, calculer son inverse.

① $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -6 & -16 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -15 \end{pmatrix}$, $\quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

② $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, $\quad F = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

③ Pour chacune des matrices suivantes, déterminer les valeurs de λ pour lesquelles elles ne sont pas inversibles :

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 2 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \qquad N_\lambda = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -7 \\ 2 & 3-\lambda & -8 \\ 2 & 2 & -7-\lambda \end{pmatrix}$$

④ Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $A^2 = aA + bI$.
b. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 13 :

Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

① **a.** Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
b. Calculer la matrice $T = P^{-1}AP$.
c. Exprimer A en fonction de P, P^{-1} et T.
d. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $A^n = PT^nP^{-1}$.

② **a.** On définit la matrice N en écrivant $T = I_3 + N$. Calculer N^2 et N^3. En déduire N^k si $k \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
b. Déterminer T^n en fonction de n et de N, puis de n uniquement.
c. Montrer que $P \cdot N \cdot P^{-1} = A - I_3$ et que $P \cdot N^2 \cdot P^{-1} = A^2 - 2A + I_3$.
d. Donner l'expression de A^n en fonction de n, I_3, A et A^2.